

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

Предисловие	7
Глава 1. Общие сведения о цифровых системах управления	9
§ 1.1. Структура цифровых систем управления	9
§ 1.2. Задачи, решаемые ЦВМ в системах автоматического управления	15
§ 1.3. Методы исследования цифровых систем управления	23
Глава 2. Методы исследования линеаризованных систем .	25
§ 2.1. Вводные замечания	25
§ 2.2. Математический аппарат	36
§ 2.3. Передаточные функции непрерывной части ЦАС	72
§ 2.4. Передаточные функции ЦВМ	94
§ 2.5. Передаточные функции ЦАС	100
§ 2.6. Устойчивость и качество линеаризованных ЦАС	112
§ 2.7. Расчет вынужденных периодических режимов .	115
§ 2.8. Построение логарифмических частотных характеристик	119
§ 2.9. Передаточные функции многомерных ЦАС	136
Глава 3. Случайные процессы в цифровых автоматических системах.	142
§ 3.1. Вводные замечания	142
§ 3.2. Корреляционная функция	147
§ 3.3. Спектральная плотность стационарных процессов	155
§ 3.4. Типовые решетчатые случайные стационарные процессы	160
§ 3.5. Прохождение случайного сигнала через линейную систему	170
§ 3.6. Расчет установившихся ошибок в линеаризованных ЦАС	177
§ 3.7. Приближенный расчет дополнительных ошибок ЦАС, вызванных квантованием по уровню	181
§ 3.8. Корреляционные функции и спектральные плотности шумов квантования	194
§ 3.9. Прохождение случайного сигнала через нелинейные звенья в разомкнутых системах	212
§ 3.10. Случайные процессы в замкнутых нелинейных системах	230
§ 3.11. Системы со случайным периодом дискретности	244

Глава 4. Оптимальный динамический синтез линеаризованных ЦАС при известных статистических характеристиках входных воздействий.	251
§ 4.1. Общие сведения о синтезе систем управления	251
§ 4.2. Критерии качества и методы синтеза.	259
§ 4.3. Основы теории фильтров Винера	272
§ 4.4. Использование фильтров Винера в цифровых системах	291
§ 4.5. Основы теории фильтров Калмана	306
§ 4.6. Формирующие фильтры	324
§ 4.7. Использование оптимальных фильтров Калмана в системах управления	341
Глава 5. Динамический синтез линеаризованных ЦАС при неизвестных статистических характеристиках входных воздействий.	354
§ 5.1. Общие положения	354
§ 5.2. Обеспечение требуемой точности воспроизведения полезного сигнала. Предельные фильтры	356
§ 5.3. Общие принципы построения систем управления с заданным запасом устойчивости	385
§ 5.4. Типовые передаточные функции цифровых систем управления	416
§ 5.5. Расчет корректирующих средств	437
§ 5.6. Комбинированное управление	477
Глава 6. Периодические режимы в ЦАС, вызываемые квантованием по уровню	509
§ 6.1. Приближенный расчет симметричных периодических режимов при учете одного квантующего элемента	509
§ 6.2. Квазипериодические режимы	524
§ 6.3. Точные методы расчета периодических режимов в ЦАС	530
§ 6.4. Определение требований к входным и выходным преобразователям	549
Приложение. Таблица интегралов	562
Литература	564
Предметный указатель	572

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1976

В. А. БЕСЕКЕРСКИЙ

ЦИФРОВЫЕ АВТОМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1976

В. А. БЕСЕКЕРСКИЙ

ЦИФРОВЫЕ АВТОМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1976

Цифровые автоматические системы. Бесекерский В. А., издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1976, стр. 576.

Книга представляет собой систематическое изложение теории систем управления с цифровыми вычислительными машинами в контуре управления. Приводится математический аппарат исследования подобных систем и рассматриваются методы анализа и синтеза систем при известных и неизвестных статистических характеристиках входных воздействий. Излагаются вопросы использования в цифровых системах управления оптимальной фильтрации. Специальный раздел книги посвящен периодическим режимам в замкнутых цифровых системах.

Книга предназначена для специалистов, работающих в области проектирования и исследования систем автоматического управления, а также может быть использована студентами вузов.

Табл. 25. Илл. 187. Библ. 149 назв.

Бурный прогресс в области дискретной микроэлектроники вызвал резкое улучшение всех качественных показателей цифровых вычислительных машин и устройств цифровой техники — таких, как вес, габариты, потребляемая мощность, надежность и т. п. С другой стороны, повышение требований к системам автоматического управления и усложнение самих объектов управления привели к тому, что средствами «непрерывной» автоматики и вычислительной техники уже не могли решаться многие практические задачи. Все это привело к расширению сферы применения и к усложнению цифровых систем управления, имеющих в своем замкнутом контуре либо цифровые вычислительные машины, либо цифровые устройства.

Цифровые системы используются в настоящее время для регулирования и управления самыми различными объектами и процессами: доменными печами, прокатными станами, самолетами, кораблями, химическим оборудованием и т. п. Сфера их использования непрерывно расширяется.

В настоящей книге систематически излагается теория цифровых систем управления, рассматриваются вопросы их анализа и синтеза. В последние годы получила значительное развитие теория оптимального синтеза, использующая идеи оптимальной фильтрации, выдвинутая в основном работами зарубежных авторов — Н. Винера, Р. Калмана и других. Однако следует иметь в виду, что для оптимальной фильтрации требуется практически полная априорная информация о входных воздействиях. Это сдерживает во многих случаях реализацию оптимальных методов построения систем автоматического управления. При отсутствии полной априорной информации можно, вообще говоря, идти по пути использования адаптивных систем, но возникающие при этом трудности реализации получающихся сложных систем обычно исключают пока и этот путь.

Кроме того, очень часто задача создания новой системы управления формулируется так, что от ее разработчика требуется обеспечить заранее заданную точность работы. Это, как правило, делает задачу построения системы управления более сложной, чем нахождение оптимальной системы, так как последнее представляет скорее математическую задачу выбора из возможных решений наилучшего. При использовании современных вычислительных средств эта задача становится часто тривиальной. В то же время задача построения системы управления с наперед заданными качественными показателями может и не иметь решения при данном уровне развития техники и качестве используемых элементов.

В связи с этим в советской литературе уже длительное время развиваются вопросы построения систем управления с заданными качественными показателями при минимальной априорной информации о входных воздействиях. Эта информация сводится обычно к заданию только дисперсий входных воздействий и дисперсий их производных. Такая постановка задачи синтеза наиболее приемлема для большинства практических случаев.

В книге освещаются оба подхода к синтезу цифровых систем управления — при использовании оптимальной фильтрации и на основе так называемых предельных фильтров, обеспечивающих выполнение требований по точности при любых статистических характеристиках входных воздействий.

В цифровых системах управления большое влияние на их функционирование может оказывать явление квантования по уровню в устройствах ввода и вывода информации в ЦВМ или в цифровых вычислителях. Учет этого явления можно производить посредством введения шумов квантования и вычисления дополнительных ошибок, что оказывается оправданным в режимах движения системы. В случае неподвижности системы управления (в согласованном положении) явление квантования по уровню приводит иногда к возникновению периодических режимов, что также вызывает появление дополнительных ошибок. Оба эти метода определения дополнительных ошибок от квантования по уровню развиваются в книге.

Июнь 1975 г.

В. Бесекерский

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЦИФРОВЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

§ 1.1. Структура цифровых систем управления

Значительные вычислительные и логические возможности цифровых устройств и, в частности, цифровых вычислительных машин (ЦВМ) определяют их использование для управления автоматизированными объектами. Устройства цифровой обработки, выполненные на базе современной дискретной микроэлектроники, имеют серьезные преимущества перед непрерывными устройствами. Можно упомянуть о высокой стабильности характеристик, отсутствии дрейфа, высокой точности выполнения арифметических операций, малом весе и габаритах, высоком быстродействии, возможности гибкой оперативной перестройки структуры и др.

В настоящее время при создании цифровых автоматических систем (ЦАС) возможно идти по двум направлениям. Первое направление связано с использованием центральных управляющих цифровых вычислительных машин, построенных по обычному принципу, реализуемому в универсальных ЦВМ. Такая машина (рис. 1.1) содержит арифметическое устройство, устройства памяти (долговременной и оперативной), управляющее устройство и устройства ввода и вывода информации. В некоторых случаях возможно участие человека (оператора) для контроля и корректировки работы ЦВМ.

Подобные ЦВМ могут использоваться для управления сложными объектами (самолетами, ракетами, прокатными станами, доменными печами и т. п.) или группами отдельных объектов при комплексной автоматизации в различных отраслях промышленности (металлургической, химической, нефтеперерабатывающей и др.).

Общая структура ЦАС для этого случая изображена на рис. 1.2 [8, 84, 121]. Система содержит ряд входных преобразователей $P_1, \dots, P_m$, управляемых коммутирующим устройством K_1 , и ряд выходных преобразователей

$ЗУ_1, \dots, ЗУ_k$, представляющих собой, по существу, запоминающие устройства, управляемые коммутирующим устройством K_2 . Сигналы от запоминающих устройств

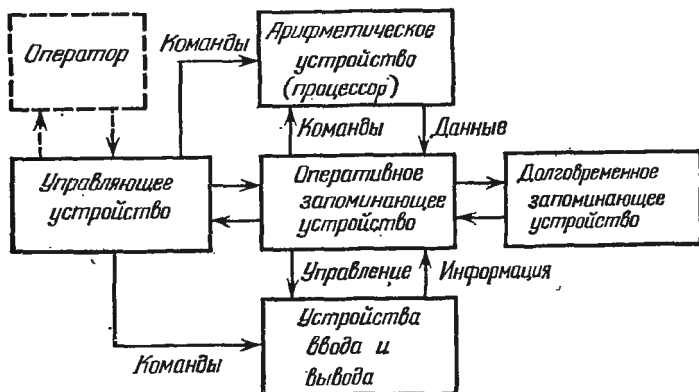


Рис. 1.1. Возможная структура цифровой вычислительной машины

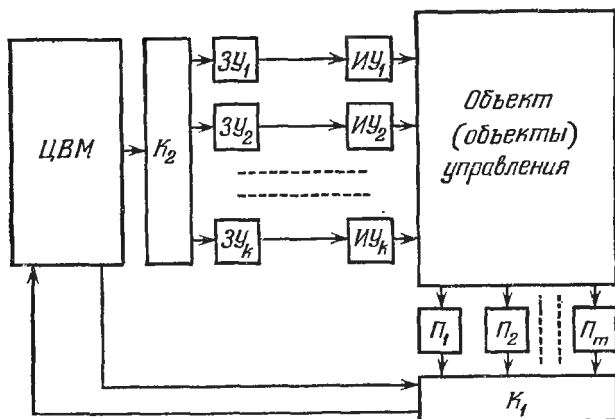


Рис. 1.2. Общая структурная схема системы управления с ЦВМ.

поступают на исполнительные устройства $ИУ_1, \dots, ИУ_k$, воздействующие на объект (или объекты) управления. Собственно ЦВМ включает в себя процессор совместно с устройствами памяти и устройством управления.

Такая система может быть связанной многомерной, если осуществляется управление сложным многомерным объектом, и несвязанной многомерной, если осуществляется управление группой несвязанных одномерных объектов.

В последнем случае ЦАС распадается на совокупность одномерных систем.

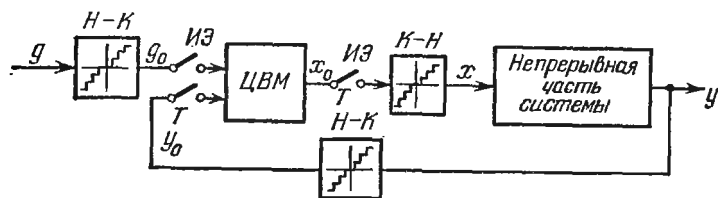


Рис. 1.3. Одномерная система управления с ЦВМ.

При управлении сложным объектом или группой объектов процессор обслуживает по очереди отдельные каналы управления. Эта очередь может осуществляться по жесткой программе или по мере поступления заявок от отдельных каналов с возможностью использования в последнем случае приоритетного обслуживания. При жесткой программе обслуживания каналов период дискретности оказывается обычно постоянным, хотя он может быть разным в отдельных каналах. При обслуживании по гибкой программе период дискретности оказывается случайной величиной с некоторым математическим ожиданием и дисперсией.

Таблица 11

Характеристика	Ед. измер.	1965 г.	1970 г.	1975 г.	k_y
Объем	дм ³	42,5	10,7	2,3	20
Масса	кг	34,0	9,1	2,7	13
Потребляемая мощность	Вт	170	50	17	10
Быстродействие	мкс	115	17	2,8	40
Стоимость	тыс. долл.	100	19	5	20
Среднее время наработки на отказ	тыс. час	5	70	200	40

Основной для исследования обычно является одномерная система. Структурная схема одномерной системы с

ЦВМ изображена на рис. 1. 3 [8]. Она содержит входные преобразователи непрерывной величины в код $H-K$. Кодироваться может входное задающее воздействие $g(t)$, представляющее собой желаемое значение управляемой величины $y(t)$, управляемая величина, а также другая, поступающая извне информация. В результате такого

Тип бортовой ЦВМ	Время вычислений, мкс		
	сложение	умноже- ние	деление
Фирмы IBM для ракеты «Сатурн-5»	32	328	656
D37B для ракеты «Минитмен-В»	78	1016	2030
Для ракеты «Титан-3»	156	1880	8000
UNIVAC-1824M для ракеты «Ти- тан-3С»	—	—	—
Для ракеты «Атлас-Е»	128	896	—
Для ракеты «Атлас-Центавр»	6	22,5	40,5
Фирмы IBM для космич. корабля «Джемини»	140	420	840
IBM 4P/1C	15	51	—
UNIVAC-1830A	4	20	34
D26C	6—12	18—45	106—112
D26I	12—18	42—234	—
L-90I	7	105	203
Adept 101 — Adept 108	1,25—10	7,5—60	—
ADD-1020	12	150—186	225
PICO	12	242	606
Rajtheon — RAC — 230	2,6	11,4	11,4

кодирования на вход ЦВМ, а точнее, ее процессора поступают цифровые представления этих величин: g_0 и y_0 .

Дискретность ввода этих величин в процессор иллюстрируют импульсные элементы ИЭ, работающие с периодом дискретности T . Выходная величина процессора x_0 есть цифровое представление сигнала управления. Далее эта величина проходит через преобразователь кода в

непрерывную величину $K-H$ и превращается в непрерывную величину $x(t)$, представляющую собой в большинстве случаев электрическое напряжение. Эта величина поступает затем на непрерывную часть системы, куда относятся объект управления, исполнительные устройства, усилители, непрерывные корректирующие средства и др.

Таблица 1.2

Запоминающее устройство			Масса, кг	Объем, дм ³	Потребляемая мощность, Вт
тип	число раз- рядов кода	объем (слов)			
Магнитные сердечники	28	4 096	36,5	57	138
Магнитный диск	27	6 912	15	20,2	169
Магнитный барабан	24	9 792	14	—	90
Тонкие пленки	16	12 096	44	48,1	155
	24	8 096			
Трансфлюксоры	28	2 048	6,8	—	50
Магнитные сердечники	24	8 192	32,6	15	190
То же	39	4 096	27	45	85
То же	8	16 384	12,3	13	75
То же	30	4 096	90	71,5	56,7
То же	30	16 384	16,5	18,4	192
		32 768			
То же	30	1 024	4—6	4,2—8,5	50—100
		16 384			
Магнитные сердеч- ники, стеклянные линии	28	8 192	10	11,5	30
Ортокоры	36	32 768	—	—	—
Тонкие пленки	24	4 096	30	25	202
		7 168			
Биаксы	24	2 560	9	11,5	46
		7 680			
Магнитные сердечники	24	4 096	9	10,8	95

Управляющие ЦВМ подобного типа в настоящее время приобретают различную специфику в зависимости от той отрасли техники, где они используются (управление движущимися объектами: аэродинамическими, космическими, морскими; управление технологическими процессами и др.). В связи с бурным развитием микроэлектроники происходит их интенсивное развитие. В таблице 1.1

помещены для иллюстрации сведения о совершенствовании бортовых ЦВМ ракет [13] для некоторой гипотетической («усредненной») ЦВМ.

Показатель k_y представляет собой коэффициент улучшения характеристики ЦВМ за десятилетний период.

Более подробные сведения о некоторых бортовых ЦВМ для ракет приведены в таблице 1.2 [130]. Эта таблица иллюстрирует большое разнообразие используемой элементной базы и основных характеристик ЦВМ (числа разрядов, быстродействия, объема памяти) в связи со специализацией их при использовании на ракетах различного класса.

Второе направление, по которому развиваются в настоящее время цифровые автоматические системы, — это использование отдельных цифровых устройств (сумматоров, интеграторов, функциональных устройств и др.) для обеспечения необходимых вычислительных и логических операций в каждом канале управления одномерной или многомерной системы. Такие цифровые устройства могут строиться на разных принципах, однако общая структура цифровой системы управления сохраняет при этом свой вид и содержит указанные на рис. 1.3 основные элементы: преобразователи непрерывной величины в код и обратно, а также процессор, обеспечивающий необходимые вычислительные операции.

Использование подобных цифровых устройств позволяет во многих случаях упростить систему управления за счет применения простых и надежных модулей, избавиться от необходимости организации сравнительно сложного процесса обслуживания от одной ЦВМ многих потребителей, упростить схему коммутации и расположить цифровую вычислительную часть в непосредственной близости от основных элементов канала управления.

Параллельная процедура обеспечения работы многих каналов за счет использования в каждом канале своих цифровых устройств позволяет в значительной степени снизить требования к быстродействию дискретных элементов, что дает возможность повысить их надежность.

В части математического описания динамических процессов, протекающих в цифровой системе управления, оба ее вида (с использованием центральной ЦВМ и исполь-

зованием отдельных цифровых устройств) не отличаются один от другого, если в них выполняются одинаковые условия постоянства (или случайности) периода дискретности.

§ 1.2. Задачи, решаемые ЦВМ в системах автоматического управления

Задачи, которые приходится решать ЦВМ в системах автоматического управления, весьма разнообразны. Они могут быть связаны с обработкой поступающей информации, требующей вычислительных или логических операций, с улучшением динамических свойств системы управления за счет введения некоторых корректирующих программ, реализуемых в цифровой части системы, с операциями адаптации и оптимизации системы, с операциями контроля, подготовки к работе, поиска неисправностей и др.

Среди этих задач выделим две, наиболее часто встречающиеся в системах автоматического управления. Первая из них связана с большим объемом вычислительной работы, требуемой для определения задающего воздействия, которое должно воспроизводиться системой управления. Во многих случаях, особенно в настоящее время, необходимо резкое повышение точности работы систем управления самого различного назначения, и непрерывные вычислительные устройства уже не могут справиться с возросшими требованиями. В этих случаях приходится переходить на использование цифровой вычислительной техники. Задачей ЦВМ оказывается иногда только определение текущей разности между задающим воздействием и управляемой величиной, т. е., по сути дела, ЦВМ работает в этом случае как сравнивающее устройство замкнутой системы управления. Однако выработка этой разности иногда требует производства такого объема вычислений, с которым может справиться не всякая управляющая ЦВМ.

В качестве примера рассмотрим задачу стабилизации оси некоторого визирующего устройства, расположенного на подвижном объекте [10], например на корабле (рис. 1.4). На этом рисунке показаны углы поворота визируемой точки небесной сферы — азимут A и угол места h — относительно географической системы координат, оси которой направлены на север, восток и по местной вертикали; углы

поворота объекта относительно той же системы координат — курс K , дифферент ψ и крен θ . Пусть требуется сохранять неизменным направление на визируемую точку при перемещениях подвижного объекта.

Возьмем единичный вектор, направленный в точку визирования, и спроектируем его на оси горизонтной системы

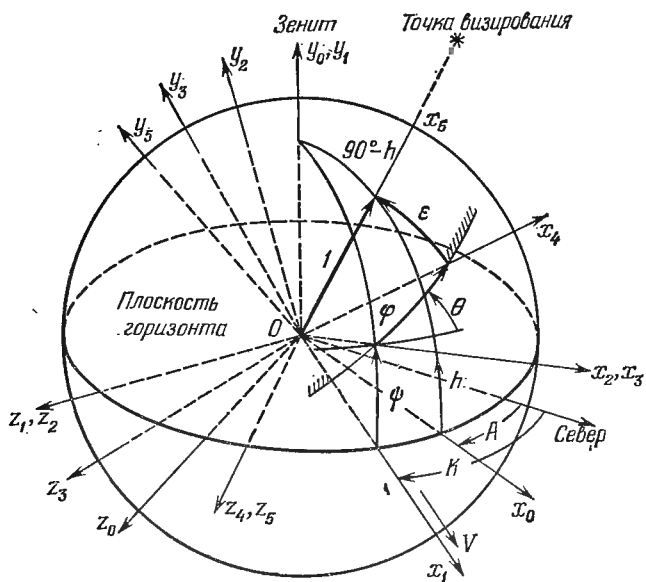


Рис. 1.4. К задаче стабилизации визирующего устройства на подвижном объекте.

координат $Ox_1y_1z_1$. Затем повернем эту систему координат последовательно на углы дифферента ψ , крена θ , углы поворота оси визирующего устройства φ и ϵ . В результате этих поворотов система координат $Ox_5y_5z_5$ будет так расположена, что ось Ox_5 совпадает с единичным вектором, а оси Oy_5 и Oz_5 будут ему перпендикулярны. При этом проекция единичного вектора на ось Ox_5 будет равна единице, а на две другие оси — нулю. Условия $y_5 = 0$ и $z_5 = 0$ служат признаком того, что углы поворота φ и ϵ реализованы правильно и визирующее устройство направлено в заданную точку небесной сферы.

Формулы преобразования координат в соответствии с некоторым поворотом системы координат $Ox'y'z'$ относительно оси Oz' на угол α (рис. 1.5) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x'' &= x' \cos \alpha + y' \sin \alpha, \\ y'' &= y' \cos \alpha - x' \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Пересчет координат по формулам (1.1) делается так называемым *преобразователем координат*, в качестве которого может использоваться ЦВМ. Для реализации последовательных поворотов на углы $h, K - A, \psi, \theta, \varphi$ и ϵ требуется шесть преобразователей координат. Схема такого вычислительного устройства, реализуемого на ЦВМ, изображена на рис. 1.6. Углы, на которые последовательно осуществляется поворот исходного единичного вектора, должны вводиться в ЦВМ от соответствующих кодирующих датчиков углов, соединенных с осями гироскопического стабилизатора, вырабатывающего углы $(K - A), \psi$ и θ , и с осями приводов наведения по углам φ и ϵ . Выходные сигналы $y_5 = \Delta \epsilon$ и $z_5 = \Delta \varphi$ подаются на входы приводов наведения.

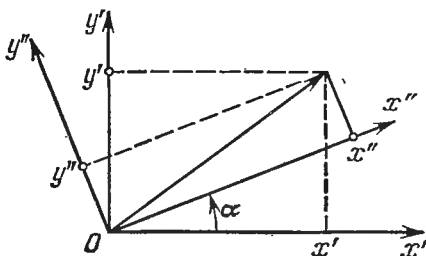


Рис. 1.5. Задача преобразования координат.

Нетрудно видеть, что с точки зрения динамики системы управления ЦВМ выполняет функции сравнивающего устройства, определяющего разности $\Delta \varphi$ и $\Delta \epsilon$. Однако эти разности определяются в результате проведения значительного объема вычислений.

Нетрудно видеть, что с точки зрения динамики системы управления ЦВМ выполняет функции сравнивающего устройства, определяющего разности $\Delta \varphi$ и $\Delta \epsilon$. Однако эти разности определяются в результате проведения значительного объема вычислений.

Следует заметить, что, вообще говоря, углы A и h являются функциями времени. Поэтому в действительности для визирования определенной точки небесной сферы требуется задать координаты этой точки в системе координат, связанной с небесной сферой, например склонение и часовой угол, а затем преобразовать эти координаты в географическую систему координат, что требует реализации в ЦВМ еще двух дополнительных преобразований координат.

Вторая, наиболее часто возлагаемая на ЦВМ задача, заключается в обеспечении желаемых динамических характеристик системы управления посредством использования корректирующих программ в ЦВМ. В этом случае ЦВМ представляет собой по существу цифровой фильтр с заданными характеристиками.

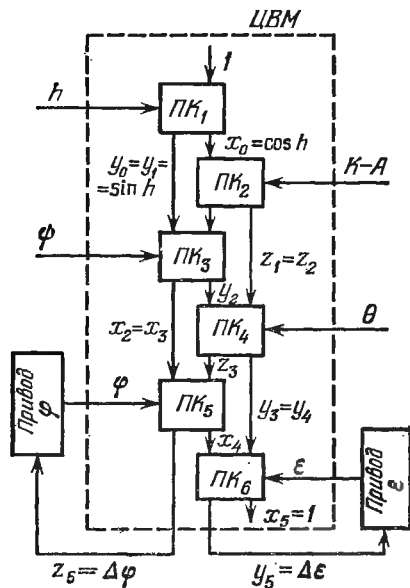


Рис. 1.6. Структура преобразователя координат.

В качестве примера рассмотрим систему стабилизации космического корабля «Апполон» [121]. В случае совместного полета корабля вместе с лунным отсеком возможны два режима. Первый режим соответствует номинальным условиям заполнения топливных баков и носит название широкополосного режима. Частотные характеристики разомкнутой системы управления для этого режима изображены на рис. 1.7, а. Кривая 1 соответствует случаю учета контура компенсации эксцентриситета вектора тяги, а кривые 2 — контурам наведения и компенсации эксцентриситета вектора тяги. Основная частота среза равна 1,25 рад/с. Корректирующий фильтр вносит стабилизацию на частотах упругих тонов, меньших 8,4 рад/с, за счет фазового запаздывания. При этом запас устойчивости по фазе на резонансной частоте составляет 35° . В широкополосном режиме обеспечивается стабилизация на любых жидкостных тонах, присущих кораблю с лунным отсеком в случае полного или почти полного заполнения взлетных и посадочных баков лунной кабины.

Однако при частичном заполнении топливных баков лунной кабины и почти полном опорожнении топливных

баков основного блока в системе управления появляются медленно расходящиеся колебания. В этом случае используется второй, так называемый *узкополосный режим*. Частотная характеристика разомкнутой системы для этого режима показана на рис. 1.7, б. Кривая 1 соответствует наличию

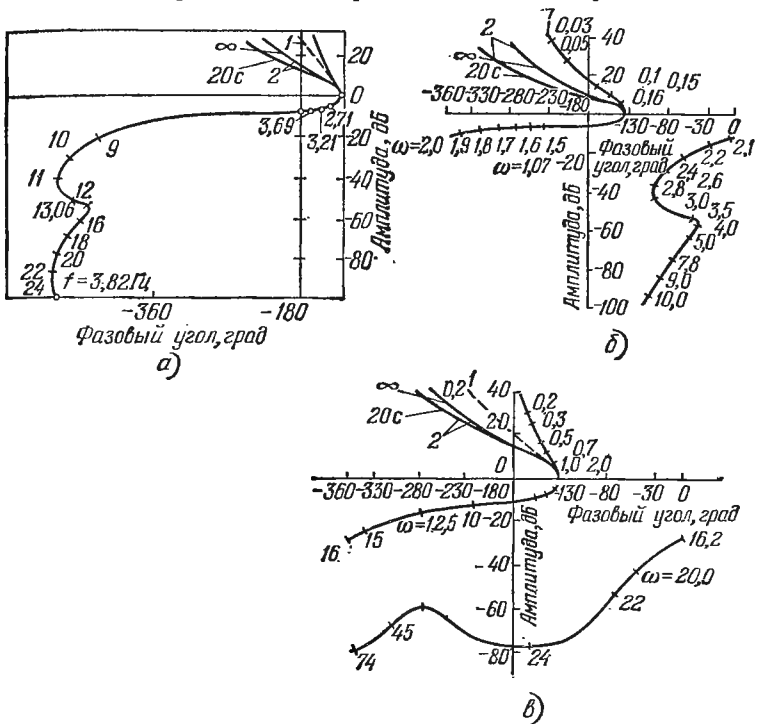


Рис 1.7. Амплитудно-фазовые частотные характеристики системы стабилизации.

контура компенсации эксцентриситета вектора тяги, а кривые 2 — дополнительному учету контура наведения.

Стабилизация системы достигается узкополосным фильтром за счет амплитудного подавления. Жидкостные тона, частоты которых ниже 2,08 рад/с, стабилизируются за счет фазового запаздывания. Запас устойчивости по амплитуде составляет 6 дБ на частоте среза, равной 0,35 рад/с. Ослабление на частотах упругих тонов превышает 100 дБ.

Наконец, при отсутствии лунной кабины корректирующий фильтр создает частотную характеристику, которая изображена на рис. 1.7, в. Кривая 1 соответствует наличию контура компенсации эксцентриситета вектора тяги, а кривые 2 — дополнительному наличию контура наведения.

Запас устойчивости составляет по фазе 50° , а по амплитуде 10 дБ. На частотах упругих тонов, которые превышают 5,3 Гц, коэффициент усиления контура близок к 0 дБ.

Структура и параметры трех цифровых фильтров, реализуемых в бортовой ЦВМ, показаны на рис. 1.8. Случаю

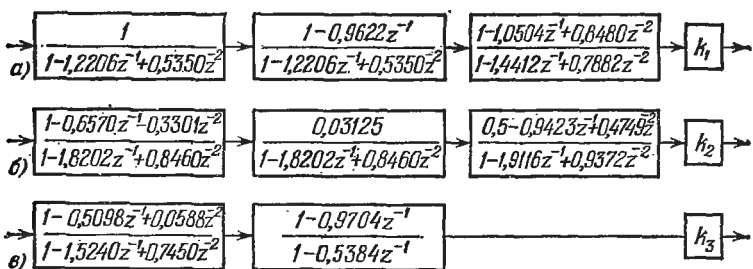


Рис. 1.8. Цифровые фильтры системы стабилизации космического корабля.

широкополосного фильтра соответствует рис. 1.8, а, узкополосному фильтру — рис. 1.8, б и фильтру системы при отсутствии лунной кабины — рис. 1.8, в. Переход от одного фильтра к другому осуществляется подключением той или иной программы, хранящейся в памяти бортовой ЦВМ.

Обнаружение и коррекция неисправностей. Обычно часть программного обеспечения в управляющей ЦВМ предназначается для обнаружения неисправностей в самой ЦВМ и последующего включения дублирующего устройства, если оно необходимо для данной системы управления.

Наиболее частым видом неисправностей являются кратковременные отказы. Этот тип неисправности определяется тем, что в одном или нескольких разрядах информации, находящейся в процессоре либо в оперативном запоминающем устройстве, может произойти сбой. Последствиями этого могут быть ошибки в вычислениях, неверная запись в оперативное запоминающее устройство, ошибка в пересылке программ и др.

Одна из возможных логических схем обнаружения ошибок передачи управляющих сигналов одного из каналов управления изображена на рис. 1.9. До окончания каждого цикла вычислений алгоритма управления индикатор неисправностей показывает «сбой». Если все вычисления данного цикла произведены в заданной последовательности, то индикатор будет находиться в положении «правильно». Затем вычисления прерываются для проверки состояния

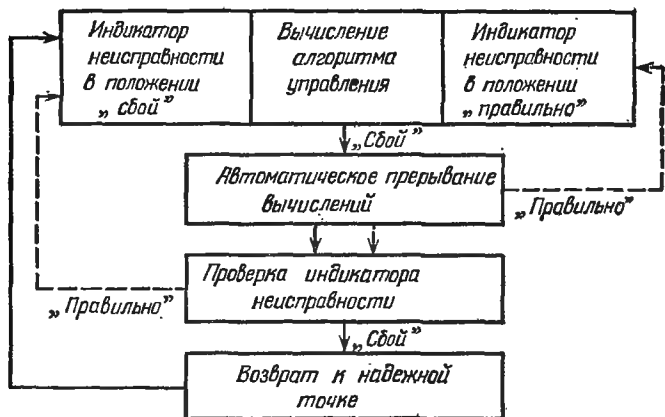


Рис. 1.9. Логический контур поиска неисправностей.

индикатора. Если результат проверки дает ответ «правильно», то подпрограмма прерывания заканчивается, а программа вычисления алгоритма управления данного канала возвращается к соответствующему моменту реального времени и вычисления продолжают.

Если же вычисления в алгоритме управления канала не закончены, а программа перешла к вычислениям по другим алгоритмам, например, для управления следующим каналом, то подпрограмма прерывания вернет программу вычислений в необходимое положение. Если при этом индикатор неисправности будет находиться в положении «сбой», то программа вычислений будет возвращена к некоторой «надежной точке» (последней точке промежуточного расчета, начальной точке вычислений, опирающихся на константы, записанные в долговременном запоминающем устройстве, и др.). При введении «надежной точки» предполагается, что

сбой может исказить информацию, которая хранится в оперативной памяти. Поэтому при реализации «надежной точки» необходимо повторно вводить максимум требующихся исходных данных из долговременного устройства.

Ошибки вычислений и записи чисел в оперативное запоминающее устройство могут определяться и корректироваться по схеме, изображенной на рис. 1.10. Сначала проверяется конечная точка вычислений — команда, подаваемая на исполнительное устройство. Сообразность этой

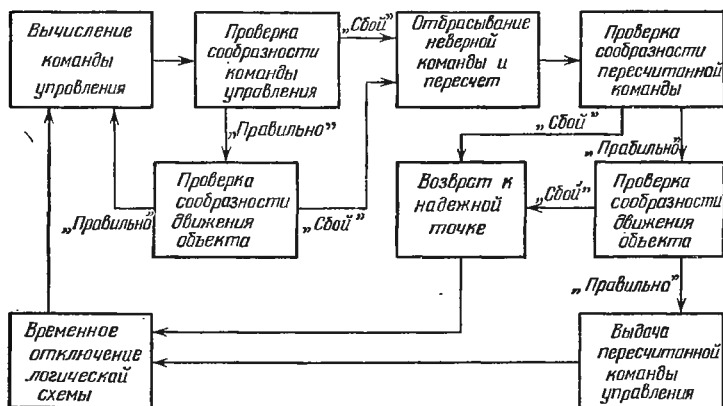


Рис. 1.10. Логический контур проверки сообразности вычислений.

команды может определяться сравнением разности двух последовательных команд с порогом, полученным при моделировании и соответствующим максимальным возмущениям, действующим на объект управления. Если указанная разность удовлетворяет критерию сообразности, то входные данные канала управления (управляемая величина или ее производные) сравниваются с некоторыми константами, также полученными при моделировании. Эта проверка предназначена для обнаружения уходов от устойчивого состояния, вызванных, например, неисправностями канала управления.

Если в результате проверки окажется, что команда на управление объектом не соответствует его движению, то текущая команда на управление игнорируется и до вычисления новой команды в следующем цикле сохраняется

команда предыдущего цикла. Новые команды проверяются таким же способом. Такая проверка позволяет сохранить работоспособность системы при однократных сбоях. В том случае, когда несколько раз подряд не удовлетворяется критерий сообразности, программа может перейти к процедуре задания «надежной точки» или к выдаче сигнала аварийной ситуации.

§ 1.3. Методы исследования цифровых систем управления

Цифровые системы управления имеют квантование по времени, что относит их к классу импульсных систем, и квантование по уровню, что делает их нелинейными. Существующие методы исследования нелинейных систем сравнительно мало пригодны для цифровых систем. Методы фазового пространства и фазовой плоскости [21, 74, 145] могут применяться для сравнительно простых систем, обычно, за малым исключением, не имеющих практического значения. Метод гармонической линеаризации [21, 140] оказывается здесь сравнительно сложным вследствие необходимости учета влияния квантования по времени. Осложнение также вызывает непрерывное смещение начальных точек отсчета на нелинейных статических характеристиках входных и выходных преобразователей, вызванное изменяющимися внешними воздействиями. Другие аналитические методы исследования [34, 125, 142] также еще пока малоэффективны.

Поэтому основным методом исследования цифровых систем управления является их моделирование на универсальных цифровых вычислительных машинах и на аналого-цифровых комплексах. Однако такое моделирование не может проводиться без параллельного аналитического исследования, предназначенного для обоснования структуры проектируемой системы, определения основных ее параметров и качественных показателей и предварительного выбора всех элементов. При этом аналитические методы могут предполагать вынесение сложных расчетов на вычислительную технику с целью экономии времени и возможного просмотра большого количества вариантов.

Все это предъявляет к возможным аналитическим методам требования высокой эффективности и обозримости

получаемых результатов. Наиболее пригодным здесь оказываются методы расчета, основанные на рассмотрении линеаризованных импульсных систем с учетом влияния, оказываемого квантованием по уровню, в виде дополнительных шумов квантования или в виде дополнительных периодических режимов.

Такая методика принята в последующем изложении. Она основана на том, что при создании новых цифровых систем управления точный расчет динамики с учетом квантования по уровню не представляет особого интереса. Здесь обычно оказывается достаточной лишь оценка дополнительных движений системы и дополнительных ошибок, вызываемых квантованием по уровню.

Следует также заметить, что многообразие возможных дополнительных режимов в цифровой системе управления и их непрерывный переход от одного вида к другому делает всю картину весьма сложной, плохо поддающейся анализу даже при моделировании подобных систем на ЦВМ или на аналого-цифровых комплексах.

Развиваемые ниже методы исследования цифровых систем управления позволяют до перехода на моделирование проектируемой системы произвести оценку ожидаемых результатов и решить вопрос о целесообразности построения системы по избранной структуре.

Сведения о других возможных методах аналитического исследования цифровых систем управления имеются в работах [21, 29, 33, 34, 48, 55, 66, 70, 77, 85, 125, 128]. Вопросы исследования нелинейных импульсных систем наиболее систематично и полно изложены в монографии [142].

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ СИСТЕМ

§ 2.1. Вводные замечания

Известна методика исследования линеаризованных нелинейных непрерывных систем [8, 24, 62]. Эта методика основывается на переходе от нелинейной системы к линеаризованной посредством использования разложения нелинейных зависимостей в ряд Тейлора с последующим сохранением для исследования только линейных членов

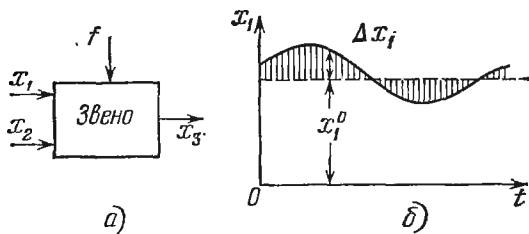


Рис. 2.1. Нелинейное непрерывное динамическое звено с двумя выходами.

разложения. Так, например, пусть для нелинейного звена (рис. 2.1, а) дано дифференциальное уравнение вида

$$F(x_1, x_2, \dot{x}_2, x_3, \dot{x}_3, \ddot{x}_3, \ddot{x}_3) = \varphi(f, \dot{f}), \quad (2.1)$$

где x_1 и x_2 — входные величины, x_3 — выходная величина, f — внешнее воздействие, F и φ — некоторые нелинейные функции. Допустим, что установившийся процесс в системе имеет место при некоторых постоянных значениях $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$ и $f = f^0$. Тогда уравнение установившегося состояния для данного звена согласно (2.1) будет

$$F(x_1^0, x_2^0, 0, x_3^0, 0, 0, 0) = \varphi(f^0, 0). \quad (2.2)$$

В основе линеаризации нелинейных уравнений лежит предположение о том, что в исследуемом динамическом процессе переменные (в данном случае x_1, x_2, x_3) могут

быть разложены в ряд Тейлора и они изменяются так, что их отклонения от установившихся значений (x_1^0, x_2^0, x_3^0) остаются все время достаточно малыми (рис. 2.1, б).

Обозначим указанные отклонения через $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$. Тогда в динамическом процессе

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= x_1^0 + \Delta x_1(t), & x_2(t) &= x_2^0 + \Delta x_2(t), & \dot{x}_2 &= \Delta \dot{x}_2, \\ x_3(t) &= x_3^0 + \Delta x_3(t), & \dot{x}_3 &= \Delta \dot{x}_3, & \ddot{x}_3 &= \Delta \ddot{x}_3, & \dddot{x}_3 &= \Delta \dddot{x}_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Условие достаточной малости динамических отклонений переменных от некоторых установившихся значений для системы автоматического управления и следящих систем обычно выполняется. Этого требует сама идея работы замкнутой автоматической системы.

Внешнее же воздействие f не зависит от работы автоматической системы, изменение его может быть произвольным, и поэтому правая часть уравнения (2.1) обычно линеаризации не подлежит (в отдельных случаях и она может быть линеаризована).

Первый способ линеаризации. Разложим функцию F , стоящую в левой части уравнения (2.1), в ряд по степеням указанных выше малых отклонений, рассматривая все производные тоже как самостоятельные переменные. Тогда уравнение (2.1) примет вид

$$\begin{aligned} F(x_1^0, x_2^0, 0, x_3^0, 0, 0) &+ \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0 \Delta x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)^0 \Delta \dot{x}_2 + \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0 \Delta x_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3}\right)^0 \Delta \dot{x}_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3}\right)^0 \Delta \ddot{x}_3 + \\ &+ (\text{члены высшего порядка малости}) = \varphi(f, \dot{f}), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где через $(\partial F / \partial x_1)^0$ для краткости обозначена величина $\partial F / \partial x_1$, взятая при $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \dot{x}_2 = 0, x_3 = x_3^0, \dots, \dddot{x}_3 = 0$ (т. е. сперва берется в общем виде частная производная от функции F по x_1 , после чего в нее вместо всех переменных подставляются их постоянные значения $x_1^0, x_2^0, 0, x_3^0, \dots, 0$).

Следовательно, все частные производные в полученном уравнении (2.4) представляют собой некоторые постоянные коэффициенты. Они будут переменными во времени, если функция F содержит t в явном виде или если установившийся процесс в системе определяется переменными значениями $x_1^0(t), x_2^0(t), x_3^0(t)$.

Члены высшего порядка малости, указанные в уравнении (2.4), состоят из произведений и степеней малых отклонений $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$ с коэффициентами в виде смешанных частных производных и частных производных второго и высших порядков от функции F по всем переменным.

Вычтя из уравнения (2.4) почленно уравнение установившегося состояния (2.2) и отбросив члены высшего порядка малости, получим искомое линеаризованное уравнение динамики данного звена в виде

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^0 \Delta x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} \right)^0 \Delta \dot{x}_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^0 \Delta x_3 + \\ & + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3} \right)^0 \Delta \dot{x}_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3} \right)^0 \Delta \ddot{x}_3 = \varphi(f, f) - \varphi(f^0, 0). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Это дифференциальное уравнение, так же как и (2.1), описывает тот же динамический процесс в том же звене автоматической системы. Отличие этого уравнения от (2.1) состоит в следующем:

1) уравнение (2.5) является более приближенным, ибо в процессе его вывода были отброшены малые высшего порядка;

2) неизвестными функциями времени в этом уравнении являются не прежние полные величины x_1, x_2, x_3 , а их отклонения $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ от некоторых установившихся значений x_1^0, x_2^0, x_3^0 ;

3) полученное уравнение оказывается линейным относительно отклонений $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta \dot{x}_2, \dots, \Delta \ddot{x}_3$ с постоянными коэффициентами $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^0, \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^0, \dots$ (или с переменными коэффициентами, если F содержит t в явном виде, а также когда установившийся процесс определяется переменными величинами $x_1^0(t), x_2^0(t), x_3^0(t)$, например в программном управлении).

Таким образом, цель получения линейного дифференциального уравнения взамен прежнего нелинейного достигнута. Уравнение (2.5) называется *дифференциальным уравнением звена в отклонениях*. Прделав то же самое для всех звеньев системы, получим в результате линеаризованные уравнения процесса управления в отклонениях (или, как называют еще, *уравнения в вариациях*).

Приведем геометрическую трактовку этого способа линеаризации. Изобразим графически зависимость F от x_1 при постоянных значениях всех остальных переменных:

$$x_2 = x_2^0, \dot{x}_2 = 0, x_3 = x_3^0, \dot{x}_3 = \ddot{x}_3 = \ddot{x}_3 = 0.$$

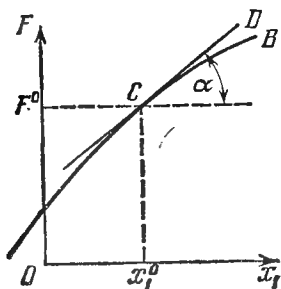
Пусть эта зависимость имеет вид кривой, представленной на рис. 2.2, а. Отметим значение x_1^0 и проведем в точке C касательную. Тогда

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 = \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.6)$$

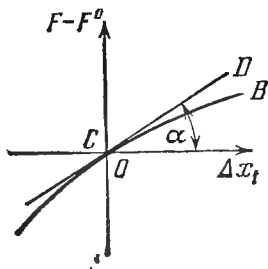
где α — угол наклона касательной в точке $C(x_1^0, F^0)$, для которой $x_1 = x_1^0$ и

$$F = F^0 = F(x_1^0, x_2^0, 0, x_3^0, 0, 0). \quad (2.7)$$

Заметим, что, строго говоря, выражение (2.6) записано некорректно, так как справа находится безразмерная величина $\operatorname{tg} \alpha$, а слева — величина, которая в общем случае



а)



б)

Рис. 2.2. Геометрический смысл линеаризации.

имеет некоторую физическую размерность. Более строго выражение (2.6) должно быть записано в виде

$$\frac{m_F}{m_x} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 = \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.8)$$

где m_F и m_x — масштабы величин F и x_1 , откладываемых на осях (рис. 2.1). Однако такая запись, вообще говоря, имеется в виду и в выражении (2.6).

Замена $x_1 = x_1^0 + \Delta x_1$ и сокращение члена (2.7), производившиеся раньше аналитически, здесь эквивалентны

переносу начала координат в точку C (рис. 2.2, а), в результате чего получается график рис. 2.2, б.

Первый член линейного уравнения (2.5) согласно (2.6) означает, что линеаризация уравнения геометрически может трактоваться как замена первоначальной кривой CB на касательную к ней прямую CD . Из графика рис. 2.2, б очевидно, что эта замена тем точнее, чем меньшие величины отклонения Δx_1 возникают в исследуемом динамическом процессе (основная предпосылка для линеаризации); границы отклонений Δx_1 , для которых допустима линеаризация, тем шире, чем ближе кривая CB к прямой CD . Последним обстоятельством и определяются практически в каждой задаче те границы, внутри которых отклонения можно считать «достаточно малыми».

В ряде задач отличие от линейности, показанное на рис. 2.2, б, бывает столь незначительным, что даже в сравнительно большом диапазоне отклонений Δx_1 можно считать систему линейной. В случае же ярко выраженной нелинейной зависимости линеаризации будет справедлива лишь на соответствующем более узком участке отклонений Δx_1 .

Линеаризация в рассматриваемом смысле может быть совершенно недопустимой при скачкообразных зависимостях (релейные характеристики, сухое трение). Такого рода зависимости называются *существенно нелинейными*. Если по указанным причинам не может быть подвергнуто линеаризации уравнение только одного звена системы или даже только часть функции F для данного звена, то производят линеаризацию всех остальных нелинейных зависимостей, оставляя только одну или несколько существенно нелинейных.

Из приведенной геометрической иллюстрации вытекает *второй способ линеаризации уравнений системы автоматического регулирования*, который весьма часто применяется на практике. Этот способ заключается в том, что с самого начала все криволинейные зависимости, используемые при составлении уравнений звеньев, заменяются прямолинейными (по касательной в соответствующей точке кривой). Тогда уравнения звеньев сразу будут получаться линейными. Для упрощения записи значок Δ перед переменными $x_1(t)$, $x_2(t)$ и т. д. при этом опускается в предположении, что эти переменные представляют собой малые

отклонения от некоторого установившегося состояния и линеаризации уравнений уже проделана.

Применительно к цифровым системам управления описанный выше способ линеаризации может быть применен только к непрерывной их части. Распространить его на цифровую часть (ЦВМ с устройствами ввода и вывода) не представляется возможным.

Сама цифровая управляющая машина может реализовать как линейные, так и нелинейные законы управления. В последнем случае линеаризация не должна осуществляться при исследовании, так как при этом будет потерян весь смысл использования нелинейных законов управления.

Входные и выходные преобразователи (рис. 1.3) имеют статические характеристики ступенчатого (релейного) вида. Для подобных характеристик тангенс угла наклона либо равен нулю, либо стремится к бесконечности. Поэтому для входных и выходных преобразователей ЦВМ используется *третий метод линеаризации*. Он основан на предположении, обратном тому, которое принимается при линеаризации непрерывных систем. Если принять, что изменения входного сигнала по своей величине значительно больше единицы младшего разряда преобразователя, то можно пренебречь влиянием ступенчатости характеристики и линеаризовать ее, проведя некоторую «среднюю» прямую. Это поясняет рис. 2.3, *а*, на котором изображена начальная часть статической характеристики входного преобразователя (преобразователя непрерывной величины в код).

По оси абсцисс отложено непрерывное значение задающего воздействия g , а по оси ординат — его цифровое представление (число) g_0 , получаемое на выходе входного преобразователя. Это число на рис. 2.3, *а* дано в десятичной системе счисления. Величина единицы младшего разряда на входе обозначена δ_1 . Эта единица младшего разряда имеет физическую размерность, совпадающую с размерностью задающего воздействия. Естественно, что единица младшего разряда на выходе преобразователя равна безразмерной единице.

В дальнейшем изложении будем предполагать, что протяженность всех горизонтальных площадок статической характеристики (рис. 2.3, *а*) одинакова и равна единице младшего разряда δ_1 . Это означает, что для характеристики

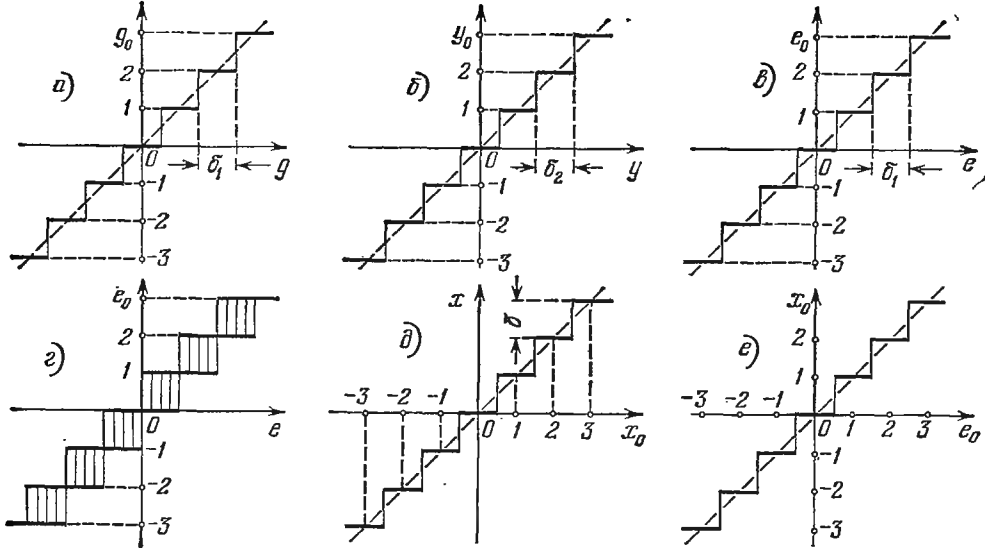


Рис. 2.3. Статические характеристики преобразователей.

справедлива следующая зависимость:

$$g_0 = E \left[\frac{g}{\delta_1} + \frac{1}{2} \operatorname{sign} g \right], \quad (2.9)$$

где $E[\cdot]$ — целая часть числа, заключенного в квадратные скобки.

Для линеаризованной характеристики, показанной на рис. 2.3, *a* штриховой линией, коэффициент передачи

$$k_1 = \frac{1}{\delta_1}. \quad (2.10)$$

Наибольшая ошибка при переходе от нелинейной характеристики к линейной не будет превышать по модулю значения $0,5\delta_1$.

Преобразователь с характеристикой, изображенной на рис. 2.3, *a*, может быть представлен в виде совокупности

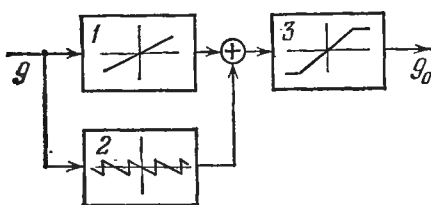


Рис. 2.4. Эквивалентное представление входного преобразователя.

линейных и нелинейных звеньев (рис. 2.4). Звено 1 является линейным с коэффициентом передачи k_1 , определяемым формулой (2.10). Звено 2 с пилообразной статической характеристикой соответствует нелинейной добавке, которую дает действительная характеристика преобразователя. Наклон каждого «зубца» характеристики равен $-k_1$. Звено 3 соответствует ограниченно линейному звену с единичным коэффициентом передачи линейного участка и насыщением, которое будет иметь место во всех реальных преобразователях.

Число отличных от нуля уровней одной ветви рассматриваемой характеристики входного преобразователя

$$\mu_1 = 2^{\alpha_1} - 1 = \frac{g_{\max}}{\delta_1}, \quad (2.11)$$

где α_1 — число двоичных разрядов преобразователя (без учета знакового разряда), а $g_{\max}$ — максимальное значение задающего воздействия.

Линеаризация входного преобразователя означает, по сути дела, что из трех звеньев, изображенных на рис. 2.4, рассматривается только звено 1.

Аналогичные рассуждения можно произвести и для входного преобразователя управляемой величины. Его статическая характеристика изображена на рис. 2.3, б. Символом y обозначено непрерывное значение управляемой величины, а символом y_0 — ее цифровое представление. Единице младшего разряда на входе преобразователя соответствует величина δ_2 , имеющая физическую размерность управляемой величины.

Крутизна линеаризованной характеристики

$$k_2 = \frac{1}{\delta_2}. \quad (2.12)$$

Число отличных от нуля уровней характеристики на одной ее ветви, если α_2 — число двоичных разрядов преобразователя,

$$\mu_2 = 2^{\alpha_2} - 1 = \frac{y_{\max}}{\delta_2}, \quad (2.13)$$

где $y_{\max}$ — максимальное значение управляемой величины.

Обычно используют такие преобразователи, что $\delta_1 = \delta_2$ и $k_1 = k_2$. Однако это условие может и не выдерживаться, особенно в тех случаях, когда в системе имеется несколько задающих и управляемых величин.

Число разрядов входных преобразователей, как правило, довольно велико и может достигать 10 — 20. Так, например, если необходимо измерять угол поворота какой-либо оси с погрешностью, не превышающей $10''$, то единица младшего разряда должна быть выбрана из условия $\delta_1 \leq 20''$. Тогда для обеспечения измерения в пределах $\pm 180^\circ$ число разрядов в соответствии с (2.11) должно быть

$$\alpha_1 \geq \log_2 \left(\frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{20} + 1 \right) = 3,31 \lg 32\,401 = 14,2.$$

В тех случаях, когда задачей системы управления является обеспечение равенства $y = g$, принято, что $\delta_1 = \delta_2$, а входные преобразователи для задающего воздействия и управляемой величины могут быть условно объединены в один преобразователь, установленный в канале ошибки $e = g - y$. Характеристика такого преобразователя изображена на рис. 2.3, в. По оси абсцисс отложено непрерывное

значение ошибки e , а по оси ординат — ее цифровое представление e_0 . Характеристика справедлива для случая, когда $g = m\delta_1 = \text{const}$, где m — целое число, либо $y = m\delta_1 = \text{const}$. Первый случай обычно вводят в рассмотрение при исследовании свободного движения системы и при исследовании периодических режимов, вызванных квантованием по уровню (см. главу 6).

В общем случае зависимость $e_0 = f(e)$ определяет область расположения характеристик, что изображено на рис. 2.3, *г*. Характеристика, изображенная на рис. 2.3, *в* представляет, по сути, некоторую среднюю характеристику этой области, определенную для случая $g = m\delta_1$.

На рис. 2.3, *д* изображена статическая характеристика выходного преобразователя. По оси абсцисс отложена выходная величина цифровой вычислительной машины (рис. 1.3) в виде числа x_0 , а по оси ординат — величина x , представляющая собой выходную величину преобразователя кода в непрерывную величину совместно с экстраполятором. Обычно выходная величина представляет собой электрическое напряжение или ток. Единица младшего разряда выходной величины преобразователя обозначена δ , а единица младшего разряда входной величины равна безразмерной единице. Их отношение дает крутизну линеаризованной характеристики, т. е. $k = \delta$.

Если число двоичных разрядов выходного преобразователя α , то общее число отличных от нуля уровней одной ветви статической характеристики

$$\mu = 2^\alpha - 1 = \frac{x_{\max}}{\delta}, \quad (2.14)$$

где $x_{\max}$ — максимальное значение выходной величины.

Число разрядов выходного преобразователя обычно бывает меньше, чем число разрядов входного, так как он установлен в канале ошибки, и в пределе может быть равно единице. На рис. 2.5 в качестве примера изображены статические характеристики выходного преобразователя $x = f(x_0)$ для случая, когда максимальное значение выходной величины преобразователя $x_{\max}$ одно и то же, но число разрядов $\alpha = 1, 2, 3$.

Для выходного преобразователя может быть получена эквивалентная структурная схема, содержащая три звена, аналогичная изображенной на рис. 2.4.

Приведенные выше формулы (2.11), (2.13) и (2.14) справедливы для симметричных (двухтактных) характеристик. Однако не представляет труда записать их и для случая несимметричных характеристик, когда, например, $|g_{\min}| \neq g_{\max}$, $|y_{\min}| \neq y_{\max}$, $|x_{\min}| \neq x_{\max}$.

Если в цифровой вычислительной машине для установившегося режима получается прямая пропорциональность чисел на входе и выходе, т. е. $x_0 = k_0 e_0$, то машина может

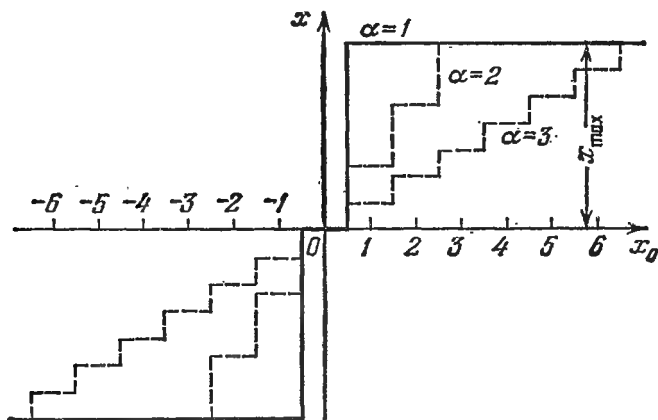


Рис. 2.5. Примеры статических характеристик выходного преобразователя.

рассматриваться как статическое звено с коэффициентом передачи k_0 . Наиболее вероятное значение $k_0 = 1$. Однако возможны случаи, когда $k_0 \neq 1$.

Общий линеаризованный коэффициент передачи машины совместно с входным и выходным преобразователями будет

$$k_{\text{ц}} = k_0 k_1 k_2 = k_0 \frac{\delta}{\delta_1}. \quad (2.15)$$

Для этого случая на рис. 2.3, е изображена результирующая статическая характеристика ЦВМ совместно с преобразователями при $k_0 = 1$ в относительном (цифровом) виде, т. е. $x_0 = f(e_0)$, где $x_0 = \delta^{-1} x$, а $e_0 = \delta_1^{-1} e$.

Цифровая машина может сводиться не к статическому, а к интегрирующему звену. Тогда ее линеаризованный коэффициент передачи будет связывать между собой в уста-

новившемся режиме входную величину и среднюю скорость изменения выходной величины (по линейному закону), т. е.

$$\left(\frac{dx_0}{dt}\right)_{\text{ср}} = \frac{k'_0}{T} e_0,$$

где k'_0 — безразмерный коэффициент. В этом случае линеаризованный коэффициент передачи ЦВМ совместно с преобразователями

$$k_{\text{ц}} = k'_0 k_1 k_2 = k'_0 \frac{\delta}{\delta_1}. \quad (2.16)$$

Линеаризованная цифровая система управления может рассматриваться как импульсная. При этом учитывается только явление квантования по времени, а влиянием квантования по уровню пренебрегается. Для исследования подобных систем используется аппарат исследования импульсных систем. Однако подобное исследование может использоваться только в качестве первого приближения. Предполагается, что в дальнейшем явление квантования по уровню и его влияние будут исследованы дополнительно.

§ 2.2. Математический аппарат

Линейной системой импульсного регулирования называется такая система, которая кроме звеньев, описываемых обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями, содержит импульсное звено (или звенья), преобразующее непрерывное входное воздействие в равноотстоящие друг от друга по времени импульсы. В общем случае импульсы могут отстоять друг от друга на различные интервалы времени.

Импульсная система может быть схематически представлена в виде соединения импульсного элемента и непрерывной части. Последовательность импульсов после прохождения через непрерывную часть вследствие сглаживающих свойств последней превращается в непрерывную величину на выходе.

Обычно схема импульсной системы такова, что сигнал ошибки, полученный в элементе сравнения, поступает затем на импульсный элемент ИЭ (рис. 2.6, а). Импульсное звено на этой схеме изображено условно в виде ключа, который замыкается с периодом T .

Ограничимся пока случаем, когда на выходе импульсного элемента импульсы отстоят друг от друга на одинаковые интервалы времени $T = \text{const}$ и отличаются друг от друга по амплитуде при одинаковой длительности $\gamma T = \text{const}$ (рис. 2.6, б). Этот случай соответствует так называемой *амплитудно-импульсной модуляции 1-го рода*.

Если время замыкания ключа мало по сравнению с периодом чередования T и постоянными времени непрерывной части и если сигнал на входе ключа в течение времени, когда он замкнут, практически постоянен, то

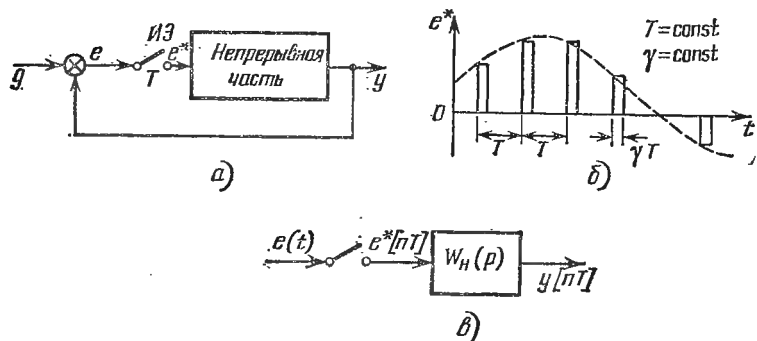


Рис. 2.6. Импульсная система.

последовательность конечных по продолжительности импульсов на выходе ключа можно заменить последовательностью дельта-функций. Величина каждой дельта-функции (точнее, интеграла от нее по времени) будет пропорциональной значению сигнала на входе ключа в момент его замыкания.

Поскольку ключ замыкается в определенные моменты времени ($0, T, 2T, 3T$ и т. д.), то сигнал на входе необходимо рассматривать именно в эти моменты времени. Хотя на выходе непрерывной части сигнал и непрерывен, будем рассматривать его только в отдельные дискретные моменты времени.

Непрерывную часть совместно с ключом на ее входе будем называть *импульсным фильтром* (рис. 2.6, в). Более строго импульсный фильтр следует определить как устройство, которое получает входные сигналы и одновременно

дает выходные сигналы лишь в определенные моменты времени, например T , $2T$, $3T$ и т. д. На входе непрерывной части с передаточной функцией $W_n(p)$ действует дискретная функция $e^*[nT]$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ и т. д.

В соответствии со сказанным эта функция может быть представлена в виде последовательности дельта-функций.

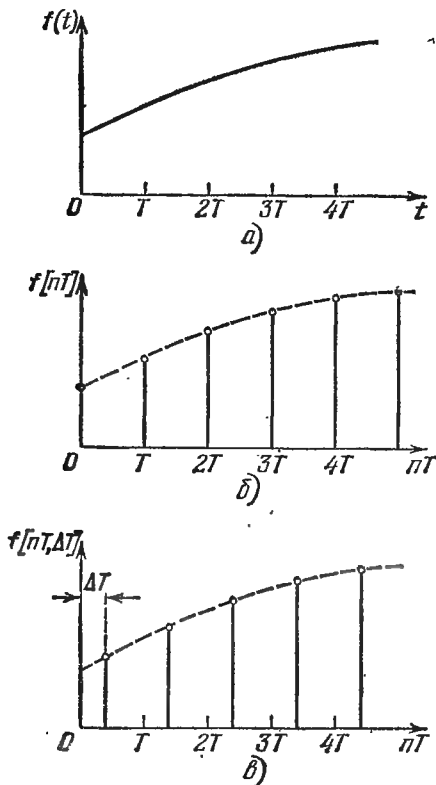
На выходе будет непрерывная функция, определяемая в эти же дискретные моменты времени: $y(t) = y[nT]$, где $n=0, \pm 1, \pm 2$ и т. д.

Решетчатые функции. Введем понятие *решетчатой функции* времени $f[nT]$, или, в сокращенной записи, $f[n]$, значения которой определены в дискретные моменты времени $t = nT$, где n — целое число, а T — период повторения. Операция замены непрерывной функции решетчатой

$$f[n] = f(t)|_{t=nT} \quad (2.17)$$

Рис. 2.7. Образование решетчатой функции.

показана на рис. 2.7. Изображенные на рис. 2.7, б ординаты представляют собой так называемые *дискреты* исходной непрерывной функции $f(t)$ при $t = nT$ (рис. 2.7, а). Дискреты $f(t)$ могут быть также определены для смещенных моментов времени $t = nT + \Delta T = (n + \varepsilon)T$. Смещение $\Delta T = \text{const}$ может быть положительной или отрицательной величиной при выполнении условия $|\Delta T| < T$. Относительное смещение $\varepsilon = \Delta T \cdot T^{-1}$ по модулю меньше единицы.



Образование смещенной решетчатой функции $f[nT, \Delta T]$, или, в сокращенной записи, $f[n, \varepsilon]$, из непрерывной функции $f(t)$ для случая $\Delta T > 0$ изображено на рис. 2.7, в.

В последующем изложении будем считать, что в решетчатой функции $f[n, \varepsilon]$ аргумент $n \geq 0$ и параметр $\varepsilon > 0$. В случае необходимости рассмотрения функции $f[n, \varepsilon_0]$ с отрицательным параметром $\varepsilon_0 < 0$ дискретное время можно представить в виде $[(n-1) + (1 + \varepsilon_0)]T = [(n-1) + \varepsilon]T$. Тогда решетчатая функция может быть записана в виде $f[(n-1), \varepsilon]$, где $\varepsilon = 1 + \varepsilon_0$.

Решетчатая функция не обязательно должна формироваться из некоторой исходной непрерывной. Любая числовая последовательность некоторой величины, определенная в дискретные равноотстоящие моменты времени, может быть представлена в виде решетчатой функции.

Обратная задача — формирование непрерывной функции из решетчатой — не может быть решена однозначно, так как функции, заданной в дискретные моменты времени, может соответствовать бесконечное множество непрерывных функций. Непрерывные функции, совпадающие с заданными дискретами, называются *огibaющими* решетчатой функции.

Аналогом первой производной непрерывной функции для решетчатой функции является либо первая прямая разность

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n], \quad (2.18)$$

либо первая обратная разность

$$\nabla f[n] = f[n] - f[n-1]. \quad (2.19)$$

Обе эти разности показаны на рис. 2.8. Разности могут быть определены и для смещенных решетчатых функций $f[n, \varepsilon]$. Однако формулы для $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon = 0$ здесь и далее оказываются идентичными, вследствие чего в дальнейшем изложении принято $\varepsilon = 0$.

Прямая разность определяется в момент времени $t = nT$ по будущему значению решетчатой функции при $t = (n+1)T$. Это можно сделать в тех случаях, когда будущее значение известно. Обратная разность определяется для момента времени $t = nT$ по прошлому значению решетчатой функции в момент времени $(n-1)T$.

Аналогом второй производной непрерывной функции для решетчатой функции служат вторые разности: прямая

$$\begin{aligned}\Delta^2 f[n] &= \Delta f[n+1] - \Delta f[n] = \\ &= f[n+2] - 2f[n+1] + f[n]\end{aligned}\quad (2.20)$$

и обратная

$$\begin{aligned}\nabla^2 f[n] &= \nabla f[n] - \nabla f[n-1] = \\ &= f[n] - 2f[n-1] + f[n-2].\end{aligned}\quad (2.21)$$

Приведенные выше замечания относительно возможности вычисления прямой и обратной разностей сохраняют свою силу и здесь.

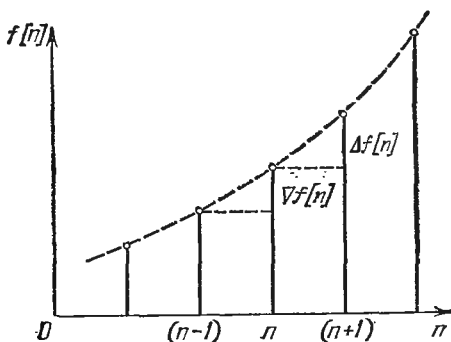


Рис. 2.8. Прямая и обратная разности.

Могут определяться и высшие прямая и обратная разности. Для вычисления k -й разности возможно использование рекуррентных соотношений

$$\left. \begin{aligned}\Delta^k f[n] &= \Delta^{k-1} f[n+1] - \Delta^{k-1} f[n], \\ \nabla^k f[n] &= \nabla^{k-1} f[n] - \nabla^{k-1} f[n-1]\end{aligned}\right\} \quad (2.22)$$

или формул общего вида

$$\left. \begin{aligned}\Delta^k f[n] &= \sum_{v=0}^k (-1)^v C_k^v f[n+k-v], \\ \nabla^k f[n] &= \sum_{v=0}^k (-1)^v C_k^v f[n-v],\end{aligned}\right\} \quad (2.23)$$

где биномиальные коэффициенты (число сочетаний)

$$C_k^v = \frac{k!}{v!(k-v)!}. \quad (2.24)$$

Обратные разности обладают важной особенностью. Если решетчатая функция определена только для положительных значений аргумента, т. е. $f[n] \equiv 0$ при $n < 0$, то, как следует из (2.23), в точке $n=0$ k -я разность

$$\nabla^k f[0] = f[0] \quad (2.25)$$

для любого целого положительного k .

Аналогами интеграла непрерывной функции в пределах от 0 до t для решетчатой функции являются неполная сумма

$$\sigma[n] = \sum_{m=0}^{n-1} f[m] = \sum_{v=1}^n f[n-v] \quad (2.26)$$

и полная сумма

$$\sigma_0[n] = \sigma[n] + f[n] = \sigma[n+1] = \sum_{m=0}^n f[m]. \quad (2.27)$$

Отличие (2.27) от (2.26) заключается в том, что значение $f[n]$ в момент времени $t=nT$ также участвует в формировании результата.

Разностные уравнения. В качестве аналогов дифференциальных уравнений можно рассматривать *разностные уравнения* (уравнения в конечных разностях). При использовании прямых разностей неоднородные линейные разностные уравнения имеют вид

$$b_0 \Delta^m y[n] + b_1 \Delta^{m-1} y[n] + \dots + b_m y[n] = f[n], \quad (2.28)$$

где $f[n]$ — заданная, а $y[n]$ — искомая решетчатые функции. При $f[n] \equiv 0$ уравнение (2.28) становится однородным разностным уравнением.

При использовании (2.23) разностное уравнение (2.28) можно записать в другом виде:

$$a_0 y[n+m] + a_1 y[n+m-1] + \dots + a_m y[n] = f[n]. \quad (2.29)$$

Коэффициенты этого уравнения определяются из зависимости

$$a_k = \sum_{v=0}^k (-1)^{k-v} b_v C_{m-v}^{k-v}, \quad (2.30)$$

где биномиальные коэффициенты

$$C_{m-v}^{k-v} = \frac{(m-v)!}{(k-v)! (m-k)!}. \quad (2.31)$$

При использовании обратных разностей уравнение в конечных разностях будет иметь вид

$$b_0 \nabla^m y[n] + b_1 \nabla^{m-1} y[n] + \dots + b_m y[n] = f[n]. \quad (2.32)$$

С учетом формулы (2.23) последнее выражение приобретает вид

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_m y[n-m] = f[n]. \quad (2.33)$$

Коэффициенты последнего уравнения определяются выражениями

$$a_{m-k} = \sum_{v=0}^k (-1)^{m-k} b_v C_{m-v}^{k-v}, \quad (2.34)$$

$$C_{m-v}^{k-v} = \frac{(m-v)!}{(k-v)! (m-k)!}. \quad (2.35)$$

Разностные уравнения можно рассматривать как рекуррентные соотношения, позволяющие вычислять значения $y[n+m]$ при $n=0, 1, 2, \dots$ для заданных начальных значений $y[0], y[1], \dots, y[m-1]$ и уравнения вида (2.29) или значения $y[n]$ при $n=0, 1, 2, \dots$ для заданных начальных значений $y[n-m], y[n-m+1], \dots, y[m-1]$ и уравнения вида (2.33). Такие вычисления легко выполняются на счетных машинах, а также не представляют никаких принципиальных трудностей и при ручном счете (кроме, конечно, затрат времени) даже и в случае, когда коэффициенты разностных уравнений a_i ($i=0, 1, \dots, m$) с течением времени изменяются. Это отличает разностные уравнения от их непрерывных аналогов — дифференциальных уравнений.

Общее решение однородного разностного уравнения при некрatных корнях характеристического уравнения может быть записано следующим образом:

$$y[n] = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n + \dots + C_m z_m^n, \quad (2.36)$$

где z_i ($i=1, 2, \dots, m$) — корни характеристического уравнения

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m = 0, \quad (2.37)$$

а C_i — произвольные постоянные. Из (2.36), в частности, вытекает условие того, чтобы свободное движение системы, описываемой разностным уравнением (2.29), было бы затухающим (условие устойчивости):

$$|z_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.38)$$

Для получения возможности исследования решений разностных уравнений в общем виде широко используется дискретное преобразование Лапласа, z -преобразование, ω -преобразование, а также частотные методы.

Дискретное преобразование Лапласа. Для решетчатых функций вводится понятие *дискретного преобразования Лапласа* в соответствии с формулой

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] e^{-pnT}. \quad (2.39)$$

Для смещенных решетчатых функций может быть записано аналогичное выражение:

$$F^*(p, \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n, \epsilon] e^{-pnT}. \quad (2.40)$$

Формулы (2.39) и (2.40) можно представить в символической записи:

$$F^*(p) = \mathcal{D} \{f[n]\}, \quad F^*(p, \epsilon) = \mathcal{D} \{f[n, \epsilon]\}. \quad (2.41)$$

В приведенных формулах, как и в случае непрерывного преобразования Лапласа, комплексная величина $p = c + j\omega$, где c — абсцисса абсолютной сходимости. Если $c < \infty$, то ряд, определяемый формулами (2.39) и (2.40), сходится и решетчатой функции соответствует некоторое изображение.

Как следует из выражений (2.39) и (2.40), изображение решетчатой функции является функцией величины e^{pT} . Для смещенных решетчатых функций в изображение будет входить, кроме того, параметр ϵ .

Использование z -преобразования. Для исследования импульсных систем большое распространение получило так называемое *z -преобразование*, которое связано с дискретным преобразованием Лапласа и вытекает из него. Применительно к z -преобразованию ниже будут

рассмотрены основные свойства и теоремы дискретного преобразования Лапласа.

Под z -преобразованием понимается изображение несмещенной или смещенной решетчатых функций, определяемое формулами

$$\left. \begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}, \\ F(z, \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} f[n, \varepsilon] z^{-n}. \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

В этих формулах введено новое обозначение $z = e^{pT}$. Из них следует, что z -преобразование практически совпадает с дискретным преобразованием Лапласа и отличается только аргументом изображения.

Таким образом, решетчатая функция времени (оригинал) заменяется ее изображением (z -преобразованием). Формулы преобразования (2.42) могут быть записаны в символической форме:

$$\left. \begin{aligned} F(z) &= \mathbb{Z} \{f[n]\}, \\ F(z, \varepsilon) &= \mathbb{Z} \{f[n, \varepsilon]\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

Формулы преобразования (2.43) могут быть записаны и для непрерывной производящей функции в виде

$$\left. \begin{aligned} F(z) &= \mathbb{Z} \{f(t)\}, \quad t = nT, \\ F(z, \varepsilon) &= \mathbb{Z}_\varepsilon \{f(t)\}, \quad t = (n + \varepsilon)T, \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$

Ряды (2.42) сходятся, и изображение решетчатой функции существует, если выполняется условие, сформулированное выше для дискретного преобразования Лапласа: $c < \infty$, где c — абсцисса абсолютной сходимости.

В таблице 2.1 приведены изображения некоторых решетчатых функций, а также производящих функций времени и их изображений Лапласа. В таблице введена единичная импульсная решетчатая функция

$$\delta_0[n] = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

Эта функция играет в дискретных системах такую же важную роль, как δ -функция (функция Дирака) в непрерывных системах.

Изображения решетчатых функций

Производящая непрерывная функция		Несмещенная решетчатая функция	z-преобразование	
оригинал	преобразование Лапласа		простое	смещенное
$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t=0 \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases}$	—	$\delta_0[n]$	1	0
$1(t) - 1(t-T)$	$\frac{1 - e^{-pT}}{p}$	$\nabla 1[n] =$ $= \Delta 1[n-1]$	1	1
$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$1[n]$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{p^2}$	nT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$Tz \left[\frac{\varepsilon}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} \right]$
$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{(nT)^2}{2!}$	$\frac{T^2 z (z+1)}{2! (z-1)^3}$	$\frac{T^2 z}{2!} \left[\frac{\varepsilon^2}{z-1} + \frac{2\varepsilon}{(z-1)^2} + \frac{z+1}{(z-1)^3} \right]$
$\frac{t^3}{3!}$	$\frac{1}{p^4}$	$\frac{(nT)^3}{3!}$	$\frac{T^3 z (z^2 + 4z + 1)}{3! (z-1)^4}$	$\frac{T^3 z}{3!} \left[\frac{\varepsilon^3}{z-1} + \frac{3\varepsilon^2}{(z-1)^2} + \right.$ $\left. + \frac{3\varepsilon(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{z^2 + 4z + 1}{(z-1)^4} \right]$
$\frac{t^k}{k!}$	$\frac{1}{p^{k+1}}$	$\frac{(nT)^k}{k!}$	$\frac{T^k z R_k(z)}{k! (z-1)^{k+1}}$	$\frac{T^k z}{k!} \sum_{v=0}^k C_k^v \frac{R_v(z)}{(z-1)^{v+1}} \varepsilon^{k-v}$

Производящая непрерывная функция		Несмещенная решетчатая функция	z-преобразование	
оригинал	преобразование Лапласа		простое	смещенное
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha nT} = d^n$	$\frac{z}{z-d}, d=e^{-\alpha T}$	$\frac{zd^{\varepsilon}}{z-d}, d=e^{-\alpha T}$
$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$1-e^{-\alpha nT}$	$\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{zd^{\varepsilon}}{z-d}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$nTe^{-\alpha nT}$	$\frac{zd}{(z-d)^2}$	$\frac{zd^{\varepsilon}\varepsilon}{z-d} + \frac{zd^{\varepsilon+1}}{(z-d)^2}$
$\frac{t^2}{2!} e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^3}$	$\frac{(nT)^2}{2!} e^{-\alpha nT}$	$\frac{z(z+d)d^2}{2!(z-d)^3}$	$\frac{zd^{\varepsilon}\varepsilon^2}{2!(z-d)} + \frac{zd^{\varepsilon+1}}{(z-d)^2} +$ $+ \frac{z(z+d)d^{\varepsilon+2}}{2!(z-d)^3}$
$\frac{t^k}{k!} e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^{k+1}}$	$\frac{(nT)^k}{k!} e^{-\alpha nT}$	$\frac{zR_k(d^{-1}z)d^k}{k!(z-d)^{k+1}}$	$\frac{z}{k!} \sum_{v=0}^k C_v^k \frac{R_v(d^{-1}z)d^{\varepsilon+v}k-v}{(z-d)^{v+1}}$
$\sin \pi \frac{t}{T}$	$\frac{\pi T^{-1}}{p^2 + \pi^2 T^{-2}}$	$\sin \pi n = 0$	0	$\frac{z \sin \pi \varepsilon}{z+1}$

Производящая непрерывная функция		Несмещенная решетчатая функция	z-преобразование	
оригинал	преобразование Лапласа		простое	смещенное
$\cos \pi \frac{t}{T}$	$\frac{p}{p^2 + \pi^2 T^{-2}}$	$\cos \pi n = (-1)^n$	$\frac{z}{z+1}$	$\frac{z \cos \pi \varepsilon}{z+1}$
$\sin \frac{\pi}{2} \frac{t}{T}$	$\frac{0,5\pi T^{-1}}{p^2 + 0,25\pi^2 T^{-2}}$	$\sin \frac{\pi}{2} n$	$\frac{z}{z^2+1}$	$\frac{z^2 \sin \frac{\pi}{2} \varepsilon + z \cos \frac{\pi}{2} \varepsilon}{z^2+1}$
$\cos \frac{\pi}{2} \frac{t}{T}$	$\frac{p}{p^2 + 0,25\pi^2 T^{-2}}$	$\cos \frac{\pi}{2} n$	$\frac{z^2}{z^2+1}$	$\frac{z^2 \cos \frac{\pi}{2} \varepsilon - z \sin \frac{\pi}{2} \varepsilon}{z^2+1}$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$	$\sin \beta nT$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z^2 \sin \varepsilon \beta T + z \sin (1-\varepsilon) \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	$\cos \beta nT$	$\frac{z^2 - z \cos \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z^2 \cos \varepsilon \beta T - z \cos (1-\varepsilon) \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha nT} \sin \beta nT$	$\frac{zd \sin \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$	$z d \varepsilon \cdot \frac{z \sin \varepsilon \beta T + d \sin (1-\varepsilon) \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$
$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha nT} \cos \beta nT$	$\frac{z^2 - zd \cos \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$	$z d \varepsilon \cdot \frac{z \cos \varepsilon \beta T - d \cos (1-\varepsilon) \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$

Для всех непрерывных и решетчатых функций, приведенных в таблице 2.1, предполагается, что они тождественно равны нулю при $t < 0$. В некоторых изображениях таблицы 2.1 использованы полиномы $R_k(z)$, которые могут быть представлены в виде определителя

$$R_k = k! \begin{vmatrix} 1 & 1-z & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 1-z & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{k!} & \frac{1}{(k-1)!} & \frac{1}{(k-2)!} & \dots & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.46)$$

Некоторые частные значения этого полинома

$$\left. \begin{aligned} R_0(z) &= 1, \\ R_1(z) &= 1, \\ R_2(z) &= z + 1, \\ R_3(z) &= z^2 + 4z + 1, \\ R_4(z) &= z^3 + 11z^2 + 11z + 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

Приведем основные правила и теоремы применительно к z -преобразованию. (Эти же правила и теоремы будут справедливыми и для дискретного преобразования Лапласа.) Рассмотрение проведем для несмещенных решетчатых функций, но полученные результаты можно распространить и на случай смещенных функций $f[n, \epsilon]$, кроме случаев, оговоренных особо.

1. Свойство линейности. Это свойство заключается в том, что изображение линейной комбинации решетчатых функций равно той же линейной комбинации их изображений. Пусть решетчатая функция определяется выражением

$$f[n] = \sum_{v=1}^N c_v f_v[n]. \quad (2.48)$$

Тогда для ее изображения можно записать

$$F(z) = \sum_{v=1}^N c_v F_v(z). \quad (2.49)$$

2. Теорема запаздывания и упреждения. Рассмотрим решетчатую функцию $f[n-m]$, сдвинутую вправо (запаздывающую) на целое число тактов m . Тогда из (2.42) следует, если обозначить $n-m=r$,

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}\{f[n-m]\} &= \sum_{r=-m}^{\infty} f[r] z^{-(m+r)} = \\ &= z^{-m} \left[\sum_{r=0}^{\infty} f[r] z^{-r} + \sum_{r=-m}^{-1} f[r] z^{-r} \right] = \\ &= z^{-m} \left[F(z) + \sum_{r=1}^m f[-r] z^r \right].\end{aligned}\quad (2.50)$$

Здесь $F(z)$ — изображение функции $f[n]$. Если исходная решетчатая функция $f[n]$ равна нулю при отрицательных значениях аргумента, то формула (2.50) упрощается:

$$\mathbb{Z}\{f[n-m]\} = z^{-m} F(z). \quad (2.51)$$

Если сдвиг функции $f[n]$ происходит влево (упреждение) и рассматривается функция $f[n+m]$, где m — целое положительное число, то, аналогично случаю запаздывания, можно показать, что

$$\mathbb{Z}\{f[n+m]\} = z^m \left[F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f[k] z^{-k} \right]. \quad (2.52)$$

Второе слагаемое в правой части (2.52) обращается в нуль, если $f[n] \equiv 0$ при $n=0, 1, \dots, m-1$.

При запаздывании на не целое число периодов $m+\xi$ приходится вводить смещенную решетчатую функцию. Пусть рассматривается функция $f[n+\varepsilon-m-\xi]$, где m — целая, а ξ — дробная часть запаздывания. Если смещение ε удовлетворяет условию $0 \leq \varepsilon < \xi$ и $f[n+\varepsilon-m-\xi] \equiv 0$ при $n+\varepsilon < m+\xi$, то можно показать, что

$$\mathbb{Z}_{\varepsilon}\{f[n+\varepsilon-m-\xi]\} = z^{-(1+m)} F(z, 1+\varepsilon-\xi). \quad (2.53)$$

Если $\xi \leq \varepsilon < 1$, то

$$\mathbb{Z}_{\varepsilon}\{f[n+\varepsilon-m-\xi]\} = z^{-m} F(z, \varepsilon-\xi). \quad (2.54)$$

При использовании таблицы 2.1 для нахождения изображений следует в этом случае вместо ε подставить

$1 + \varepsilon - \xi$ или $\varepsilon - \xi$ в соответствии с формулами (2.53) и (2.54).

3. Теорема об умножении оригинала на экспоненту (теорема смещения в области изображений). Умножим решетчатую функцию на экспоненту $e^{\lambda n T}$. Тогда из (2.42) следует:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{e^{\lambda n T} f[n]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda n T} f[n] z^{-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f[n] e^{(\lambda - d) n T} = F\left(\frac{z}{d}\right), \quad d = e^{\lambda T}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Для смещенной решетчатой функции аналогичная формула имеет вид

$$\mathcal{Z} \{e^{\lambda n T} f[n + \varepsilon]\} = d^{\varepsilon} F\left(\frac{z}{d}, \varepsilon\right). \quad (2.56)$$

4. Теорема об умножении оригинала на степенную функцию. Пусть решетчатой функции $f[n]$ соответствует изображение $F(z)$. Тогда можно показать, что

$$\mathcal{Z} \{(nT)^m f[n]\} = (-1)^m \left. \frac{d^m F(e^{pT})}{dp^m} \right|_{e^{pT}=z}. \quad (2.57)$$

Для смещенной решетчатой функции аналогичная зависимость имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{(n + \varepsilon)^m T^m f[n, \varepsilon]\} &= \\ &= \sum_{v=0}^m (-1)^v C_m^v (\varepsilon T)^{m-v} \left. \frac{d^v F(e^{pT}, \varepsilon)}{dp^v} \right|_{e^{pT}=z}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

5. Изображение разностей. Для первой прямой разности на основании (2.52)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{\Delta f[n]\} &= \mathcal{Z} \{f[n+1] - f[n]\} = z[F(z) - f[0]] - F(z) = \\ &= (z-1)F(z) - zf[0]. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Если k — целое число, то аналогичным образом

$$\mathcal{Z} \{\Delta^k f[n]\} = (z-1)^k F(z) - z \sum_{v=0}^{k-1} (z-1)^{k-1-v} \Delta^v f[0], \quad (2.60)$$

причем $\Delta^0 f[0] = f[0]$.

Если решетчатая функция $f[n]$ равна нулю в первых точках оси времени, т. е. $f[0]=f[1]=\dots=f[k-1]=0$, то формула (2.60) упрощается:

$$\mathbb{Z}\{\Delta^k f[n]\} = (z-1)^k F(z). \quad (2.61)$$

Для первой обратной разности можно аналогичным образом найти

$$\mathbb{Z}\{\nabla f[n]\} = \mathbb{Z}\{f[n] - f[n-1]\} = \frac{z-1}{z} F(z) + z^{-1}f[-1]. \quad (2.62)$$

Если для отрицательных аргументов решетчатая функция тождественно равна нулю, то формула (2.62) упрощается:

$$\mathbb{Z}\{\nabla f[n]\} = \frac{z-1}{z} F(z). \quad (2.63)$$

Для k -й обратной разности при $f[n] \equiv 0$ для $n < 0$

$$\mathbb{Z}\{\nabla^k f[n]\} = \left(\frac{z-1}{z}\right)^k F(z). \quad (2.64)$$

Полученные формулы изображений прямых и обратных разностей формально напоминают формулы для нахождения изображений производных непрерывных функций. Формула (2.64) аналогична случаю изображения производной k -го порядка непрерывной функции по начальным условиям слева при их нулевых значениях. Заметим, что при $T \rightarrow 0$ (непрерывный случай) множитель в правой части стремится к пределу:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{z-1}{z}\right)^k = \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{e^{pT}-1}{e^{pT}}\right)^k = p^k T^k. \quad (2.65)$$

К этому же пределу стремится множитель $(z-1)^k$ в (2.61). Это также иллюстрирует сходство формул изображений производных и разностей.

6. Изображение сумм. Рассмотрим вначале неполную сумму (2.26):

$$\sigma[n] = \sum_{m=0}^{n-1} f[m].$$

Составим первую прямую разность этой суммы

$$\Delta\sigma[n] = \sigma[n+1] - \sigma[n] = f[n]$$

и возьмем z -преобразование от правой и левой частей

$$\mathcal{Z}\{\Delta\sigma[n]\} = \mathcal{Z}\{f[n]\}.$$

На основании (2.61) имеем, учитывая, что $\sigma[0] = 0$,

$$(z-1)\mathcal{Z}\{\sigma[n]\} = F(z).$$

Отсюда можно найти изображение неполной суммы

$$\mathcal{Z}\{\sigma[n]\} = \frac{F(z)}{z-1}. \quad (2.66)$$

Распространяя эту зависимость на случай k -кратного суммирования, можно записать

$$\mathcal{Z}\{\sigma^k[n]\} = \frac{F(z)}{(z-1)^k}. \quad (2.67)$$

Для полной суммы (2.27) аналогичным образом можно найти первую обратную разность

$$\nabla\sigma_0[n] = \sigma_0[n] - \sigma_0[n-1] = f[n]$$

и ее изображение из (2.63)

$$\mathcal{Z}\{\nabla\sigma_0[n]\} = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\{\sigma_0[n]\} = F(z).$$

Отсюда изображение полной суммы

$$\mathcal{Z}\{\sigma_0[n]\} = \frac{z}{z-1}F(z). \quad (2.68)$$

Для случая k -кратного суммирования

$$\mathcal{Z}\{\sigma_0^k[n]\} = \left(\frac{z}{z-1}\right)^k F(z). \quad (2.69)$$

Из приведенного рассмотрения вытекает справедливость равенства

$$\Delta\sigma[n] = \nabla\sigma_0[n] = f[n]. \quad (2.70)$$

Таким образом, взятие прямой разности и взятие неполной суммы (или обратной разности и полной суммы) решетчатой функции являются обратными операциями. Роль оператора, аналогичного оператору $p = c + j\omega$ в непрерывных системах, в первом случае играет оператор $(z-1)$, а во втором случае — оператор $(z-1)z^{-1}$. В случае перехода к пределу при $T \rightarrow 0$ обе пары операций над решетчатыми функциями сливаются и превращаются в операции дифференцирования и интегрирования непрерывных функций.

7. Изображения решетчатых функций с измененным периодом следования. Пусть рассматривается решетчатая функция с периодом следования дискрет λT , где $\lambda \neq 1$. Тогда на основании (2.42) можно записать

$$\mathbb{Z} \{f[\lambda n T]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[\lambda n T] z^{-\lambda n} = F_{\lambda}(z^{\lambda}, \lambda T). \quad (2.71)$$

Из (2.71) следует, что при изменении периода в λ раз необходимо в изображении решетчатой функции $f[n]$ заменить z на z^{λ} и T на λT . Так, например, если рассматривается решетчатая функция $e^{-\alpha n T}$, то при введении периода λT в соответствии с таблицей 2.1 изображение будет

$$\begin{aligned} F_{\lambda}(z^{\lambda}, \lambda T) &= \mathbb{Z} \{e^{-\alpha n \lambda T}\} = \\ &= \frac{z^{\lambda}}{z^{\lambda} - d^{\lambda}} = \frac{z_1}{z_1 - d_1}, \end{aligned}$$

где $z_1 = z^{\lambda}$ и $d_1 = d^{\lambda}$. На рис. 2.9 построены для этого случая решетчатые функции с исходным периодом следования T (рис. 2.9, а), растянутым периодом при $\lambda > 1$ (рис. 2.9, б) и сжатым периодом при $\lambda < 1$ (рис. 2.9, в).

8. Сумма ординат решетчатой функции. Если абсцисса абсолютной сходимости решетчатой функции отрицательна ($c < 0$), то, положив в (2.42) $p = 0$, имеем

$$\left. \begin{aligned} F(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n], \\ F(1, \varepsilon) &= I_1(\varepsilon) = \lim_{z \rightarrow 1} F(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n, \varepsilon]. \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

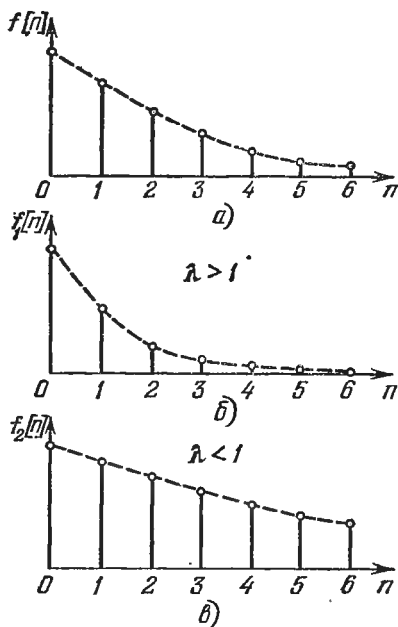


Рис. 2.9. Изменение периода решетчатой функции.

9. Конечное значение решетчатой функции. Составим первую прямую разность решетчатой функции $f[n]$ и на основании (2.49) найдем ее изображение

$$\mathcal{Z}\{\Delta f[n]\} = (z-1)F(z) - zf[0].$$

Далее на основании (2.72) найдем сумму ординат $\Delta f[n]$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta f[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) - f[0].$$

Кроме того, можно записать

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta f[n] = \sum_{n=0}^{\infty} (f[n+1] - f[n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} f[n] - f[0].$$

Из двух последних выражений следует:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z). \quad (2.73)$$

Если провести аналогичное рассмотрение с первой обратной разностью, то можно получить формулу для вычисления конечного значения решетчатой функции в другом виде:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f[n] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z). \quad (2.74)$$

10. Начальное значение решетчатой функции. Составим первую прямую разность

$$\Delta f[n-1] = f[n] - f[n-1]$$

и на основании (2.50) найдем ее изображение

$$\mathcal{Z}\{\Delta f[n-1]\} = (1-z^{-1})F(z) - f[0].$$

Рассмотрим теперь предел выражения

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{Z}\{\Delta f[n-1]\} = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta f[n-1] z^{-n} = 0.$$

Тогда из последних двух формул можно найти

$$f[0] = \lim_{n \rightarrow 0} f[n] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} F(z). \quad (2.75)$$

Зависимости (2.74) и (2.75) представляют собой аналогии соответствующих выражений для нахождения конеч-

ного и начального значений непрерывной функции $f(t)$ по ее изображению Лапласа:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF_{\text{Л}}(p),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF_{\text{Л}}(p).$$

11. Свертка решетчатых функций. Если

$$\mathbb{Z} \{f_1[n]\} = F_1(z), \quad \mathbb{Z} \{f_2[n]\} = F_2(z),$$

то можно показать, что

$$F_1(z) F_2(z) = \mathbb{Z} \left\{ \sum_{v=0}^n f_1[v] f_2[n-v] \right\} = \mathbb{Z} \left\{ \sum_{v=0}^n f_1[n-v] f_2[v] \right\}. \quad (2.76)$$

Эта формула аналогична соответствующему выражению для свертки двух непрерывных функций.

12. Формула обращения. Рассмотрим задачу нахождения решетчатой функции (оригинала) по ее изображению. Эту операцию запишем в символическом виде как обратное z -преобразование:

$$f[n] = \mathbb{Z}^{-1} \{F(z)\}, \quad f[n, \varepsilon] = \mathbb{Z}_{\varepsilon}^{-1} \{F(z, \varepsilon)\}. \quad (2.77)$$

Заметим, что аргумент изображения обладает свойством

$$z = e^{pT} = e^{pT + j2\pi k}, \quad (2.78)$$

где k — произвольное целое число. Вследствие этого изображения $F(z)$ и $F(z, \varepsilon)$ представляют собой периодические функции относительно мнимой части аргумента $p = \gamma + j\omega$ с периодом $2\pi T^{-1}$, что дает основание рассматривать изображения только внутри интервала изменения $0 \leq \omega < 2\pi T^{-1}$.

Удобнее использовать интервал $-\pi T^{-1} < \omega \leq \pi T^{-1}$, так как он оказывается аналогичным интервалу частот $-\infty < \omega < \infty$, рассматриваемому обычно для непрерывных функций времени. Принятый интервал дает на комплексной плоскости $p = \gamma + j\omega$ область (рис. 2.10), в которой достаточно рассматривать изображение $F(z) = F(e^{pT})$.

Изображение $F(z)$ может иметь в этой области особые точки типа полюсов $-p_i$ (где $i = 1, 2, \dots, k$). Полюсы

могут быть или вещественными, или комплексно-сопряженными. В случае $p_{1,2} = \gamma_1 \pm j\pi T^{-1}$ достаточно рассматривать один из этих полюсов, соответствующий, например, положительной мнимой части (на верхней границе области).

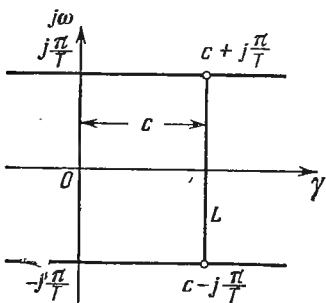


Рис. 2.10. Область интегрирования.

Рассмотрим выражение (2.42)

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^n = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] e^{-pnT}.$$

Умножим левую и правую его части на e^{mpT} , где m — целое число, и проинтегрируем его вдоль линии L (рис. 2.10) в пределах от $p_1 = c - j\pi T^{-1}$ до $p_2 = c + j\pi T^{-1}$, где c — произвольная величина, большая, чем абсцисса абсолютной сходимости:

$$\begin{aligned} \int_{p_1}^{p_2} F(e^{pT}) e^{mpT} dp &= \int_{p_1}^{p_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} f[n] e^{-pnT} \right] e^{mpT} dp = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f[n] \int_{p_1}^{p_2} e^{-pT(n-m)} dp. \end{aligned} \quad (2.79)$$

При этом все полюсы $F(e^{pT})$ будут лежать в рассматриваемой области на комплексной плоскости левее линии интегрирования L . Это и дает право изменить в (2.79) порядок операций интегрирования и суммирования.

Если $n \neq m$, то

$$\begin{aligned} \int_{p_1}^{p_2} e^{-pT(n-m)} dp &= -\frac{e^{-pT(n-m)}}{(n-m)T} \Big|_{p_1}^{p_2} = \\ &= \frac{e^{-cT(n-m)}}{(n-m)T} [e^{j\pi(n-m)} - e^{-j\pi(n-m)}] = 0. \end{aligned}$$

Если $n = m$, то

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = (c + j\pi T^{-1}) - (c - j\pi T^{-1}) = j2\pi T^{-1}.$$

Вследствие этого (2.79) можно представить в виде

$$\int_{p_1}^{p_2} F(e^{pT}) e^{pmT} dp = j2\pi T^{-1} f[m].$$

Заменяя m на n , получим окончательно формулу обращения

$$f[n] = \frac{T}{j2\pi} \int_{c-j\pi T^{-1}}^{c+j\pi T^{-1}} F(e^{pT}) e^{pnT} dp. \quad (2.80)$$

Так как $z = e^{pT}$ и $dz = Tz dp$, то формула (2.80) может быть представлена в другом виде:

$$f[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint F(z) z^{n-1} dz = \sum_{v=1}^l \text{Res}_v F(z) z^{n-1}. \quad (2.81)$$

Интегрирование ведется по окружности с центром в начале координат и радиусом $R > |z_v|_{\max}$, где $v = 1, 2, \dots, l$, а z_v — полюсы функции $F(z)$.

В случае простых полюсов значение интегрального вычета в точке $z = z_v$ может быть определено из выражения

$$\text{Res}_v F(z) z^{n-1} = \lim_{z \rightarrow z_v} (z - z_v) F(z) z^{n-1}. \quad (2.82)$$

В случае полюса кратности r значение интегрального вычета в точке $z = z_v$ определяется выражением

$$\text{Res}_v F(z) z^{n-1} = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \rightarrow z_v} \frac{d^{(r-1)}}{dz^{(r-1)}} [F(z) (z - z_v)^r z^{n-1}]. \quad (2.83)$$

Если функция $F(z)$ имеет нулевой полюс кратности r , то для функции $F(z) z^{n-1}$ при $n=0$ полюс будет иметь кратность $r+1$. В этом случае значение интегрального вычета в точке $z=0$ будет

$$\begin{aligned} \text{Res}_v F(z) z^{n-1} = \\ = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{r!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^r}{dz^r} [F(z) z^{r+1}], & n=0, \\ \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{(r-1)}}{dz^{(r-1)}} [F(z) z^{n+r-1}], & n>0. \end{array} \right\} \quad (2.84) \end{aligned}$$

Аналогичные формулы обращения имеют место и для смещенной решетчатой функции:

$$f[n, \varepsilon] = \frac{T}{j2\pi} \int_{c-j\pi T^{-1}}^{c+j\pi T^{-1}} F(e^{pT}, \varepsilon) e^{pnT} dp, \quad (2.85)$$

$$f[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint F(z, \varepsilon) z^{n-1} dz = \sum_{v=1}^l \text{Res}_v F(z, \varepsilon) z^{n-1}. \quad (2.86)$$

Полученные выражения (2.80), (2.81), (2.85) и (2.86) несколько сложны для практического использования. Поэтому для нахождения решетчатой функции по ее изображению обычно применяются другие методы, которые даны ниже.

13. Формулы разложения. Если изображение представляет собой простейшую табличную форму (см., например, таблицу 2.1), то переход к оригиналу не представляет трудностей. Сложная дробно-рациональная форма может быть представлена в виде суммы дробей первой степени. Рассмотрим некоторые употребительные разновидности формулы разложения.

а) Пусть изображение $F(z)$ представляет собой отношение двух многочленов:

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{zA_0(z)}{B(z)},$$

причем будем предполагать, что степень числителя не выше, чем степень знаменателя, а корни знаменателя простые. Тогда изображение можно представить в виде суммы

$$F(z) = \frac{zA_0(z)}{B(z)} = \sum_{v=1}^l \frac{A_0(z_v)}{\dot{B}(z_v)} \frac{z}{z - z_v}, \quad (2.87)$$

где $\dot{B}(z)$ — производная $B(z)$ по z , а z_v ($v = 1, 2, \dots, l$) — корни знаменателя. Элементарному слагаемому $z(z - z_v)^{-1}$ соответствует оригинал $e^{-\alpha_v nT} = z_v^n$, где $\alpha_v = T^{-1} \ln z_v^{-1}$ (см. таблицу 2.1). В таблице 2.1 единственный корень дроби первой степени обозначен $z_1 = d$.

Поэтому оригинал (2.87) можно записать следующим образом:

$$f[n] = \sum_{v=1}^l \frac{A_0(z_v)}{B(z_v)} \cdot z_v^n. \quad (2.88)$$

б) Пусть изображение $F(z)$ не имеет нулевого корня числителя, но степень числителя $A(z)$ меньше степени знаменателя. Тогда, как следует из (2.75), начальное значение решетчатой функции $f[0] = 0$. Числитель и знаменатель $F(z)$ можно умножить на z . Тогда, если корни знаменателя $F(z)$ простые, имеем

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{1}{z} \sum_{v=1}^l \frac{A(z)}{B(z)} \frac{z}{z - z_v}. \quad (2.89)$$

Множитель z^{-1} перед суммой в (2.89) означает запаздывание на один такт. Следовательно, чтобы получить исходную решетчатую функцию, следует в правой части (2.88) сделать сдвиг на один такт вправо, для чего нужно заменить n на $n-1$. В результате имеем

$$f[n] = \sum_{v=1}^l \frac{A(z_v)}{B(z_v)} z_v^{n-1}, \quad (2.90)$$

причем последнее выражение будет справедливым только для $n \geq 1$.

в) Пусть изображение $F(z)$ не имеет нулевого корня числителя $A(z)$, причем степень $A(z)$ равна степени знаменателя $B(z)$. Тогда следует понизить степень числителя, поделив его на знаменатель, и представить $F(z)$ в виде суммы составляющей нулевого порядка и дробно-рационального остатка $F_0(z)$. В соответствии с (2.42) первая составляющая равна начальному значению решетчатой функции $f[n]$. Поэтому

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = f[0] + F_0(z) = f[0] + \frac{A_0(z)}{B(z)}.$$

Переход от второй составляющей изображения к оригиналу может быть сделан по формуле (2.90), которая справедлива для $n \geq 1$.

г) Если изображение $F(z)$ можно представить в виде некоторой дробно-рациональной функции $F_0(z)$, умножен-

ной на изображение единичной ступенчатой решетчатой функции $1[n]$, которое равно $z(z-1)^{-1}$, т. е.

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{z}{z-1} F_0(z) = \frac{z}{z-1} \frac{A_0(z)}{B_0(z)},$$

то можно показать, что формула разложения приобретает вид

$$f[n] = \frac{A_0(1)}{B_0(1)} - \sum_{v=1}^l \frac{A_0(z_v)}{(1-z_v) B_0(z_v)} z_v^n. \quad (2.91)$$

Последнее выражение представляет собой аналог известной формулы разложения Хевисайда, полученной им для непрерывных систем.

д) Пусть изображение $F(z)$ имеет нулевой полюс кратности r и простые остальные полюсы

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{z^r B_0(z)},$$

причем степень числителя $A(z)$ меньше степени полинома $B_0(z)$. Тогда на основании (2.84) и (2.90) можно найти оригинал в виде

$$f[n] = \begin{cases} 0, & \text{если } n < r+1, \\ \sum_{v=1}^l \frac{A(z_v)}{B_0(z_v)} z_v^{n-r}, & \text{если } n \geq r+1. \end{cases} \quad (2.92)$$

При равенстве степеней числителя и полинома $B_0(z)$ следует выделить делением $A(z)$ на $B_0(z)$ нулевую составляющую и остаток, после чего представить изображение в виде

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{z^r B_0(z)} = \frac{1}{z^r} \left[f[r] + \frac{A_0(z)}{B_0(z)} \right].$$

Здесь $f[r]$ — значение оригинала в момент $n=r$. Далее можно воспользоваться формулой (2.92), заменив в ней $A(z)$ на $A_0(z)$.

е) Пусть изображение $F(z)$ имеет полюс z_l кратности r , а все остальные полюсы простые:

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{(z-z_l)^r \cdot B_0(z)},$$

причем степень числителя меньше степени знаменателя. Тогда в соответствии с (2.83) и (2.90) оригинал будет

$$f[n] = \sum_{v=1}^{l-r} \frac{A(z_v)}{B(z_v)} \cdot z_v^{n-1} + \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \rightarrow z_l} \frac{d^{(r-1)}}{dz^{(r-1)}} \left[\frac{A(z) z^{n-1}}{B_0(z)} \right]. \quad (2.93)$$

Эта формула справедлива для $n \geq 1$. При $n=0$ значение оригинала $f[n]=0$.

Для случая двойного корня ($r=2$) формула (2.93) приобретает вид

$$f[n] = \sum_{v=1}^{l-2} \frac{A(z_v)}{B(z_v)} z_v^{n-1} + \lim_{z \rightarrow z_l} \frac{d}{dz} \left[\frac{A(z) z^{n-1}}{B_0(z)} \right]. \quad (2.94)$$

Так, например, если

$$F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2},$$

то

$$f[n] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} [Tz^n] = nT,$$

что совпадает с таблицей 2.1.

В случае, когда степень числителя $F(z)$ равна степени знаменателя, следует, аналогично изложенному выше, выделить член нулевого порядка $f[0]$ делением числителя на знаменатель и рассматривать далее остаток от деления.

14. Разложение в ряд Лорана. Из основного выражения для нахождения z -преобразования (2.42) следует:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n} = f[0] + f[1] z^{-1} + \dots + f[k] z^{-k} + \dots$$

Разложив любым способом изображение $F(z)$ в ряд Лорана (ряд по убывающим степеням z):

$$F(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_k z^{-k} + \dots,$$

и сравнивая два ряда между собой, можно установить, что $c_0 = f[0]$, $c_1 = f[1]$, $c_2 = f[2]$, ..., $c_k = f[k]$ и т. д.

Разложение в ряд можно делать любым способом, так как такое разложение единственно. Наиболее удобным

приемом для дробно-рациональных функций является деление числителя на знаменатель.

Применяя разложение в ряд Лорана, можно вычислить значения оригинала $f[n]$ или $f[n, \varepsilon]$ в дискретных точках без нахождения полюсов изображения $F(z)$.

15. Решение разностных уравнений. Пусть имеется разностное уравнение в форме (2.29)

$$a_0 y[n+m] + a_1 y[n+m-1] + \dots + a_m y[n] = f[n],$$

с начальными условиями $y[v] = y_v$ ($v = 0, 1, \dots, m-1$). Найдем z -преобразование от его левой и правой частей. В соответствии с формулой (2.52) для случая упреждения на m тактов

$$\mathcal{Z}\{y[n+m]\} = z^m \left[Y(z) - \sum_{k=0}^{m-1} y[k] z^{-k} \right].$$

Аналогичные зависимости могут быть записаны для упреждения на $(m-1)$, $(m-2)$, ..., 1 тактов. Поэтому при переходе в рассматриваемом разностном уравнении к изображениям можно получить

$$\begin{aligned} (a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m) Y(z) &= \\ &= F(z) + (a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1}) y_0 + \\ &+ (a_0 z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \dots + a_{m-2}) y_1 + \dots + a_0 z y_{m-1} = \\ &= F(z) + Y_0(z). \end{aligned} \quad (2.95)$$

В правой части (2.95), кроме изображения $F(z)$ решетчатой функции $f[n]$, находятся члены, определяемые начальными условиями. Сумма их обозначения $Y_0(z)$.

Из (2.95) можно найти изображение $Y(z)$ искомой решетчатой функции

$$Y(z) = \frac{F(z)}{A(z)} + \frac{Y_0(z)}{A(z)}, \quad (2.96)$$

где $A(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m$. Далее можно использовать изложенные выше приемы перехода к искомому оригиналу $y[n]$.

Для решения рассматриваемого разностного уравнения необходимо, как следует из изложенного, знать начальные условия $y[v] = y_v$ ($v = 0, 1, \dots, m-1$). Последние же зависят от вида действующей в правой части разностного уравнения решетчатой функции.

Более удобны для решения разностные уравнения вида (2.33)

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_m y[n-m] = f[n]$$

с начальными условиями $y[-v] = y_v$ ($v = 1, 2, \dots, m$).

Изображение решетчатой функции $y[n-m]$, запаздывающей на m тактов, в соответствии с (2.50) будет

$$\mathcal{Z}\{y[n-m]\} = z^{-m} \left[Y(z) + \sum_{r=1}^m y[-r] z^r \right].$$

Подобные зависимости могут быть записаны для запаздывания на $(m-1)$, $(m-2)$, ..., 1 тактов.

При переходе в рассматриваемом разностном уравнении к изображениям могут быть получены выражения, аналогичные (2.95) и (2.96). Переход к искомой решетчатой функции $y[n]$ осуществляется в соответствии с изложенными выше приемами.

Особый интерес представляет случай, когда до момента времени $n=0$ искомая решетчатая функция тождественно равна нулю. Это эквивалентно случаю нулевых начальных условий слева (при $t=-0$) при решении дифференциальных уравнений для непрерывных функций. Тогда в выражении для изображения (2.96) пропадает член в правой части, определяемый начальными условиями, и оно приобретает вид

$$Y(z) = \frac{F(z)}{A(z)}. \quad (2.97)$$

Рассмотрим разностное уравнение вида (2.33), но записанное в более общем виде:

$$\begin{aligned} a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_m y[n-m] = \\ = b_0 f[n] + b_1 f[n-1] + \dots + b_l f[n-l]. \end{aligned} \quad (2.98)$$

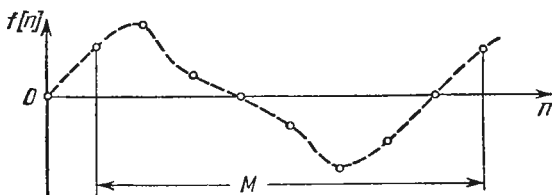
Если ввести предположение, что решетчатая функция $y[n]$ тождественно равна нулю при $n < 0$ и, кроме того, функция $f[n]$ в правой части (2.98) прикладывается в момент времени $n=0$, то переход к изображениям дает

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}) Y(z) = \\ = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_l z^{-l}) F(z). \end{aligned} \quad (2.99)$$

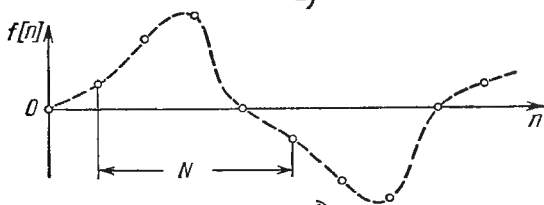
Изображение искомой решетчатой функции можно представить в виде

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_l z^{-l}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} F(z) = \\ = \frac{B(z)}{A(z)} F(z) = W(z) F(z). \quad (2.100)$$

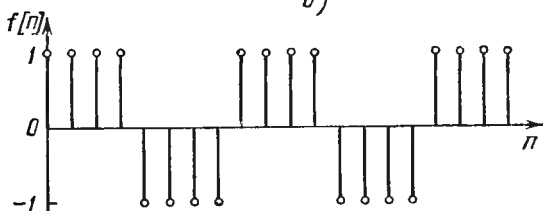
Здесь введена *дискретная передаточная функция* $W(z)$, которая, как и в случае непрерывных функций, есть



а)



б)



в)

Рис. 2.11. Периодические функции.

отношение двух изображений (выходной и входной величин) при нулевых начальных условиях. Дискретная передаточная функция играет такую же роль в импульсных и цифровых системах, как и обычная передаточная функция в непрерывных системах. Получение этой функции будет подробно рассмотрено ниже.

16. Периодические решетчатые функции и их изображения. Введем в рассмотрение периодическую решетчатую функцию

$$f[n + kM] = f[n], \quad (2.101)$$

где k и M — целые числа, причем M представляет собой относительный период (рис. 2.11, а). Первая гармоника имеет относительную угловую частоту $\bar{\omega}_1 = \omega_1 T = 2\pi M^{-1}$. Функция (2.101) может быть точно представлена в виде суммы конечного числа гармоник с частотами, кратными $\bar{\omega}_1$:

$$f[n] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos k\bar{\omega}_1 n + b_k \sin k\bar{\omega}_1 n). \quad (2.102)$$

Число гармоник равно целой части $0,5M$. Ряд (2.102) может быть представлен в комплексной форме:

$$f[n] = \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N \dot{c}_k e^{jk\bar{\omega}_1 n}, \quad (2.103)$$

где

$$\dot{c}_k = c_k e^{j\varphi_k} = \begin{cases} a_k - jb_k, & k > 0, \\ a_0, & k = 0, \\ a_k + jb_k, & k < 0. \end{cases} \quad (2.104)$$

Для $M = 2N$ при $k = N$

$$\dot{c}_N = \begin{cases} a_N, & N > 0, \\ a_N, & N < 0. \end{cases}$$

Комплексные амплитуды могут находиться из формул: при $M = 2N + 1$

$$\dot{c}_r = \frac{2}{2N+1} \sum_{n=0}^{2N} f[n] e^{-jr\bar{\omega}_1 n};$$

при $M = 2N$

$$\dot{c}_r = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} f[n] e^{-jr\bar{\omega}_1 n}.$$

Для $r=N$ при $M=2N+1$

$$\dot{c}_N = \frac{2}{2N+1} \sum_{n=0}^{2N} f[n] e^{-jN\bar{\omega}_1 n}$$

и при $M=2N$

$$\dot{c}_N = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{2N-1} f[n] e^{-j\pi n}.$$

Для симметричной периодической функции (рис. 2.11, б), т. е. при выполнении условий $M=2N$ и $f[n] = -f[n+N]$, формула для комплексной амплитуды принимает вид

$$\dot{c}_r = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-jr\bar{\omega}_1 n} [1 - (-1)^r]. \quad (2.105)$$

Из последнего выражения следует, что $\dot{c}_r = 0$ при четном r , т. е. четные гармоники отсутствуют. При r нечетном

$$\dot{c}_r = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-jr\bar{\omega}_1 n}, r < N.$$

Если N нечетно, то при $r=N$

$$\dot{c}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j\pi n}.$$

Так как здесь присутствуют только нечетные гармоники, то тригонометрический ряд может быть записан в вещественной форме:

$$f[n] = \frac{1}{2} \sum_{k=-N_1}^{N_1} \dot{c}_k e^{jk\bar{\omega}_1 n} = \sum_{k=1}^{N_1} c_k \cos(k\bar{\omega}_1 n + \varphi_k), \quad (2.106)$$

где $N_1 = N-1$ для четных N и $N_1 = N$ для нечетных N .

Для нахождения изображения периодической решетчатой функции (2.101) применим теорему сдвига (2.52):

$$F(z) = z^M \left[F(z) - \sum_{r=0}^{M-1} f[r] z^{-r} \right].$$

Отсюда следует:

$$F(z) = \frac{z^M}{z^M - 1} \sum_{r=0}^{M-1} f[r] z^{-r} = \frac{zA(z)}{z^M - 1}. \quad (2.107)$$

Сумма в правой части (2.107) представляет собой изображение решетчатой функции на интервале $0 - M$.

Для симметричной функции $f[n] = -f[n+N]$ аналогичным образом можно получить

$$F(z) = \frac{z^N}{z^N + 1} \sum_{r=0}^{N-1} f[r] z^{-r} = \frac{zB(z)}{z^N + 1}. \quad (2.108)$$

Найдем, например, изображение симметричной периодической решетчатой функции, показанной на рис. 2.11, в,

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z^4}{z^4 + 1} \sum_{r=0}^3 z^{-r} = \frac{z^4}{z^4 + 1} (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}) = \\ &= \frac{z(z^8 + z^2 + z + 1)}{z^4 + 1}. \end{aligned}$$

Симметричная периодическая функция (2.108) всегда является центрированной, и для нее сумма ординат за период

$$\sum_{r=0}^{2N-1} f[r] = 0.$$

Это не относится к несимметричной периодической функции (2.107), для которой сумма ординат за период может быть отличной от нуля, если эта функция содержит некоторую постоянную составляющую,

$$f_c = \frac{1}{M} \sum_{r=0}^{M-1} f[r].$$

Несимметричная периодическая функция может быть центрирована выделением постоянной составляющей. Если (2.107) содержит постоянную составляющую, то уравнение $A(z) = 0$ не должно иметь корня $z_1 = 1$. Действительно, при наличии такого корня формулу (2.107) можно

упростить:

$$\frac{zA(z)}{z^M - 1} = \frac{z(z-1)A_1(z)}{(z-1)(1+z+z^2+\dots+z^{M-1})} = \frac{zA_1(z)}{1+z+z^2+\dots+z^{M-1}},$$

где $A_1(z)(z-1) = A(z)$.

Если же $A(z) = 0$ не содержит корня $z_1 = 1$, то в изображении периодической функции (2.107) можно выделить постоянную составляющую

$$F(z) = \frac{zA(z)}{(z-1)(1+z+z^2+\dots+z^{M-1})} = z \left[\frac{a}{z-1} + \frac{A^0(z)}{1+z+z^2+\dots+z^{M-1}} \right] = F_1(z) + F_2(z). \quad (2.109)$$

Второе слагаемое (2.109) представляет собой центрированный несимметричный периодический процесс. Полином $A^0(z)$ имеет наивысшую степень $(M-2)$. Коэффициент разложения $a = A(1) \cdot M^{-1}$.

Для получения изображения внутри периода центрированной решетчатой функции, изображение которой соответствует второму слагаемому формулы (2.109), последнее следует привести к виду (2.107):

$$F_2(z) = \frac{zA^0(z)}{1+z+z^2+\dots+z^{M-1}} = \frac{z(z-1)A^0(z)}{z^M - 1} = \frac{z^M}{z^M - 1} \frac{(z-1)A^0(z)}{z^{M-1}} = \frac{z^M}{z^M - 1} \sum_{r=0}^{M-1} f_2[r] z^{-r}. \quad (2.110)$$

Найдем, например, изображение периодической функции, представляющей собой единичную дискрету, повторяющуюся периодически через каждые M тактов. В соответствии с (2.107) изображение этого периодического процесса будет

$$F(z) = \frac{z^M}{z^M - 1} \cdot 1 = \frac{z^M}{(z-1)(1+z+z^2+\dots+z^{M-1})}.$$

Разложим $F(z)$ на слагаемые:

$$F(z) = z \left[\frac{a}{z-1} + \frac{A^0(z)}{1+z+z^2+\dots+z^{M-1}} \right] = \frac{z}{M} \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1+2z+3z^2+\dots+(M-1)z^{M-2}}{1+z+z^2+\dots+z^{M-1}} \right] = F_1(z) + F_2(z).$$

Центрированный процесс определяется вторым слагаемым последнего выражения:

$$\begin{aligned} F_2(z) &= -\frac{z}{M} \frac{1+2z+3z^2+\dots+(M-1)z^{M-2}}{1+z+z^2+\dots+z^{M-1}} = \\ &= -\frac{z^M}{z^M-1} \frac{z-1}{M} \frac{1+2z+3z^2+\dots+(M-1)z^{M-2}}{z^{M-1}} = \\ &= \frac{z^M}{z^M-1} \left[1 - \frac{1}{M} (1+z^{-1}+z^{-2}+\dots+z^{-M+1}) \right] = \\ &= \frac{z^M}{z^M-1} \left[\frac{M-1}{M} - \sum_{r=1}^{M-1} M^{-1} z^{-r} \right]. \end{aligned}$$

По изображению $F_2(z)$ можно найти значения дискрет рассматриваемого центрированного процесса: $f[0]=f[M]==(M-1)M^{-1}$, $f[1]=f[2]=\dots=f[M-1]=-M^{-1}$.

17. Площадь огибающей смещенной решетчатой функции. Площадь огибающей смещенной решетчатой функции, равная интегралу от производящей функции $f(t)$:

$$S_1 = \int_0^\infty f(t) dt = T \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 f[n, \varepsilon] d\varepsilon = T \int_0^1 \sum_{n=0}^\infty f[n, \varepsilon] d\varepsilon.$$

На основании (2.72) эта площадь

$$S_1 = T \int_0^1 I_1(\varepsilon) d\varepsilon = T \int_0^1 F(1, \varepsilon) d\varepsilon. \quad (2.111)$$

Рассмотрим, например, площадь огибающей функции $e^{-\alpha(n+\varepsilon)T}$. На основании таблицы 2.1 сумма дискрет этой функции

$$I_1(\varepsilon) = \sum_{n=0}^\infty e^{-\alpha(n+\varepsilon)T} = F(1, \varepsilon) = \frac{e^{-\alpha\varepsilon T}}{1-e^{-\alpha T}}.$$

Интегрируя последнее выражение по ε , имеем

$$S_1 = T \int_0^1 \frac{e^{-\alpha\varepsilon T}}{1-e^{-\alpha T}} d\varepsilon = \frac{1}{\alpha}.$$

18. Сумма квадратов дискрет решетчатой функции. Рассмотрим сумму квадратов дискрет

решетчатой функции и применим к ней формулу обращения (2.80):

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} f^2[n] &= \sum_{n=0}^{\infty} f[n] \cdot \frac{T}{j2\pi} \int_{c-j\pi T^{-1}}^{c+j\pi T^{-1}} F(e^{pT}) e^{pnT} dp = \\ &= \frac{T}{j2\pi} \int_{c-j\pi T^{-1}}^{c+j\pi T^{-1}} F(e^{pT}) dp \cdot \sum_{n=0}^{\infty} f[n] e^{pnT} = \\ &= \frac{T}{j2\pi} \int_{c-j\pi T^{-1}}^{c+j\pi T^{-1}} F(e^{pT}) F(e^{-pT}) dp.\end{aligned}$$

Если абсцисса абсолютной сходимости отрицательна, то можно положить $c=0$ и $p=j\omega$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^2[n] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |F(e^{j\omega T})|^2 d\omega, \quad (2.112)$$

где $F(e^{j\omega T})$ — частотное изображение решетчатой функции, получаемое из z -преобразования подстановкой $z = e^{j\omega T}$. Выражение (2.112) представляет собой дискретный аналог формулы Релея [8], записанной для функции времени $f(t)$, отличной от нуля при $t \geq 0$:

$$\int_0^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega,$$

где $F(j\omega)$ — частотное изображение (изображение Фурье) функции времени $f(t)$.

Посредством подстановки, которая более подробно будет рассмотрена в § 2.5,

$$\frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = j\lambda \frac{T}{2},$$

где λ — абсолютная псевдочастота, или

$$z = e^{j\omega T} = \frac{1 + j\lambda \frac{T}{2}}{1 - j\lambda \frac{T}{2}},$$

формула (2.112) приводится к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^2[n] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F^*(j\lambda)|^2}{1 + \lambda^2 \frac{T^2}{4}} \cdot d\lambda = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F^*(j\lambda)|^2}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2} \cdot d\lambda, \quad (2.113)$$

где $F^*(j\lambda)$ — частотное изображение решетчатой функции $f[n]$. Выражение (2.113) представляет собой другой вариант дискретного аналога формулы Релея.

Интегрирование выражения (2.113) в бесконечных пределах не представляет труда и может быть сделано с использованием известных таблиц интегралов (см. Приложение).

Найдем, например, сумму квадратов дискрет функции $e^{-\alpha nT}$. Ее изображение в соответствии с таблицей 2.1

$$F(z) = \mathcal{Z}\{e^{-\alpha nT}\} = \frac{z}{z-d}, \quad d = e^{-\alpha T}.$$

Далее находим

$$F^*(j\lambda) = \frac{1 + j\lambda \frac{T}{2}}{1 - d + (1+d) j\lambda \frac{T}{2}}.$$

Сумма квадратов дискрет, в соответствии с (2.113) и Приложением,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\alpha nT})^2 &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2 d\lambda}{\left|1 - d + (1+d) j\lambda \frac{T}{2}\right|^2 \left(1 + \lambda^2 \frac{T^2}{4}\right)} = \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\left|\frac{(1+d)T}{2} j\lambda + 1 - d\right|^2} = \frac{1}{1-d^2} = \frac{1}{1-e^{-2\alpha T}}. \end{aligned}$$

Если рассматривается смещенная функция $f[n, \varepsilon]$, то, аналогично изложенному выше,

$$\begin{aligned} I_2(\varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} f^2[n, \varepsilon] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |F(e^{j\omega T}, \varepsilon)|^2 d\omega = \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F^*(j\lambda, \varepsilon)|^2}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2} d\lambda, \quad (2.114) \end{aligned}$$

где $F(e^{j\omega T}, \varepsilon)$ представляет собой z -преобразование решетчатой функции $f[n, \varepsilon]$ при замене $z = e^{j\omega T}$, а $F^*(j\lambda, \varepsilon)$ — частотное изображение в функции псевдочастоты.

19. Площадь квадрата огибающей решетчатой функции. Площадь квадрата огибающей смещенной решетчатой функции равна интегралу от квадрата производящей функции:

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^\infty f^2(t) dt = \sum_{n=0}^\infty T \int_0^1 f^2[n, \varepsilon] d\varepsilon = \\ &= T \int_0^1 d\varepsilon \sum_{n=0}^\infty f^2[n, \varepsilon] = T \int_0^1 I_2(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (2.115) \end{aligned}$$

где $I_2(\varepsilon)$ определяется формулой (2.114).

§ 2.3. Передаточные функции непрерывной части ЦАС

Рассмотрим вначале нахождение передаточной функции импульсной системы, содержащей реальный импульсный элемент ИЭ в канале ошибки (рис. 2.12, а). Импульсный элемент генерирует импульсы некоторой формы и продолжительности. Непрерывная часть системы объединена в виде звена с передаточной функцией $W_{\Pi}(p)$.

От реального импульсного элемента обычно бывает удобным перейти к идеальному. Это можно сделать двумя способами. Можно принять, например, что идеальный импульсный элемент превращает непрерывное значение ошибки на его входе $e(t)$ в решетчатую функцию

$$e[n] = e(t)|_{t=nT}. \quad (2.116)$$

В формуле (2.116) принято, что смещение $\varepsilon = 0$, что всегда можно сделать выбором начала отсчета времени. Подобный идеальный импульсный элемент ИЭ1 изображен на рис. 2.12, б (идеальный импульсный элемент первого рода). Он соответствует, например, устройству дискретного съема информации с объектов различного вида.

Затем решетчатая функция $e[n]$ поступает на экстраполятор Э1, который из отдельных дискрет ее формирует реальные импульсы заданной формы и продолжительности с амплитудой, пропорциональной каждой дискрете (амплитудно-импульсная модуляция). Реальные импульсы

прикладываются затем ко входу звена с передаточной функцией $W_H(p)$. Совокупность идеального импульсного элемента ИЭ1 и экстраполятора Э1 эквивалентна импульсному элементу.

Если поставить задачу отыскания передаточной функции экстраполятора Э1, то окажется, что это возможно

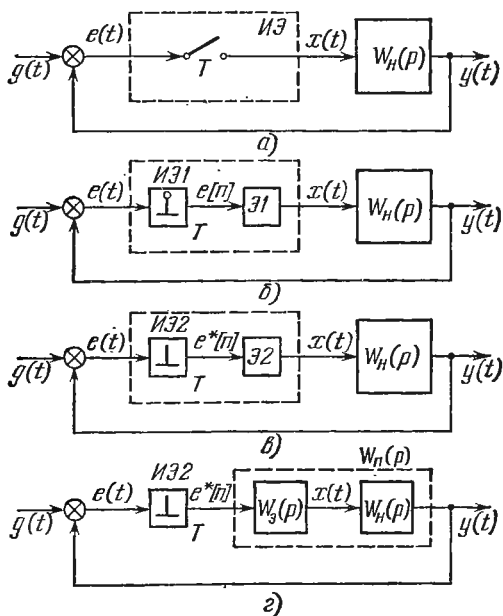


Рис. 2.12. К определению передаточной функции импульсной системы

сделать только для z -преобразований или дискретных преобразований Лапласа входной и выходной величин, так как входная величина задана в виде решетчатой функции времени $e[n]$.

Можно ввести понятие идеального импульсного элемента второго рода ИЭ2 (рис. 2.12, в), считая, что он генерирует с периодом T последовательность бесконечно коротких импульсов типа δ -функции, площадь которых пропорциональна сигналу ошибки $e(t)$ в моменты времени

$t = nT$. Эту последовательность представим в виде

$$e^*[n] = e(t) \delta(t - nT) = e(t) \delta_T(t), \quad (2.117)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Далее сигнал (2.117) поступает на экстраполятор Э2, который из импульсов типа δ -функции формирует реальные импульсы заданной формы и продолжительности.

Представление импульсного элемента согласно (2.117) не соответствует действительности, так как никакой импульсный элемент не может генерировать бесконечные по высоте импульсы. Однако такое представление имеет свои преимущества. В этом случае может быть найдена передаточная функция экстраполятора Э2 в виде отношения непрерывных изображений Лапласа. Это связано с тем, что для каждого импульса типа δ -функции, поступающего на экстраполятор, может быть найдено именно непрерывное изображение Лапласа, а не z -преобразование. Использование такой передаточной функции экстраполятора удобно вследствие того, что последующее звено с передаточной функцией $W_n(p)$ является непрерывным. Это облегчает изображение структурных схем.

Рассмотрим так называемую *приведенную весовую функцию* $w_n(t)$ разомкнутого канала управления (рис. 2.12, б). Под этим термином понимается реакция непрерывной части системы совместно с экстраполятором на единичную импульсную функцию $e[n] = \delta_0[n]$, которая дается формулой (2.45). Более строго приведенная весовая функция разомкнутого канала определяется как отношение выходного сигнала $y(t)$ к высоте e_1 единственного импульса $e_1 \delta_0[n]$ на входе экстраполятора (рис. 2.12, б):

$$w_n(t) = e_1^{-1} y(t). \quad (2.118)$$

Если выходную величину рассматривать только в дискретные моменты времени $t = nT$ или $t = (n + \epsilon)T$, то разомкнутый канал управления будет представлять собой импульсный фильтр. Он может характеризоваться решетчатой весовой функцией $w_n[n]$ или $w_n[n, \epsilon]$, полученной из производящей функции $w_n(t)$.

Заметим, что приведенная весовая функция отличается от обычной весовой функции непрерывного фильтра как своим видом, так и размерностью. Приведенная весовая

функция содержит дополнительный множитель, имеющий размерность времени.

Знание решетчатой функции $w_n[n]$ или $w_n[n, \varepsilon]$ позволяет найти реакцию импульсного фильтра на входную величину $e[n]$ произвольного вида.

Очевидно, что реакция импульсного фильтра на дискрету $e[0]$ будет $w_n(t) \cdot e[0]$, реакция на дискрету $e[1]$ будет $w_n(t - T) \cdot e[1]$, реакция на дискрету $e[m]$ будет $w_n(t - mT) \times e[m]$. Поэтому

$$y(t) = \sum_{m=0}^n e[m] w_n(t - mT).$$

Для дискретных моментов времени

$$y[n] = \sum_{m=0}^n e[m] w_n[n - m]. \quad (2.119)$$

Найдем z -преобразование от левой и правой частей последнего выражения:

$$\mathbb{Z}\{y[n]\} = \mathbb{Z}\left\{\sum_{m=0}^n e[m] w_n[n - m]\right\}. \quad (2.120)$$

На основании формулы свертки (2.76)

$$Y(z) = W(z) E(z), \quad (2.121)$$

где дискретная передаточная функция $W(z)$ есть z -преобразование от приведенной решетчатой весовой функции:

$$W(z) = \mathbb{Z}\{w_n[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n[n] z^{-n}. \quad (2.122)$$

Последняя формула, вообще говоря, очевидна. Так как передаточная функция линейной системы не зависит от вида входного сигнала, то можно положить $e[n] = \delta_0[n]$. Изображение единичной решетчатой импульсной функции равно единице. Поэтому передаточная функция импульсного фильтра оказывается равной в этом случае изображению выходной величины, которая представляет собой решетчатую приведенную весовую функцию $w_n[n]$, и формула (2.122) может быть написана сразу.

В случае использования другого понятия идеального импульсного элемента в соответствии с рис. 2.12, в и

формулой (2.117) приведенная весовая функция может определяться аналогичным образом. Если e_0 — сигнал на входе импульсного элемента в момент времени $t=0$, то на его выходе будет сигнал $e^*[0] = e_0 \delta(t)$. Приведенная решетчатая весовая функция непрерывной части совместно с экстраполятором будет в этом случае равна отношению реакции на выходе $y[n]$ к сигналу на входе e_0 , т. е. $w_n[n] = e_0^{-1} y[n]$, что совпадает с изложенным выше.

Однако в этом случае, поскольку изображение Лапласа единичной функции $\delta(t)$ равно единице, можно считать, что изображение Лапласа выходной величины $y(t) = w_n(t)$ при воздействии на входе вида $\delta(t)$ совпадает с непрерывной передаточной функцией канала регулирования, т. е. $Y_n(p) = W_n(p)$. В свою очередь передаточную функцию $W_n(p)$ можно представить в виде произведения передаточных функций экстраполятора и непрерывной части, т. е. $W_n(p) = W_\varepsilon(p) W_h(p)$. Это дает возможность представить структурную схему импульсной системы регулирования так, как это изображено на рис. 2.12, г.

Формула (2.122) указывает на полное сходство с непрерывными системами, у которых передаточная функция есть преобразование Лапласа от весовой функции:

$$W_n(p) = \mathcal{L}\{w_n(t)\} = \int_0^{\infty} w_n(t) e^{-pt} dt.$$

Формула (2.122), определяющая дискретную передаточную функцию импульсного фильтра, может быть записана также в другом виде через введенную передаточную функцию $W_n(p)$:

$$W(z) = \mathbb{Z}\{W_n(p)\}. \quad (2.123)$$

На выходе дискретного фильтра может рассматриваться смещенная решетчатая функция $y[n, \varepsilon]$ и $w_n[n, \varepsilon]$. Тогда передаточная функция

$$W(z, \varepsilon) = \mathbb{Z}_\varepsilon\{w_n[n, \varepsilon]\} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n[n, \varepsilon] z^{-n}, \quad (2.124)$$

изображение выходной величины

$$Y(z, \varepsilon) = W(z, \varepsilon) E(z). \quad (2.125)$$

Однако большинство задач по исследованию импульсных систем может быть решено при использовании передаточной функции $W(z)$, которая, в основном, и будет в дальнейшем рассматриваться.

Как следует из полученных выше формул, дискретная передаточная функция должна определяться по приведенной весовой функции непрерывной части. В случае, когда непрерывная часть состоит из параллельно включенных звеньев и ее передаточная функция

$$W_n(p) = \sum_{i=1}^k W_{ni}(p), \quad (2.126)$$

дискретная передаточная функция $W(z)$ может быть определена суммированием дискретных передаточных функций, определенных для каждого звена в отдельности:

$$W(z) = \sum_{i=1}^k W_i(z). \quad (2.127)$$

В отличие от непрерывных систем подобное правило не имеет места для случая последовательно включенных звеньев с общей передаточной функцией

$$W_n(p) = \prod_{i=1}^k W_{ni}(p)$$

и общим импульсным элементом на входе. В этом случае

$$W(z) \neq \prod_{i=1}^k W_i(z)$$

и передаточная функция $W(z)$ должна сразу определяться по результирующей весовой функции $w_n(t)$. Для последовательного соединения звеньев $w_n(t)$ может, например, определяться по теореме разложения.

Иногда для последовательного соединения, например, двух звеньев результирующая передаточная функция записывается в виде $W(z) = W_1 W_2(z)$. Символ $W_1 W_2(z)$ должен рассматриваться как единый и относящийся к операции нахождения дискретной передаточной функции последовательно включенных звеньев с общей передаточной функцией $W_n(p) = W_{n1}(p) \cdot W_{n2}(p)$.

Однако в том случае, когда имеется ряд последовательно включенных звеньев, каждое из которых имеет на входе свой импульсный элемент (последовательно включенные импульсные фильтры), результирующая передаточная функция может находиться перемножением дискретных передаточных функций каждого импульсного фильтра:

$$W(z) = \prod_{i=1}^k W_i(z) = \prod_{i=1}^k \mathbb{Z} \{W_{pi}(p)\}. \quad (2.128)$$

Непрерывная часть дискретного фильтра может содержать временное запаздывание $\tau = \xi T$. Тогда дискретная передаточная функция

$$W(z) = \mathbb{Z} \{W_p(p) e^{-p\tau}\} = \mathbb{Z} \{w_p(t - \tau)\} \quad (2.129)$$

должна определяться в соответствии с формулами (2.53) и (2.54). Если запаздывание лежит в пределах $0 \leq \tau < T$ или $0 \leq \xi < 1$, то при $m=0$ и $\varepsilon=0$ имеем из (2.53)

$$W(z) = z^{-1} \mathbb{Z}_\varepsilon \{w_p[n, 1 - \xi]\} = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} w_p[n, 1 - \xi] z^{-n}. \quad (2.130)$$

При использовании таблицы 2.1 необходимо положить $\varepsilon = 1 - \xi$.

Нахождение передаточной функции при наличии в канале управления временного запаздывания может также производиться следующим образом. Приведенная весовая функция, входящая в (2.129), более строго должна быть записана в виде $w_p(t - \tau) \cdot 1(t - \tau)$, где $1(t - \tau)$ — функция, тождественно равная нулю при $t < \tau$ и равная единице при $t \geq \tau$. Разложим приведенную весовую функцию в ряд Тейлора по степеням τ . В результате получим для $t \neq \tau$

$$\begin{aligned} w_p(t - \tau) \cdot 1(t - \tau) = \\ = \left[w_p(t) - \dot{w}_p(t) \tau + \ddot{w}_p(t) \frac{\tau^2}{2} - \dots \right] \cdot 1(t - \tau). \end{aligned}$$

Рассмотрим z -преобразование этой функции, равное z -преобразованию исходной передаточной функции:

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_p[n - \xi] \cdot 1[n - \xi] z^{-n},$$

где $\xi = \tau T^{-1}$.

Используем приближенные равенства $\dot{w}_n[n] \approx \nabla w_n[n] T^{-1}$, $\ddot{w}_n[n] \approx \nabla^2 w_n[n] T^{-2}$ и т. д. Тогда

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n[n] \cdot 1[n - \xi] z^{-n} - \\ - \frac{\tau}{T} \sum_{n=0}^{\infty} \nabla w_n[n] \cdot 1[n - \xi] z^{-n} + \\ + \frac{\tau^2}{2T^2} \sum_{n=0}^{\infty} \nabla^2 w_n[n] \cdot 1[n - \xi] z^{-n} - \dots$$

Если $w_n[0] = 0$, а следовательно, и все обратные разности в точке $n=0$ равны нулю, и, кроме того, при введении ограничения $\tau < T$ множитель $1[n - \xi]$ может быть отброшен, то на основании формулы изображения обратной разности (2.64) передаточная функция может быть записана в виде

$$W(z) = W^0(z) \left[1 - \frac{z-1}{z} \frac{\tau}{T} + \left(\frac{z-1}{z} \right)^2 \frac{\tau^2}{2T^2} - \dots \right],$$

где $W^0(z)$ — передаточная функция при отсутствии запаздывания. Ряд в квадратных скобках правой части последнего выражения сходится и представляет собой экспоненциальную функцию. В результате получаем

$$W(z) = W^0(z) e^{-\frac{z-1}{z} \frac{\tau}{T}}. \quad (2.131)$$

Второй сомножитель правой части (2.131) при $T \rightarrow 0$ (или $z \rightarrow 1$), что соответствует переходу к непрерывной системе, приобретает известный вид передаточной функции звена временного запаздывания:

$$\lim_{T \rightarrow 0} e^{-\frac{z-1}{z} \frac{\tau}{T}} = e^{-p\tau}.$$

Если $\tau > T$, то целую часть запаздывания mT , в соответствии с формулой (2.54), можно выделить и учесть в передаточной функции в виде множителя z^{-m} , а к дробной части ξT применить формулу (2.131).

Формула (2.131) несколько сложна для практического использования. Поэтому для часто встречающегося случая $\tau \ll T$ целесообразно ограничиться линейным членом

ряда Тейлора. В результате получается упрощенная формула

$$W(z) \approx W^0(z) \left[1 - \frac{z-1}{z} \frac{\tau}{T} \right], \quad (2.132)$$

которая и может использоваться.

При нахождении передаточных функций импульсных систем, содержащих экстраполяторы различного вида, удобно использовать для получения изображения Лапласа приведенной весовой функции, в соответствии с рис. 2.12, г, зависимость

$$W_n(p) = F_n(p) W_{\text{в}}(p) = W_{\text{в}}(p) W_{\text{н}}(p), \quad (2.133)$$

где $F_n(p)$ — изображение Лапласа для выходной величины экстраполятора Э1 (рис. 2.12, б) при поступлении на его вход с выхода импульсного элемента первого рода единственной дискреты $\delta_0[n]$. Оно совпадает с передаточной функцией $W_{\text{в}}(p)$ экстраполятора Э2 (рис. 2.12, в). Величину $W_n(p)$ можно назвать *приведенной передаточной функцией непрерывной части*.

Можно использовать на входе экстраполятора вместо функции $\delta_0[n]$ сигнал более сложного вида, например единичную решетчатую функцию $1[n]$, для которой z -преобразование будет $z(z-1)^{-1}$. Тогда передаточная функция экстраполятора может быть найдена из формулы

$$W_{\text{в}}(p) = \frac{z-1}{z} F'_n(p),$$

где $F'_n(p)$ представляет собой изображение Лапласа выходной величины в этом случае.

При использовании на входе экстраполятора линейной нарастающей решетчатой функции

$$e[n] = n = \frac{t}{T} \Big|_{t=nT},$$

z -преобразование которой $z(z-1)^{-2}$, передаточная функция экстраполятора

$$W_{\text{в}}(p) = \frac{(z-1)^2}{z} F''(p),$$

где $F''(p)$ — изображение Лапласа выходной величины экстраполятора в этом случае. Можно применять и более сложные виды входных сигналов.

Рассмотрим теперь нахождение дискретной передаточной функции непрерывной части ЦАС. На рис. 2.13 изображен линейризованный разомкнутый контур управления системы с ЦВМ. Непрерывный сигнал ошибки $e(t)$ поступает на линейризованный входной преобразователь $H-K$ (см. § 2.1 и рис. 2.3) и приобретает безразмерный (цифровой) вид $e_0(t)$. Далее сигнал преобразуется в решетчатую цифровую функцию $e_0[n]$, соответствующую дискретному опросу входных устройств, идеальным импульсным элементом первого рода и поступает на вход

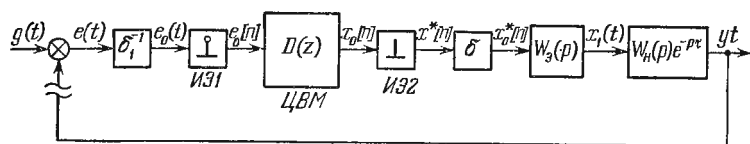


Рис. 2.13. Структурная схема одноканальной линейризованной системы с ЦВМ

ЦВМ. На выходе ЦВМ будет цифровой решетчатый сигнал $x_0[n]$, который поступает на вход идеального импульсного элемента второго рода и превращается в сигнал $x_0^*[n]$ в соответствии с формулой (2.117). Далее сигнал проходит через линейризованный выходной преобразователь и экстраполятор с передаточной функцией $W_3(p)$ на вход непрерывной части с передаточной функцией $W_n(p)e^{-p\tau}$.

При нахождении передаточной функции непрерывной части она обычно рассматривается совместно с линейризованными преобразователями $H-K$ и $K-H$.

Заметим, что введение в структурную схему на рис. 2.13 идеального импульсного элемента второго рода сделано с целью формального изображения экстраполятора в виде динамического звена с передаточной функцией $W_3(p)$. Однако в действительности на выходе ЦВМ действует идеальный импульсный элемент первого рода. Поэтому при рассмотрении физических явлений в ЦАС удобнее приведенную передаточную функцию непрерывной части (2.133) определять через изображение импульса на выходе экстраполятора $F_n(p)$, который будет иметь место при поступлении на его вход либо единственной

единичной дискреты $\delta_0[n]$, либо сигнала $x_0[n]$ более сложного вида.

Экстраполяторы нулевого порядка. В экстраполяторах нулевого порядка сигнал на его выходе удерживается постоянным в течение всего такта T . Работу экстраполятора нулевого порядка поясняет рис. 2.14. На рис. 2.14, а изображена решетчатая функция $x[n]$ на выходе ЦВМ и непрерывная функция $x_1(t)$ на выходе экстраполятора (рис. 2.13). Штриховая линия на рис. 2.14, а показывает

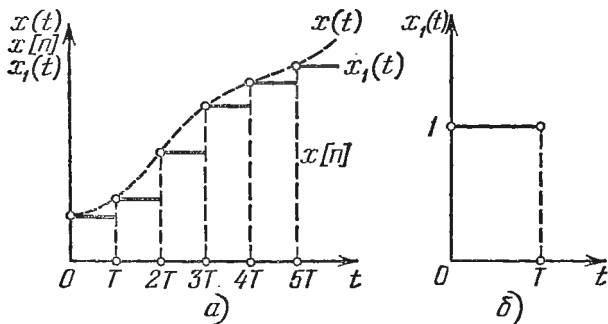


Рис. 2.14. Пояснение работы экстраполятора нулевого порядка.

производящую функцию $x(t)$, которая в случае $D(z) = 1$ может быть однозначно определена в виде $x(t) = \delta \delta_1^{-1} e(t)$. Из рис. 2.14, а вытекает, что импульсный элемент совместно с экстраполятором генерирует прямоугольные импульсы, продолжительность которых равна T .

Для того чтобы воспользоваться формулой (2.133), необходимо найти изображение Лапласа единичного прямоугольного импульса (рис. 2.14, б), который будет при $x[n] = \delta_0[n]$ иметь вид

$$F_{\text{и}}(p) = \int_0^T 1 \cdot e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-pT}}{p} = \frac{z - 1}{zp}. \quad (2.134)$$

Тогда в соответствии с (2.133) передаточная функция приведенной непрерывной части при учете присоединенных преобразователей

$$W_{\text{н}}(p) = F_{\text{и}}(p) \frac{\delta}{\delta_1} W_{\text{н}}(p) = \frac{z - 1}{zp} \frac{\delta}{\delta_1} W_{\text{н}}(p). \quad (2.135)$$

При отсутствии временного запаздывания в соответствии с (2.123) дискретная передаточная функция непрерывной части

$$W_0(z) = \frac{\delta}{\delta_1} \mathcal{Z} \{W_n(p)\} = \frac{\delta}{\delta_1} \frac{z-1}{zp} \mathcal{Z} \left\{ \frac{W_n(p)}{p} \right\}. \quad (2.136)$$

Последнее выражение может быть также записано в виде

$$W_0(z) = \frac{\delta}{\delta_1} \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \{h_n(t)\}, \quad (2.137)$$

где $h_n(t)$ — переходная функция непрерывной части.

В канале управления может иметь место временное запаздывание. Это может вызываться следующими причинами.

1. Непрерывная часть канала управления может содержать звено чистого временного запаздывания, определяемого либо наличием «транспортного» запаздывания, либо наличием длинных линий (электрических, пневматических, гидравлических). В этом случае запаздывание τ_1 может иметь произвольное значение как меньше периода дискретности T , так и больше его.

2. Учет нескольких последовательно включенных апериодических звеньев первого порядка в непрерывной части ЦАС часто может производиться посредством введения временного запаздывания τ_2 , равного сумме постоянных времени звеньев.

3. Так как требуется некоторое время для обработки данных, поступивших на вход ЦВМ, то определенное запаздывание τ_3 всегда вносится самой цифровой вычислительной машиной. При этом $0 < \tau_3 < T$. Запаздывание проявляется в том, что импульсный элемент ИЭ2 (рис. 2.13) работает с временным сдвигом τ_3 относительно входного импульсного элемента ИЭ1. Этот вид запаздывания присутствует всегда в ЦАС. Поэтому условие $\tau_3 = 0$ следует рассматривать как случай, когда влиянием запаздывания в ЦВМ можно пренебречь.

Все рассмотренные виды запаздывания действуют в ЦАС одинаково. Результирующее запаздывание можно определить, суммируя отдельные возможные составляющие, т. е. $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$. Таким образом, в общем случае формула (2.136) может быть записана в виде

$$W_0(z) = \frac{\delta}{\delta_1} \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{W_n(p)}{p} e^{-p\tau} \right\}. \quad (2.138)$$

Если выполняется условие $0 < \tau < T$, то можно воспользоваться формулой (2.132) и записать

$$\begin{aligned} W_0(z) &= \frac{\delta}{\delta_1} \frac{z-1}{z^2} \mathcal{Z} \{h_n[n, \varepsilon]\} = \\ &= \frac{\delta}{\delta_1} \frac{z-1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} h_n[n, \varepsilon] \cdot z^{-n}, \end{aligned} \quad (2.139)$$

где $\varepsilon = 1 - \xi = 1 - \frac{\tau}{T}$. Если условие $\tau < T$ не выполняется, то следует воспользоваться более общими выражениями (2.51) – (2.54).

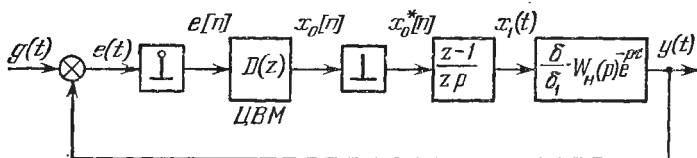


Рис. 2.15. Упрощенная структурная схема ЦАС с экстраполятором нулевого порядка.

Для нахождения передаточной функции непрерывной части ЦАС при наличии запаздывания могут быть также использованы формулы (2.131) и (2.132), которые в некоторых случаях оказываются более удобными.

В соответствии с полученными выражениями на рис. 2.15 изображена эквивалентная структурная схема ЦАС для случая использования экстраполятора нулевого порядка.

Пример 2.1. Определим передаточную функцию непрерывной части совместно с преобразователями для случая, когда

$$W_n(p) = \frac{k_n}{p(1 + T_1 p)}.$$

Примем, что коэффициент передачи непрерывной части $k_n = 100$ град/В·с, постоянная времени $T_1 = 1^\circ$ с, период дискретности $T = 0,5$ с, запаздывание $\tau = 0$, цена младшего разряда входного преобразователя $\delta_1 = 0,1^\circ = 6'$, а цена младшего разряда выходного преобразователя $\delta = 0,05$ В. Разложим выражение в фигурных скобках

(2.136) на простые дроби:

$$\frac{W_H(p)}{p} = \frac{k_H}{p^2(1+T_1p)} = k_H \left(\frac{1}{p^2} - \frac{T_1}{p} + \frac{T_1^2}{1+T_1p} \right).$$

Тогда в соответствии с таблицей 2.1 и формулой (2.136) имеем

$$\begin{aligned} W_0(z) &= \frac{k_H \delta}{\delta_1} \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{p^2} - \frac{T_1}{p} + \frac{T_1^2}{1+T_1p} \right\} = \\ &= \frac{K_H(z-1)}{z} \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{T_1 z}{z-1} + \frac{T_1 z}{z-d} \right] = \\ &= \frac{K_H [(T-T_1+dT_1)z + (1-d)T_1 - dT]}{(z-1)(z-d)} = \frac{5,5z + 4,25}{(z-1)(z-0,61)}, \end{aligned}$$

где $K_H = \frac{k_H \delta}{\delta_1} = 50 \text{ с}^{-1}$.

Экстраполяторы первого порядка. В экстраполяторах первого порядка сигнал на его выходе внутри такта изменяется по линейному закону. Работу экстраполятора

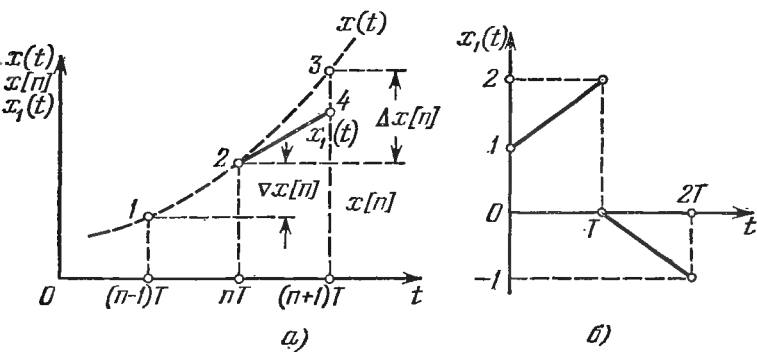


Рис. 2.16. Пояснение работы экстраполятора первого порядка.

поясняет рис. 2.16. Решетчатая функция $x[n]$ обрабатывается экстраполятором для получения непрерывной величины $x_1(t)$ на его выходе. Штриховой линией показана производящая функция времени $x(t)$, которая в простейшем случае $D(z) = 1$ может быть определена равенством $x(t) = \delta \delta_1^{-1} e(t)$.

При линейном экстраполировании на участке $nT < t < (n+1)T$ следовало бы исходить из формулы

(рис. 2.16, а)

$$x_1(t - nT) = x[n] + \frac{\Delta x_1[n]}{T}(t - nT). \quad (2.140)$$

Однако при $t < (n+1)T$ прямая разность неизвестна. Поэтому для экстраполирования приходится ориентироваться на использование известной обратной разности, что дает формулу

$$x_1(t - nT) = x[n] + \frac{\nabla x[n]}{T}(t - nT). \quad (2.141)$$

В результате такого экстраполирования в конце участка будет получена точка 4, соответствующая выражению

$$x_1[n+1] = x[n] + \nabla x[n] \neq x[n+1],$$

что определяется погрешностью метода.

Пример реализации экстраполятора подобного вида на операционном усилителе в режиме интегрирования

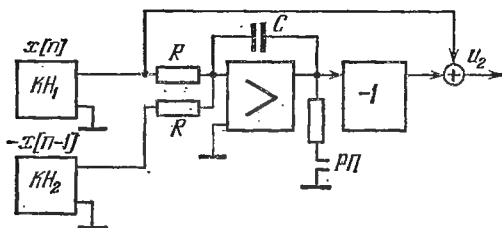


Рис. 2.17. Экстраполятор первого порядка на операционном усилителе.

изображен на рис. 2.17. Постоянная времени интегратора равна периоду повторения ЦВМ, т. е. $RC = T$. Экстраполятор получает сигнал от преобразователей «код—напряжение» KH_1 и KH_2 цифровой вычислительной машины. Первый из них дает напряжение, пропорциональное выходной величине текущего такта $x[n]$, а второй—выходной величине предыдущего такта $x[n-1]$. Интегратор на операционном усилителе интегрирует разностный сигнал $x[n] - x[n-1]$. Сигнал интегратора складывается с сигналом текущего такта $x[n]$ на инверторе, так как интегратор инвертирует знак сигнала.

Возможно построение экстраполятора подобного рода при использовании одного преобразователя «код—напряжение», дающего напряжение, пропорциональное сигналу текущего такта $x[n]$. Однако в этом случае необходим дополнительный операционный усилитель, работающий в режиме запоминающего устройства, и схема коммутации, обеспечивающая запоминание в конце каждого такта выходного напряжения преобразователя перед его сбросом на запоминающем устройстве.

Для того чтобы реализовать зависимость, изображенную на рис. 2.16, а, необходимо в дискретные моменты времени $t = nT$ сбрасывать накопленную выходную величину интегратора в нуль. С этой целью на выходе интегратора предусмотрены контакты реле $РП$, замыкающие его выход в эти моменты времени.

При поступлении на вход экстраполятора (рис. 2.17) единичного импульса на его выходе появляется импульс, форма которого изображена на рис. 2.16, б.

Найдем изображение Лапласа этого импульса. На основании формулы (2.141) можно получить изображение выходного импульса экстраполятора

$$F_n(p) = \mathcal{L}[1(t)]_0^T + (1 - e^{-pT}) \mathcal{L}\left[\frac{t}{T}\right]_0^T = \frac{z-1}{zp} + \frac{z-1}{z} \left(-\frac{1}{zp} + \frac{z-1}{z^2 p^2 T^2}\right) = \left(\frac{z-1}{z}\right)^2 \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2 T^2}\right). \quad (2.142)$$

В последнем выражении

$$\mathcal{L}[1(t)]_0^T = \int_0^T 1(t) e^{-pt} dt = \frac{z-1}{zp},$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{t}{T}\right]_0^T = \int_0^T \frac{t}{T} e^{-pt} dt = -\frac{1}{zp} + \frac{z-1}{z p^2 T^2}.$$

Найденное изображение выходного импульса $F_n(p) = W_0(p)$ даст возможность определить приведенную передаточную функцию непрерывной части $W_n(p)$ по формуле (2.133), а затем по формуле (2.123) дискретную передаточную функцию непрерывной части совместно с преобразователями

$$W_0(z) = \frac{\delta}{\delta_1} \left(\frac{z-1}{z}\right)^2 \mathcal{Z}\left\{\frac{W_n(p)}{p} e^{-p\tau} + \frac{W_n(p)}{p^2 T^2} e^{-p\tau}\right\}. \quad (2.143)$$

Последнее выражение позволяет изобразить структурную схему одноканальной ЦАС так, как это показано на рис. 2.18.

Пример 2.2. Определим передаточную функцию непрерывной части, если объект имеет передаточную функцию

$$W_H(p) = \frac{k_H}{p},$$

для случаев, когда используется экстраполятор нулевого порядка и экстраполятор первого порядка. Примем следующие значения: $k_H = 100$ град/В·с, запаздывание

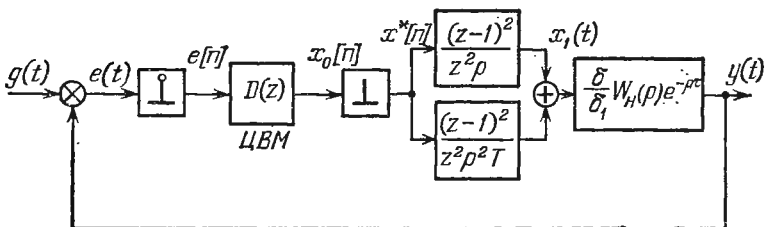


Рис. 2.18. Упрощенная структурная схема ЦАС с экстраполятором первого порядка.

$\tau = 0$, период повторения $T = 0,1$ с, цена младшего разряда входного преобразователя $\delta_1 = 0,1$ град, цена младшего разряда выходного преобразователя $\delta = 0,05$ В.

Для экстраполятора нулевого порядка в соответствии с формулой (2.136) имеем

$$\begin{aligned} W_0(z) &= \frac{\delta}{\delta_1} \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{k_H}{p^2} \right\} = \frac{\delta}{\delta_1} \frac{z-1}{z} \frac{k_H T z}{(z-1)^2} = \\ &= \frac{\delta}{\delta_1} \frac{k_H T}{z-1} = \frac{K_H T}{z-1} = \frac{5}{z-1}, \end{aligned}$$

где $K_H = \delta_1^{-1} \delta k_H = 50$ с⁻¹.

Для экстраполятора первого порядка в соответствии с формулой (2.143) имеем

$$\begin{aligned} W_0(z) &= \frac{\delta}{\delta_1} \left(\frac{z-1}{z} \right)^2 \mathcal{Z} \left\{ \frac{k_H}{p^2} + \frac{k_H}{p^3 T} \right\} = \\ &= \frac{\delta}{\delta_1} \left(\frac{z-1}{z} \right)^2 \left[\frac{k_H T z}{(z-1)^2} + \frac{k_H T z (z+1)}{2 (z-1)^3} \right] = \\ &= \frac{K_H T (3z-1)}{2z(z-1)} = \frac{2,5 (3z-1)}{z(z-1)}. \end{aligned}$$

Экстраполяторы более высоких порядков. Рассмотрим теперь использование экстраполяторов второго и более высоких порядков. Идея работы экстраполяторов заключается в использовании обратных разностей первого и более высоких порядков аналогично тому, как это было сделано в формуле (2.141). Вначале обратимся к экстраполятору второго порядка.

На рис. 2.19 изображены штриховой линией изменения производящей функции $x(t)$, в качестве которой для

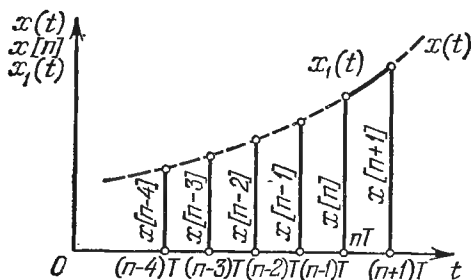


Рис. 2.19. Экстраполирование выходной функции.

случая $D(z) = 1$ можно принять, как и ранее, величину $\delta_1^{-1}\delta e(t)$, и сплошной линией — требуемый закон экстраполирования $x_1(t)$ на участке $nT \leq t < (n+1)T$. На участке экстраполяции изменение выходной величины должно соответствовать квадратичной параболе

$$x_1(t - nT) = x[n] + a_1 \frac{t - nT}{T} + a_2 \frac{(t - nT)^2}{2T^2}. \quad (2.144)$$

Запишем условия прохождения этой параболы через точки, соответствующие времени $t - nT = -T$ и $t - nT = -2T$:

$$x[n-1] = x[n] - a_1 + \frac{a_2}{2},$$

$$x[n-2] = x[n] - 2a_1 + 2a_2.$$

Отсюда можно найти

$$a_1 = 0,5(3x[n] - 4x[n-1] + x[n-2]) = \nabla x[n] + \frac{\nabla^2 x[n]}{2},$$

$$a_2 = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2] = \nabla^2 x[n].$$

Следовательно, формула экстраполяции (2.144) приобретает вид

$$x_1(t - nT) = x[n] + \left(\nabla x[n] + \frac{\nabla^2 x[n]}{2} \right) \frac{t - nT}{T} + \nabla^2 x[n] \frac{(t - nT)^2}{2T^2}. \quad (2.145)$$

Вводя новую переменную $u = (t - nT) T^{-1}$, имеем

$$x_1(Tu) = x[n] + \left(\nabla x[n] + \frac{\nabla^2 x[n]}{2} \right) u + \nabla^2 x[n] \frac{u^2}{2}. \quad (2.146)$$

Выражения (2.145) и (2.146) справедливы при $nT \leq t \leq (n+1)T$ или, соответственно, при $0 \leq u < 1$.

Аналогично проделанному выше можно показать, что в этом случае передаточная функция непрерывной части должна определяться по формуле

$$W_0(z) = \frac{\delta}{\delta_1} \left(\frac{z-1}{z} \right)^3 \mathcal{L} \left\{ \left(\frac{1}{p} + \frac{3}{2} \frac{1}{p^2 T} + \frac{1}{p^3 T^2} \right) W_n(p) e^{-p\tau} \right\}. \quad (2.147)$$

При рассмотрении экстраполяторов более высокого порядка целесообразно использовать вторую интерполяционную формулу Ньютона [30], которая для рассматриваемого случая экстраполяции на участке $nT \leq t < (n+1)T$ может быть записана в виде

$$x_1(Tu) = x[n] + \nabla x[n] u + \frac{u(u+1)}{2} \nabla^2 x[n] + \dots + \frac{u(u+1)(u+2) \dots (u+l-1)}{l!} \nabla^l x[n], \quad (2.148)$$

где $u = (t - nT) T^{-1}$, а l — порядок экстраполятора. Так, например, если $l=2$, то из (2.148) получается

$$x_1(Tu) = x[n] + \left(\nabla x[n] + \frac{\nabla^2 x[n]}{2} \right) u + \nabla^2 x[n] \frac{u^2}{2!},$$

что совпадает с формулой (2.146).

При $l=3$ формула экстраполяции (2.148) будет иметь вид

$$x_1(Tu) = x[n] + \left(\nabla x[n] + \frac{\nabla^2 x[n]}{2} + \frac{\nabla^3 x[n]}{3} \right) u + (\nabla^2 x[n] + \nabla^3 x[n]) \frac{u^2}{2} + \nabla^3 x[n] \frac{u^3}{6}. \quad (2.149)$$

Расчетная формула для нахождения дискретной передаточной функции непрерывной части:

$$W_0(z) = \frac{\delta}{\delta_1} \left(\frac{z-1}{z} \right)^4 \approx \left\{ \left(\frac{1}{p} + \frac{11}{6} \frac{1}{p^2 T} + \frac{2}{p^3 T^2} + \frac{1}{p^4 T^3} \right) W_n(p) e^{-pT} \right\}. \quad (2.150)$$

Экстраполяторы более высокого порядка могут быть также исследованы на основе формулы (2.148).

Непрерывные экстраполяторы. В рассмотренных выше дискретных экстраполяторах характерной особенностью является сбрасывание накопленной внутри такта ошибки экстраполяции в дискретные моменты времени $t = nT$, т. е.

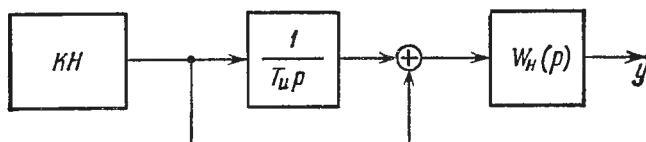


Рис. 2.20. Изодромное устройство в качестве экстраполятора первого порядка.

задача экстраполяции решается для каждого интервала длительностью T каждый раз заново с нулевой начальной ошибкой. Это вытекает из формулы экстраполяции (2.148).

Задачу экстраполяции в ЦАС могут решать непрерывные экстраполирующие устройства (изодромные устройства), построенные на интеграторах любого типа. На рис. 2.20 в качестве примера изображена структурная схема экстраполятора первого порядка.

Экстраполятор получает сигнал от преобразователя кода в непрерывную величину $KН$. Последний представляет собой экстраполятор нулевого порядка. Постоянная времени интегратора T_u в общем случае не равна периоду дискретности T , что отличает данную схему от изображенной на рис. 2.17. Кроме того, здесь отсутствует сбрасывание накопленной ошибки в дискретные моменты времени $t = nT$.

Для получения экстраполятора l -го порядка необходимо иметь l включенных последовательно изодромных устройств, работающих совместно с экстраполятором нулевого порядка в ЦВМ.

Передаточная функция непрерывной части разомкнутой ЦАС получается здесь следующим образом. Необходимо найти результирующую передаточную функцию непрерывной части в виде произведения передаточной функции изодромных устройств $W_n(p)$ на исходную передаточную функцию $W_n(p)$. Далее в соответствии с формулой (2.138) может быть определена дискретная

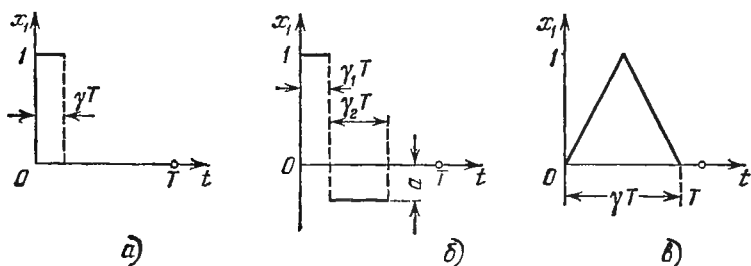


Рис. 2.21. Примеры сигналов на выходе экстраполяторов.

передаточная функция $W_0(z)$. Так, например, для схемы, изображенной на рис. 2.20, имеем

$$W_n(p) W_n(p) = \frac{1 + T_{np}}{T_{np}} W_n(p).$$

Далее находим дискретную передаточную функцию

$$W_0(p) = \frac{\delta}{\delta_1} \frac{z-1}{z} \approx \left\{ \frac{1 + T_{np}}{T_{np}} \frac{W_n(p)}{p} \right\}.$$

Однако наряду с экстраполированием сигнала подобные устройства одновременно повышают порядок астатизма системы, что может быть не всегда желательным, так как повышение порядка астатизма системы, как правило, увеличивает трудности получения заданных динамических качеств (заданного запаса устойчивости).

Экстраполяторы со сложной формой выходного импульса. В настоящее время изучаются возможности экстраполяторов с различной формой выходного сигнала. На рис. 2.21 изображены примеры таких выходных сигналов экстралятора $x_1(t)$ при поступлении с выхода ЦВМ единственного импульса единичной высоты, т. е. при $x[n] = \delta_0[n]$.

Порядок нахождения дискретной функции непрерывной части ЦАС и здесь остается прежним. Вначале следует определить изображение Лапласа подобного импульса $F_n(p)$, затем определить приведенную передаточную функцию непрерывной части $W_n(p) = F_n(p) W_h(p)$, а затем по формуле (2.123) можно найти искомую дискретную передаточную функцию $W_0(z)$.

Рассмотрим, например, экстраполятор с конечной длиной импульса γT (рис. 2.21, а), где $\gamma < 1$. Изображение Лапласа такого импульса

$$F_n(p) = \int_0^{\gamma T} 1 \cdot e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-p\gamma T}}{p}.$$

Передаточная функция непрерывной части разомкнутой системы совместно с преобразователями имеет вид

$$\begin{aligned} W_0(z) &= \frac{\delta}{\delta_1} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-p\gamma T}}{p} W_h(p) \right\} = \\ &= \frac{\delta}{\delta_1} \mathcal{Z} \left\{ \frac{W_h(p)}{p} \right\} - \frac{\delta}{\delta_1} z^{-1} \mathcal{Z}_\varepsilon \left\{ \frac{W_h(p)}{p} \right\}, \quad (2.151) \end{aligned}$$

где $\varepsilon = 1 - \gamma$. При учете запаздывания $\tau \neq 0$ и при выполнении условия $\gamma T + \tau < T$ формула (2.151) сохраняется, но следует положить $\varepsilon = 1 - \gamma - \frac{\tau}{T}$. Если $\gamma T + \tau > T$, то следует исходить из более общей формулы (2.53).

Формулу (2.151) можно также представить в виде

$$\begin{aligned} W_0(z) &= \frac{\delta}{\delta_1} \mathcal{Z} \{ h_n[n] \} - \frac{\delta}{\delta_1 z} \mathcal{Z}_\varepsilon \{ h_n[n, \varepsilon] \} = \\ &= \frac{\delta}{\delta_1} [H_n(z, 0) - z^{-1} H_n(z, \varepsilon)], \quad (2.152) \end{aligned}$$

где $h_n[n, \varepsilon]$ — переходная функция непрерывной части системы, а $H_n(z, \varepsilon)$ — изображение этой функции.

Пусть, например, непрерывная часть системы имеет передаточную функцию

$$W_h(p) = \frac{K}{1 + T_1 p},$$

где $K = \frac{\delta}{\delta_1} k_n$ — общий коэффициент усиления разомкнутой системы совместно с преобразователями. Этой передаточной функции соответствует переходная функция $h_n(t) =$

$= K(1 - e^{-\alpha t})$, где $\alpha = T_1^{-1}$. Тогда в соответствии с (2.152) и таблицей 2.1 получаем

$$W_0(z) = K \left[\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)} - \frac{1}{z-1} + \frac{d^\varepsilon}{z-d} \right] = \\ = K \frac{d^\varepsilon - d}{z-d} = K \frac{d(d^\gamma - 1)}{z-d},$$

где $d = e^{-\alpha T}$, $\varepsilon = 1 - \gamma$.

При $\gamma \ll 1$ в формуле (2.151) можно приближенно принять $e^{-\gamma p T} \approx 1 - \gamma p T$. Тогда получим

$$W_0(z) \approx \gamma T \sum \{W_n(p)\}. \quad (2.153)$$

Формула (2.153) будет справедлива, если можно пренебречь влиянием конечной длительности импульса. Это эквивалентно замене коротких прямоугольных импульсов, которые генерируются реальным импульсным элементом, серией одинаковых с ними по площади импульсных функций (δ -функций). В свою очередь это эквивалентно замене $W_s(p) \approx \gamma T$. Такая замена обоснована, если непрерывная часть реагирует практически одинаково на реальные конечные импульсы и на равные по площади импульсы типа δ -функций. В большинстве случаев для выполнения этого достаточно, чтобы постоянные времени системы были больше продолжительности импульса, т. е. $T_i > \gamma T$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

Аналогичным образом находятся передаточные функции в случае иной формы выходного сигнала преобразователя, например, для изображенных на рис. 2.21, б и в.

§ 2.4. Передаточные функции ЦВМ

Передаточная функция ЦВМ представляет собой отношение изображений входной и выходной величин (рис. 2.13), взятых в безразмерной (цифровой) форме:

$$D(z) = \frac{X_0(z)}{E_0(z)} = \frac{b_s + b_{s-1}z + \dots + b_0z^s}{a_k + a_{k-1}z + \dots + a_0z^k}, \quad (2.154)$$

где $E_0(z)$ и $X_0(z)$ — изображения (z -преобразования) решетчатых функций $e_0[n]$ и $x_0[n]$. Заметим, что всегда должно быть $k \geq s$. Поделим числитель и знаменатель (2.154) на z^k . Тогда для предельного случая $s = k$ имеем

$$D(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_kz^{-k}}{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_kz^{-k}}. \quad (2.155)$$

Из последнего выражения может быть получено разностное уравнение типа (2.98) при $l = k$:

$$\begin{aligned} a_0 x_0[n] + a_1 x_0[n-1] + \dots + a_k x_0[n-k] = \\ = b_0 e_0[n] + b_1 e_0[n-1] + \dots + b_k e_0[n-k], \end{aligned} \quad (2.156)$$

соответствующее линейному алгоритму работы ЦВМ.

Если в установившемся режиме, т. е. при $z = 1$, передаточная функция ЦВМ имеет конечное значение $D(1) = k_0$, то это соответствует реализации алгоритмом работы машины дискретного звена статического типа. В этом случае передаточную функцию ЦВМ можно представить в виде $D(z) = k_0 D_0(z)$. Для $D_0(z)$ выполняется условие $D_0(1) = 1$. Коэффициент k_0 представляет собой коэффициент передачи ЦВМ. Рассмотрим теперь возможные значения коэффициента k_0 . Будем считать, что входная величина $e_0[n]$ рассматривается в виде целого числа, определяющего содержащееся в нем число единиц младшего разряда входного преобразователя. Выходную величину $x_0[n]$ также будем рассматривать в виде целого числа, определяющего содержащееся в нем число единиц младшего разряда выходного преобразователя. Коэффициент k_0 определяет при этом число единиц младшего разряда выходного преобразователя, которое будет содержаться в установившемся значении $x_0[n]$ при входном сигнале $e_0[n] = 1[n]$. При этом k_0 — целое число, которое удобно выбирать в виде целой степени двойки, т. е. в виде 2^β , где β — целое число.

Значение $k_0 = 1$ соответствует единичному коэффициенту передачи ЦВМ. Этот случай является распространенным. При $k_0 > 1$ будет усиление входного сигнала в установившемся режиме. Случай $k_0 < 1$ здесь невозможен, так как наименьшее значение $k_0 = 1$. Однако случай $k_0 < 1$ можно определить через величину $e_0[n] = k_0^{-1} \cdot 1[n]$, которую надо иметь на входе, чтобы в установившемся режиме иметь на выходе $x_0 = 1$. Очевидно, что этот случай соответствует ослаблению входного сигнала в k_0 раз. При этом k_0^{-1} — целое число, которое также удобно выражать в виде 2^β .

Рассмотрим теперь возможные случаи вида $D(z)$, определяемые значениями коэффициентов, входящих в (2.155).

1. Пусть формула (2.155) имеет вид

$$D(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_k z^{-k} = k_0 (B_0 + B_1 z^{-1} + \dots + B_k z^{-k}). \quad (2.157)$$

Если коэффициенты $B_0, B_1, \dots, B_k$ суть целые числа, то, как следует из разностного уравнения (2.156), записанного для передаточной функции (2.157),

$$x_0[n] = k_0 (B_0 e_0[n] + \dots + B_k e_0[n-k]), \quad (2.158)$$

выходная величина ЦВМ, определяемая этим алгоритмом работы, всегда будет целым числом, кратным k_0 , как в установившемся, так и в переходном режимах.

Выбор значения $k_0 = 1$ здесь возможен и целесообразен. Этот случай изображен на рис. 2.22, а, где показаны разрядные сетки входной величины e_0 , выходной величины x_0 и арифметического устройства АУ. Бездействующие разряды показаны штриховой линией. Показано также прохождение сигнала в установившемся режиме при $e_0[n] = 1[n]$.

Выбор $k_0 > 1$ здесь невозможен. Действительно, раз на выходе ЦВМ может появляться только величина, кратная k_0 , то число k_0 и будет представлять собой единицу младшего разряда выходного преобразователя. Если и предусмотреть в нем еще более мелкие единицы выходной величины, то они все равно никогда не будут работать и их введение не имеет смысла. Это показано на рис. 2.22, б.

В случае целочисленных коэффициентов формулы (2.158) оказываются бездействующими и дополнительные разряды арифметической части ЦВМ. Младший разряд входного преобразователя будет при этом и действующим младшим разрядом арифметического устройства.

Случай, когда $k_0 = 2^{-\beta} < 1$, вообще говоря, здесь возможен. Однако обычно и его следует считать нерациональным, так как он практически эквивалентен закруглению входных преобразователей. Это объясняется тем, что для получения выходного сигнала хотя бы единичного значения на входе ЦВМ должно быть k_0^{-1} единиц младшего разряда входного преобразователя. Однако уменьшение значения единицы младшего разряда, которая была выше обозначена символом δ_1 , представляет собой серьезную техническую проблему. Поэтому приходится ориентироваться на то значение, которое может быть практически реализовано во входном преобразователе. Введение $k_0^{-1} > 1$ означает, что чувствительность преобразователя будет не δ_1 , а $k_0^{-1}\delta_1$. Это показано на рис. 2.22, в, где стрелками

изображено прохождение сигнала в установившемся режиме при $e_0[n] = k_0^{-1} \cdot 1[n]$.

2. Пусть рассматриваемая передаточная функция (2.155) сводится к виду

$$D(z) = \frac{k_0(B_0 + B_1z^{-1} + \dots + B_kz^{-k})}{1 + A_1z^{-1} + \dots + A_kz^{-k}}, \quad (2.159)$$

а коэффициент передачи k_0 и все остальные коэффициенты,

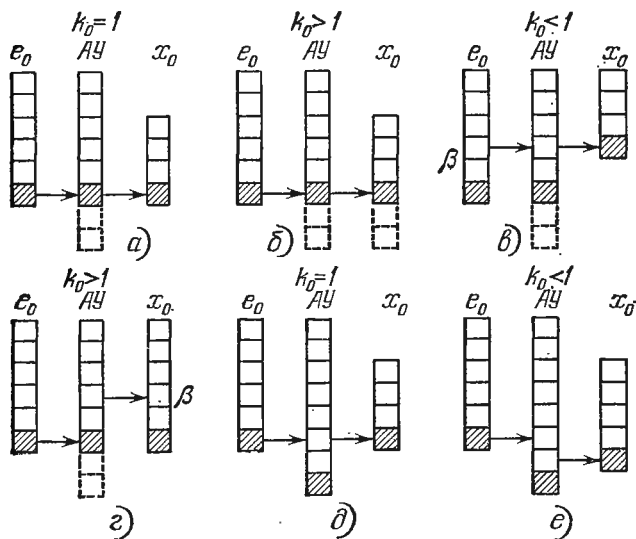


Рис. 2.22. Разрядные сетки ЦВМ.

входящие в (2.159), суть целые числа. Разностное уравнение в этом случае имеет вид

$$x_0[n] = k_0(B_0e_0[n] + B_1e_0[n-1] + \dots + B_ke_0[n-k]) - (A_1x_0[n-1] + A_2x_0[n-2] + \dots + A_kx_0[n-k]). \quad (2.160)$$

Из него следует, что при целочисленности $e_0[n]$ величина $x_0[n]$ также может принимать только целочисленные значения, однако не обязательно кратные k_0 . Это значит, что дополнительные разряды арифметического устройства ЦВМ здесь работать не будут и никакого округления вычисленной величины $x_0[n]$ не требуется.

В этом случае выбор значения $k_0 = 1$ возможен и целесообразен. Он совпадает с изображенным на рис. 2.22, а. Выбор $k_0 = 2^b > 1$ возможен, но, как правило, оказывается нецелесообразным вследствие увеличения общего числа разрядов выходного преобразователя и, следовательно, усложнения последнего.

Поясним сказанное примером. Пусть при динамическом расчете системы с ЦВМ оказалось, что в некотором установившемся режиме для обеспечения воспроизведения требуемого закона движения объекта и парирования действующих возмущений на входе ЦВМ будет существовать постоянный по величине сигнал $e_0[n] = m$, представляющий собой целое число. Тогда на выходе ЦВМ будет существовать сигнал $x_0[n] = m_1 = k_0 m$.

Значение m_1 соответствует числу единиц младшего разряда выходного преобразователя, которое требуется для обеспечения рассматриваемого режима. При увеличении k_0 это число возрастает, что соответствует переходу к более мелким единицам выходного преобразователя и увеличению его общего числа разрядов.

Это поясняет рис. 2.22, г, на котором стрелками показано прохождение сигнала в установившемся режиме при $e_0[n] = 1$.

Однако следует заметить, что окончательный выбор значения $k_0 = 1$ или $k_0 > 1$ может быть сделан только после исследования дополнительных ошибок и периодических режимов, вызванных квантованием по уровню.

Случай $k_0 = 2^{-b} < 1$ здесь, как и ранее, обычно нецелесообразен вследствие его эквивалентности закруглению входного преобразователя (см. рис. 2.22, в).

3. Пусть теперь рассматривается передаточная функция (2.159) при целочисленности коэффициента передачи k_0 и невыполнении условия целочисленности всех остальных коэффициентов.

Тогда, как следует из (2.160), при вычислении в арифметическом устройстве величины $x_0[n]$ она может быть как целым, так и дробным числом. Это значит, что в арифметическом устройстве будут действовать дополнительные младшие разряды, которые необходимы для повышения точности вычислений. После завершения вычислений должно быть сделано округление найденного значения x_0 .

Округление может производиться до целых значений. Это будет соответствовать $k_0 = 1$ (рис. 2.22, д). Можно ввести округление до целых значений величины 2^β , где β — целое число. Это будет эквивалентно введению коэффициента передачи $k_0 = 2^\beta > 1$, что изображено на рис. 2.22, е.

Как и ранее, увеличение значения k_0 по сравнению с единицей приводит к усложнению выходного преобразователя (увеличивает число его разрядов).

Случай $k_0 < 1$ мало целесообразен вследствие закругления входных преобразователей.

Если в ЦВМ осуществляется интегрирование входных сигналов, аналогом которого в дискретных системах является суммирование, определяемое формулами (2.26) или (2.27), то в соответствии с формулами изображений сумм (2.66) и (2.68) знаменатель передаточной функции ЦВМ (2.155) должен иметь множитель $(z - 1)$. Это дает возможность представить передаточную функцию ЦВМ в виде

$$D(z) = \frac{b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + \dots + b_k}{(z-1)(a_1 z^{k-1} + a_2 z^{k-2} + \dots + a_k)} = \frac{k'_0 D'_0(z)}{z-1}, \quad (2.161)$$

где

$$k'_0 = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_k}{a_1 + a_2 + \dots + a_k}.$$

Функция $D'_0(z)$ выбрана здесь так, что $D'_0(1) = 1$. Тогда в установившемся режиме при $e_0[n] = 1[n]$ на выходе ЦВМ будет существовать линейно нарастающее значение $x_0[n]$, первая разность которого $\Delta x_0[n] = \nabla x_0[n] = \text{const}$ в соответствии с (2.73) будет в пределе иметь вид

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x_0[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \frac{k'_0 D'_0(z)}{(z-1)} \frac{z}{z-1} = k'_0,$$

а производная производящей функции —

$$\left[\frac{dx_0(t)}{dt} \right]_{\text{уст}} = \frac{\Delta x_0[\infty]}{T} = \frac{k'_0}{T}.$$

Ввиду относительной малости обычно используемых периодов повторения допустимые значения коэффициента k'_0 , как правило, малы ($k'_0 \ll 1$).

Формула (2.161) может быть часто представлена в виде суммы дробей

$$D(z) = \frac{k'_0}{z-1} + \frac{B_1 z^{k-1} + \dots + B_k}{a_1 z^{k-1} + \dots + a_k} = \frac{k'_0}{z-1} + k_0 D_0(z). \quad (2.162)$$

Здесь функция $D_0(z)$ выбрана так, что $D_0(1) = 1$. Выбор значений коэффициента k_0 определяется соображениями, изложенными выше.

При двойном интегрировании в знаменателе передаточной функции $D(z)$ появится сомножитель $(z-1)^2$, при тройном — $(z-1)^3$ и т. д.

§ 2.5. Передаточные функции ЦАС

Результирующая передаточная функция разомкнутой системы с ЦВМ (рис. 2.13) может быть определена как произведение передаточных функций непрерывной части и ЦВМ:

$$W(z) = D(z) W_0(z). \quad (2.163)$$

Формула (2.163) дает возможность при учете (2.100) написать зависимость между изображениями выходной величины $y[n]$ и входной $e[n]$:

$$Y(z) = W(z) E(z). \quad (2.164)$$

Здесь входная и выходная величины рассматриваются в дискретные моменты времени $t = nT$ ($n = 0, 1, \dots$), т. е. $\varepsilon = 0$. При $\varepsilon = 0$ имеем $E(z) = G(z) - Y(z)$, где $G(z)$ — изображение решетчатой функции $g[n]$, представляющей собой задающее воздействие. Подставляя значения изображения ошибки $E(z)$ в (2.164), имеем

$$Y(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)} G(z) = H(z) G(z), \quad (2.165)$$

$$E(z) = \frac{G(z)}{1 + W(z)} = H_e(z) G(z). \quad (2.166)$$

Здесь введены дискретная передаточная функция замкнутой системы

$$H(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)} \quad (2.167)$$

и дискретная передаточная функция замкнутой системы для ошибки

$$H_e(z) = \frac{1}{1 + W(z)}. \quad (2.168)$$

Условием применимости формул (2.165) и (2.166) является требование равенства нулю приведенной весовой

функции в момент $t=0$, т. е. $\omega_n(0)=0$. В системах с ЦВМ, где отсутствует запаздывание ($\tau=0$), требуется, чтобы степень числителя передаточной функции непрерывной части $W_n(p)$ по крайней мере на единицу была бы меньше степени знаменателя. Если имеется запаздывание $\tau \neq 0$, то достаточно, чтобы степень числителя $W_n(p)$ была бы не больше степени знаменателя.

Передаточные функции $W(z)$, $H(z)$ и $H_e(z)$ могут быть использованы для оценки устойчивости и качества ЦАС.

Можно рассматривать выходной сигнал в дискретные моменты времени $t=(n+\epsilon)T$, где $n=0, 1, \dots$, а $\epsilon>0$. Тогда нужно использовать приведенную весовую функцию $\omega_n[n, \epsilon]$, которой соответствует дискретная передаточная функция $W(z, \epsilon)$. В этом случае изображение выходной величины

$$Y(z, \epsilon) = W(z, \epsilon) E(z, 0). \quad (2.169)$$

Ошибка рассматривается при $\epsilon=0$, так как именно в эти моменты времени действует импульсный элемент на входе ЦВМ, т. е. $E(z, 0) = G(z, 0) - Y(z, 0)$. В результате можно получить формулу для нахождения изображения выходной величины:

$$Y(z, \epsilon) = \frac{W(z, \epsilon)}{1 + W(z, 0)} G(z, 0). \quad (2.170)$$

Однако формула (2.170) обычно не используется при оценке качества ЦАС, так как для этой цели практически всегда достаточно воспользоваться выражениями (2.165) и (2.166). Только в случае необходимости просмотреть поведение выходной величины между дискретными значениями $t=nT$ приходится обращаться к формуле (2.170).

Формулы (2.163) — (2.170) относятся к одноканальной ЦАС простейшего вида с единичной обратной связью. Для этого случая упрощенная структурная схема изображена на рис. 2.23, а. Схема содержит дискретное звено (ЦВМ) с передаточной функцией $D(z)$, непрерывное звено с приведенной передаточной функцией $W_n(p)$, включающее в себя экстраполятор и преобразователи, два идеальных импульсных элемента первого рода (на входе дискретного звена) и одно идеальное импульсное звено второго рода (на входе непрерывного звена).

Рассмотренная методика отыскания передаточных функций ЦАС может быть распространена и на другие возмож-

ные структурные схемы более сложного вида. Так, например, на рис. 2.23, б изображена структурная схема ЦАС, содержащая в цепи главной обратной связи непрерывное

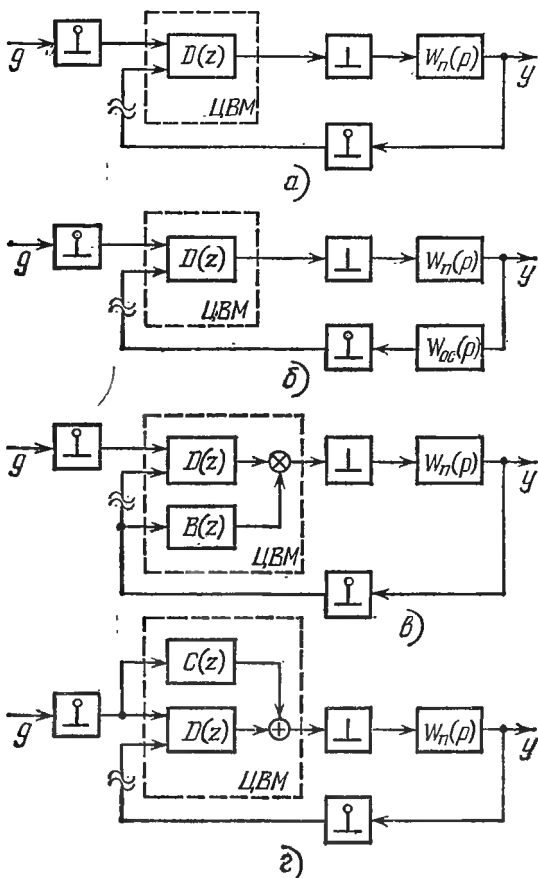


Рис. 2.23. Простейшие структурные схемы ЦАС.

звено с передаточной функцией $W_{oc}(p)$. В этом случае следует ввести в рассмотрение две дискретные передаточные функции разомкнутой системы: передаточную функцию прямого канала управления

$$W_1(z) = D(z) W_0(z) = D(z) \approx \{W_n(p)\} \quad (2.171)$$

и передаточную функцию всего разомкнутого канала

$$W_2(z) = D(z) W_n W_{oc}(z) = D(z) \mathcal{Z} \{W_n(p) W_{oc}(p)\}, \quad (2.172)$$

где $W_n W_{oc}(z)$ — передаточная функция всей непрерывной части разомкнутого канала, определяемая в соответствии с замечаниями к формуле (2.129). В результате для схемы, изображенной на рис. 2.23, б, можно найти

$$Y(z) = \frac{W_1(z)}{1 + W_2(z)} G(z) = \frac{D(z) W_0(z) G(z)}{1 + D(z) W_n W_{oc}(z)}. \quad (2.173)$$

Аналогичное выражение может быть получено и для смещенного значения выходной величины, т. е. при $\varepsilon \neq 0$.

В схеме, изображенной на рис. 2.23, в, в цепи дополнительной отрицательной обратной связи, охватывающей непрерывную часть системы, используется дискретное звено с передаточной функцией $B(z)$. Это звено реализуется в ЦВМ. В этом случае дискретная передаточная функция разомкнутой ЦАС (при замкнутой цепи дополнительной обратной связи), в соответствии с известными формулами для передаточных функций совокупности звеньев [8], будет иметь вид

$$W(z) = \frac{D(z) W_0(z)}{1 + B(z) W_0(z)}.$$

Изображения выходной величины и ошибки:

$$\left. \begin{aligned} Y(z) &= \frac{W(z) G(z)}{1 + W(z)} = \frac{D(z) W_0(z) G(z)}{1 + [D(z) + B(z)] W_0(z)} = H(z) G(z), \\ E(z) &= \frac{[1 + B(z) W_0(z)] G(z)}{1 + [D(z) + B(z)] W_0(z)} = H_e(z) G(z). \end{aligned} \right\} \quad (2.174)$$

В частном случае, когда вся коррекция осуществляется только дополнительной обратной связью, т. е. при $D(z) = 1$, формулы (2.174) упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} Y(z) &= \frac{W_0(z) G(z)}{1 + [1 + B(z)] W_0(z)}, \\ E(z) &= \frac{[1 + B(z) W_0(z)] G(z)}{1 + [1 + B(z)] W_0(z)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.175)$$

На рис. 2.23, г изображены структурная схема комбинированного управления по ошибке и по задающему воздействию. Изображения выходной величины и ошибки

для нее имеют вид

$$\left. \begin{aligned} Y(z) &= \frac{[D(z) + C(z)] W_0(z) G(z)}{1 + D(z) W_0(z)} = H_g(z) G(z), \\ E(z) &= \frac{[1 - C(z) W_0(z)] G(z)}{1 + D(z) W_0(z)} = H_{eg}(z) G(z). \end{aligned} \right\} \quad (2.176)$$

Здесь $C(z)$ — дискретная передаточная функция ЦВМ, соответствующая алгоритму обработки входной величины, $H_g(z)$ и $H_{eg}(z)$ — эквивалентные передаточные функции замкнутой системы.

Схемы, изображенные на рис. 2.23, относятся к простейшим и не исчерпывают всех возможных вариантов. Однако методика нахождения изображений и передаточных функций остается аналогичной и в иных случаях. Так, например, если рассмотреть объединение схем, изображенных на рис. 2.23, в и г, то при $D(z) = 1$ изображения можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} Y(z) &= \frac{[1 + C(z)] W_0(z) G(z)}{1 + [1 + B(z)] W_0(z)}, \\ E(z) &= \frac{[1 + [B(z) - C(z)] W_0(z)] G(z)}{1 + [1 + B(z)] W_0(z)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.177)$$

Заметим, что все изображенные на рис. 2.23 структурные схемы ЦАС могут быть представлены в другом виде, если вместо приведенных передаточных функций непрерывных частей $W_n(p)$ и $W_{oc}(p)$ использовать дискретные передаточные функции непрерывных частей $W_0(z)$ и $W_{oc}^0(z)$. Тогда все идеальные импульсные элементы второго рода должны быть заменены на идеальные импульсные элементы первого рода.

Передаточные функции для возмущений. На рис. 2.24 изображена структурная схема одноконтурной ЦАС с единичной обратной связью при наличии возмущения $f(t)$, приложенного к непрерывной части. Перенесем воздействие на вход ЦАС в виде воздействия $f_1(t)$. Вход ЦАС в данном случае совпадает с выходом непрерывной части. В соответствии с правилами преобразования структурных схем [8], если обозначить преобразование Лапласа функции $f(t)$ в виде $F_{\text{л}}(p)$, возмущению $f_1(t)$ будет соответствовать преобразование Лапласа $F_{1\text{л}}(p) = W_{\text{н2}}(p) F_{\text{л}}(p)$. Далее можно найти z -преобразование эквивалентного

воздействия на входе системы

$$F_1(z) = \mathcal{Z} \{ W_{H2}(p) F_L(p) \} = W_{H2} F(z). \quad (2.178)$$

Для этого воздействия в разомкнутой системе $Y(z) = -E(z) = F_1(z)$, а в замкнутой при $G(z) = 0$

$$-Y(z) = E(z) = -\frac{F_1(z)}{1 + D(z) W_0(z)} = -\frac{W_{H2} F(z)}{1 + D(z) W_0(z)}. \quad (2.179)$$

Таким образом, в случае воздействий, приложенных не на входе ЦАС, дискретная функция может быть определена только для эквивалентного воздействия, полученного [пересчетом реального воздействия на вход ЦАС.

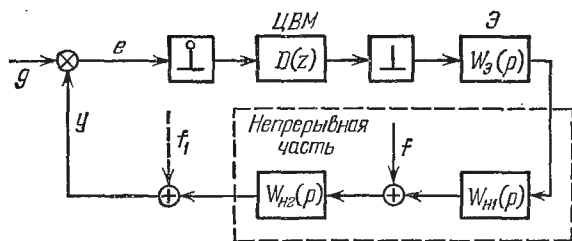


Рис. 2.24. Действие возмущения в ЦАС.

Передаточная функция в этом случае совпадает с точностью до знака с дискретной передаточной функцией для ошибки.

Частотные передаточные функции. Пусть на входе разомкнутой ЦАС простейшего вида с единичной обратной связью (рис. 2.23, а) действует решетчатая функция, представляющая собой синусоидальную последовательность

$$e[n] = a \sin(n\omega T + \varphi) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (2.180)$$

где a и φ — соответственно амплитуда и начальная фаза, T — период повторения, $T_1 = 2\pi\omega^{-1}$ — период синусоидальной последовательности. В отличие от непрерывной гармонической функции, синусоидальная последовательность (2.180) представляет собой в общем случае непериодическую функцию n . Она представляет собой периодическую функцию n тогда и только тогда, когда период повторения T и период гармонической функции T_1 — соизмеримые числа. Кроме того, амплитуда a не

обязательно является тем максимальным значением, которого могут достигать те или иные члены последовательности. Амплитуда всегда является лишь верхней границей, но не обязательно максимумом этих членов.

Отметим также, что последовательность (2.180) не изменится, если заменить частоту $f = \omega/2\pi$ частотой $f + kf_0$, где $f_0 = T^{-1}$ — частота работы ключа, а k — целое число. Невозможно различить две частоты, разность между которыми равна целому кратному частоты повторения f_0 . Так, например, синусоидальная последовательность с частотой $f = f_0$ состоит из одного постоянного члена, повторяющегося неограниченное число раз, и, следовательно, она неотличима от последовательности с нулевой частотой $f = 0$.

Из предыдущего следует, что, меняя частоту синусоидальной последовательности на входе f в пределах от 0 до f_0 , можно охватить весь диапазон возможных частот.

Можно также показать, что достаточно исследовать поведение импульсного фильтра в диапазоне частот $0 \leq f \leq 0,5f_0$, так как для интервала частот $0,5f_0 \leq f \leq f_0$ может быть использована дополнительная частота f' , выбранная так, чтобы выполнялось условие $f + f' = f_0$. При этом начальная фаза φ должна быть заменена начальной фазой $\pi - \varphi$. Это положение аналогично тому, что при исследовании непрерывных систем в интервале частот $-\infty < f < \infty$ достаточно охватить только положительные частоты, т. е. интервал $0 \leq f < \infty$.

Синусоидальная последовательность (2.180) может быть заменена символической записью последовательности комплексных чисел

$$e_c[n] = ae^{j(n\omega T + \varphi)} = \dot{a}e^{jn\omega T}, \quad (2.181)$$

где $\dot{a} = ae^{j\varphi}$ — комплексное число. Как и в случае непрерывных систем, символическость записи заключается в том, что на самом деле $e[n]$ равно мнимой составляющей правой части (2.181).

Введем обозначение $e^{j\omega T} = z$. Тогда последовательность (2.181) приобретает вид

$$e_c[n] = \dot{a}z^n. \quad (2.182)$$

В этой формуле z — произвольное комплексное число с модулем, равным единице. Следовательно, каждой

частоте соответствует определенная точка на окружности единичного радиуса, расположенной на комплексной плоскости (рис. 2.25). Двум эквивалентным частотам, т. е. частотам, различающимся на целое кратное частоты повторения, соответствует одна и та же точка на этой окружности. Частоте $\omega=0$ соответствует точка на вещественной оси $z=1$, а частоте $\omega=0,5\omega_0$ — диаметрально противоположная точка $z=-1$. Частоте $\omega=0,25\omega_0$ соответствует точка $z=j$ и т. д. Когда частота ω изменяется от 0 до ω_0 , представляющая ее точка совершает один полный оборот против часовой стрелки. Двум симметричным относительно оси вещественных точкам, т. е. двум комплексным сопряженным числам с модулями, равными единице, соответствуют две взаимно дополняющие частоты ω и ω' . Следовательно, совокупность точек, расположенных на одной верхней (или нижней) полуокружности единичного радиуса, достаточна для отображения всего многообразия частот.

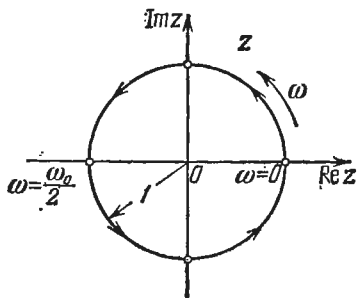


Рис. 2.25. Комплексная плоскость величины z .

Найдем теперь реакцию разомкнутой ЦАС на синусоидальную последовательность (2.180). Будем предполагать при этом, что в разомкнутом состоянии канал управления ЦАС устойчив. Поскольку синусоидальная последовательность на входе ограничена, то и реакция устойчивого канала управления должна представлять собой тоже ограниченную последовательность на выходе — $y[n] = b \sin(n\omega T + \varphi + \psi)$.

В соответствии с формулой (2.119) выходная величина (решетчатая функция) будет записываться для установившегося режима в символическом виде

$$\begin{aligned}
 y_c[n] &= \sum_{m=0}^{\infty} e_c[m] \omega_n[n-m] = \sum_{m=0}^{\infty} e_c[n-m] \omega_n[m] = \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \omega_n[m] dz^{n-m} = dz^n \sum_{m=0}^{\infty} \omega_n[m] z^{-m}. \quad (2.183)
 \end{aligned}$$

Эта формула может быть представлена в следующем символическом виде:

$$y_c[n] = be^{j(\omega nT + \varphi + \psi)} = bz^n = az^n W(z) = e_c[n] W(z), \quad (2.184)$$

где $z = e^{j\omega T}$, $\omega = 2\pi T_1^{-1}$, $b = be^{j(\varphi + \psi)}$. Здесь введена величина

$$W(e^{j\omega T}) = \sum_{m=0}^{\infty} w_n[m] z^{-m}, \quad (2.185)$$

$$|W(e^{j\omega T})| = \left| \frac{b}{a} \right| = \frac{b}{a}, \quad \arg W(e^{j\omega T}) = \psi,$$

которая по своему физическому смыслу аналогична частотной передаточной функции непрерывной системы. Как видно из (2.185), для линейного канала ЦАС она зависит только от частоты ω и является периодической функцией частоты с периодом $\omega_0 = 2\pi T^{-1}$.

Амплитуду и фазу последовательности выходного сигнала (2.184) можно найти обычным приемом по комплексному выражению $W(z)$. Отношение амплитуд выходного и входного сигналов равно модулю, а разность их фаз — аргументу этого выражения.

В общем случае, когда $\varepsilon \neq 0$, формула (2.184) может быть представлена в виде

$$y_c[n, \varepsilon] = W(z, \varepsilon) e_c[n], \quad z = e^{j\omega T}, \quad (2.186)$$

где $W(z, \varepsilon)$ — передаточная функция разомкнутого канала управления (2.163), записанная здесь для общего случая, когда $\varepsilon \neq 0$.

Таким образом, частотная передаточная функция может быть найдена из дискретной передаточной функции $W(z)$ или $W(z, \varepsilon)$ посредством подстановки $z = e^{j\omega T}$, в результате чего получим $W(e^{j\omega T})$ или $W(e^{j\omega T}, \varepsilon)$.

Изложенное можно распространить на иные передаточные функции. Так, например, для замкнутой ЦАС можно получить частотную передаточную функцию $H(e^{j\omega T})$, связывающую между собой в символическом виде синусоидальную последовательность $g[n]$ на входе и последовательность $y[n]$ на выходе. Частотная передаточная функция $H_e(e^{j\omega T})$ связывает между собой в символическом виде синусоидальные последовательности $g[n]$ и $e[n]$. При этом для получения ограниченных последователь-

ностей $y[n]$ и $e[n]$ требуется, чтобы рассматриваемая ЦАС была устойчива в замкнутом состоянии.

Все рассмотренное выше относится не только к структурной схеме (рис. 2.23, а), которая была взята для иллюстрации, но и к другим возможным схемам.

На основе частотных передаточных функций $W(e^{j\omega T})$, $H(e^{j\omega T})$ и $H_e(e^{j\omega T})$ могут строиться частотные характеристики: амплитудно-фазовые (а. ф. х.), амплитудные частотные (а. ч. х.), фазовые частотные (ф. ч. х.), логарифмические (л. а. х. и л. ф. х.) и др. — в функции круговой частоты ω . Однако построение оказывается малоудобным вследствие трансцендентности выражений, содержащих частоту ω , и периодичности всех характеристик. Вследствие этого большое распространение получили частотные передаточные функции и частотные характеристики с использованием так называемой *псевдочастоты*. Переход к псевдочастоте делается на основе w -преобразования.

Введем комплексную величину w , связанную с комплексной величиной z билинейными преобразованиями:

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \quad (2.187)$$

$$w = \frac{z-1}{z+1}. \quad (2.188)$$

Сделав подстановку $z = e^{j\omega T}$, получим из (2.188)

$$w = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = j\bar{\lambda}, \quad (2.189)$$

где $\bar{\lambda} = \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$ представляет собой так называемую *относительную псевдочастоту*. Удобно ввести в рассмотрение *абсолютную псевдочастоту*

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = \frac{2\bar{\lambda}}{T}. \quad (2.190)$$

При малых частотах $\operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \approx \frac{\omega T}{2}$ и псевдочастота $\lambda \approx \omega$. Поэтому при выполнении условия $\omega T < 2$ можно в расчетах заменить псевдочастоту действительной круговой частотой, что может быть использовано, в частности, при расчетах реакции ЦАС на медленно меняющиеся гармонические сигналы на входе.

Нетрудно видеть, что при изменении частоты в пределах $-\pi_0 T \leq \omega \leq \pi/T$ псевдочастота пробегает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, а комплексная величина w движется по оси мнимых от $-j\infty$ до $+j\infty$. Внутренняя часть круга единичного радиуса (рис. 2.25) отображается при этом на левую полуплоскость. Это оказывается удобным при исследовании вопросов устойчивости ЦАС.

Таким образом, в результате подстановки (2.187) и последующей замены $w = j \frac{T}{2} \lambda$ могут быть получены частотные передаточные функции разомкнутой ЦАС:

$$W^*(j\lambda) = W \left(\frac{1+w}{1-w} \right), \quad w = j \frac{T}{2} \lambda, \quad (2.191)$$

замкнутой ЦАС:

$$H^*(j\lambda) = H \left(\frac{1+w}{1-w} \right), \quad w = j \frac{T}{2} \lambda, \quad (2.192)$$

и замкнутой ЦАС для ошибки:

$$H_e^*(j\lambda) = H_e \left(\frac{1+w}{1-w} \right), \quad w = j \frac{T}{2} \lambda. \quad (2.193)$$

Построение частотных характеристик в функции абсолютной псевдочастоты λ оказывается более удобным и поэтому широко используется.

Пример 2.3. Пусть дискретная передаточная функция разомкнутой ЦАС имеет вид

$$W(z) = \frac{KT}{z-1}.$$

Получим частотную передаточную функцию при использовании круговой частоты ω . Для этого сделаем подстановку $z = e^{j\omega T}$:

$$\begin{aligned} W(e^{j\omega T}) &= \frac{KT}{e^{j\omega T} - 1} = \frac{KT}{\cos \omega T - 1 + j \sin \omega T} = \\ &= -\frac{KT}{2} - j \frac{KT}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2}. \quad (*) \end{aligned}$$

Модуль передаточной функции —

$$A(\omega) = |W(e^{j\omega T})| = \frac{KT}{2 \left| \sin \frac{\omega T}{2} \right|}$$

и аргумент (сдвиг фаз) —

$$\psi(\omega) = \arg W(e^{j\omega T}) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\omega T}{2}.$$

Получим теперь частотную передаточную функцию при использовании абсолютной псевдочастоты:

$$W^*(j\lambda) = \frac{KT}{\frac{1+\omega}{1-\omega} - 1} = \frac{KT(1-\omega)}{2\omega} = \frac{K\left(1 - j\frac{T}{2}\lambda\right)}{j\lambda}. \quad (**)$$

Модуль передаточной функции —

$$|W^*(j\lambda)| = \frac{K\sqrt{1 + \frac{T^2\lambda^2}{4}}}{\lambda}$$

и аргумент —

$$\arg W^*(j\lambda) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{T}{2}\lambda.$$

Нетрудно видеть, что выражение (**) более удобно для практического использования, чем (*). В частности,

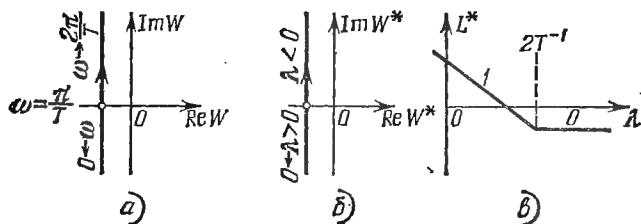


Рис. 2.26. Частотные характеристики к примеру 2.3.

для передаточной функции $W^*(j\lambda)$ легко может быть построена асимптотическая л. а. х., так как формула (**) по своему виду совпадает с обычной формой передаточных функций непрерывных систем.

На рис. 2.26 построены для рассмотренного примера амплитудно-фазовая характеристика по круговой частоте ω (рис. 2.26 а), амплитудно-фазовая характеристика по псевдочастоте λ (рис. 2.26, б) и асимптотическая л. а. х. $L^*(\lambda) = 20 \lg |W^*(j\lambda)|$ в функции псевдочастоты (рис. 2.26, в).

§ 2.6. Устойчивость и качество линеаризованных ЦАС

В цифровых автоматических системах устойчивость будет иметь место, если корни характеристического уравнения, полученного приравниванием нулю знаменателя передаточной функции замкнутой системы (2.167),

$$1 + W(e^{pT}) = 1 + W_0(e^{pT}) D(e^{pT}) = 0, \quad (2.194)$$

лежат в левой полуплоскости корней. Границей устойчивости является ось мнимых значений (рис. 2.27, а).

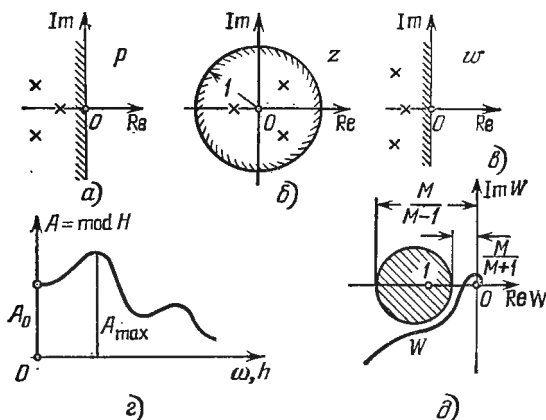


Рис. 2.27. К определению устойчивости и запаса устойчивости.

Область устойчивости в плоскости величины $p = c + j\omega$ может быть отображена на плоскость величины $z = \exp(pT)$ (рис. 2.27, б). Для этого необходимо сделать подстановку $p = j\omega$ и менять затем частоту в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. При изменении частоты ω комплексная величина $z = e^{j\omega T}$ будет изменяться так, что модуль ее $|z| = 1$ и аргумент $\arg z = \omega T$. В результате на комплексной плоскости будет получена окружность единичного радиуса. Областью устойчивости оказывается внутренняя часть круга.

Таким образом, в устойчивой системе корни характеристического уравнения замкнутой системы

$$1 + W(z) = 1 + W_0(z) D(z) = 0 \quad (2.195)$$

должны быть по модулю меньше единицы, т. е. $|z_i| < 1$ ($i = 1, 2, \dots, l$), где l — порядок характеристического уравнения (2.195), что совпадает с условием (2.38). Так, например, для характеристического уравнения первого порядка

$$z + A = 0 \quad (2.196)$$

очевидное условие устойчивости будет иметь вид $|A| < 1$.

Аналогичным образом можно показать, что для уравнения второго порядка

$$z^2 + Az + B = 0 \quad (2.197)$$

путем вычисления корней получаются три условия устойчивости:

$$\left. \begin{aligned} 1 + A + B &> 0, \\ 1 - A + B &> 0, \\ B &< 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.198)$$

Для уравнений более высокого порядка исследование устойчивости усложняется. Для облегчения задачи используется введенное выше ω -преобразование (2.188), посредством которого окружность единичного радиуса (рис. 2.27, б) отображается на мнимую ось (рис. 2.27, в). Это было показано в предыдущем параграфе.

В результате областью устойчивости на плоскости величины ω оказывается левая полуплоскость. Поэтому для передаточных функций с ω -преобразованием могут использоваться обычные критерии устойчивости, справедливые для непрерывных систем.

Рассмотрим, например, характеристическое уравнение (2.197). В результате подстановки (2.187) оно преобразуется к виду

$$(1 - A + B)\omega^2 + 2(1 - B)\omega + 1 + A + B = 0. \quad (2.199)$$

На основании известного требования положительности всех коэффициентов характеристического уравнения устойчивой непрерывной системы условия устойчивости (2.198) сразу могут быть получены из (2.199).

Для определения устойчивости замкнутой импульсной системы возможно использование критерия Найквиста. Для этой цели можно применять передаточную функцию разомкнутой системы, полученную как на основе z -преоб-

разования, так и на основе ω -преобразования. И в том и в другом случае амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы (устойчивой в разомкнутом состоянии) не должна охватывать точку $(-1, j0)$. При использовании передаточной функции $W(z)$ амплитудно-фазовая характеристика становится периодической функцией с периодом $2\pi T^{-1}$.

Оценка качества ЦАС может делаться построением кривой переходного процесса, что при использовании z -преобразования осуществляется сравнительно легко (§ 2.2), а также посредством различных критериев качества. Для оценки запаса устойчивости, так же как и в случае непрерывных систем, наиболее простым и эффективным оказывается показатель колебательности. Показатель колебательности представляет собой высоту наибольшего пика амплитудной частотной характеристики замкнутой системы, отнесенного к ее начальной ординате (рис. 2.27, z):

$$M = \frac{A_{\max}}{A_0}. \quad (2.200)$$

Он показывает склонность системы к колебаниям. Как и в случае непрерывных систем, получение заданного показателя колебательности сводится к требованию чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не заходила в некоторую запретную область [8], окружающую точку $(-1, j0)$. Это показано на рис. 2.27, d .

Установившаяся точность системы может оцениваться по коэффициентам ошибок. Аналогично непрерывным системам, начиная с некоторого момента времени ошибку импульсной системы регулирования можно представить в виде ряда

$$e[n] = c_0 g[n] + c_1 \dot{g}[n] + \frac{c_2}{2} \ddot{g}[n] + \dots, \quad (2.201)$$

где коэффициенты ошибок c_0, c_1, c_2 и т. д. представляют собой коэффициенты разложения передаточной функции по ошибке $H_e(z)$ в ряд Маклорена по степеням p , т. е.

$$c_n = \left[\frac{d^n H_e(e^{pT})}{dp^n} \right]_{p=0}. \quad (2.202)$$

Величины, обратные множителям при производных выражения (2.201), по аналогии с непрерывными систе-

мами могут называться соответствующими *добротностями*. Например, добротности по скорости и по ускорению будут

$$K_1 = c_1^{-1}, \quad K_2 = 2c_2^{-1}. \quad (2.203)$$

Вычислим, например, два первых коэффициента ошибок для системы с передаточной функцией разомкнутой цепи

$$W(z) = \frac{KT(1-d)z}{(z-1)(z-d)},$$

где $d = e^{-T/T_1}$.

Находим передаточную функцию по ошибке:

$$H_e(z) = \frac{1}{1+W(z)} = \frac{(z-1)(z-d)}{(z-1)(z-d) + KT(1-d)z}.$$

Подстановка в это выражение $p=0$ или $z=1$ дает коэффициент $c_0=0$. Для получения коэффициента c_1 находим первую производную:

$$\frac{dH_e(e^{pT})}{dp} = \frac{KT^2(1-d)(z^3 - zd)}{[(z-1)(z-d) + KT(1-d)z]^2}.$$

Подстановка $z=1$ дает коэффициент $c_1 = K^{-1}$, а также добротность по скорости $K_1 = c_1^{-1} = K$.

§ 2.7. Расчет вынужденных периодических режимов

Если на входе замкнутой системы (рис. 2.12) действует синусоидальная последовательность

$$g[n] = g_{\max} \sin(\omega nT + \varphi),$$

то расчет синусоидальных последовательностей $y[n]$ и $e[n]$ может быть сделан на основе формул (2.184) и (2.186) при использовании передаточных функций замкнутой системы.

Так, например, амплитуда ошибки (точнее, верхнее граничное значение синусоидальной последовательности для ошибки)

$$e_{\max} = g_{\max} |H_e(e^{j\omega T}, \varepsilon)| \quad (2.204)$$

и сдвиг по фазе

$$\psi = \arg H_e(e^{j\omega T}, \varepsilon). \quad (2.205)$$

В общем случае негармонической периодической последовательности с периодом M (см. § 2.2) она может быть

представлена в виде суммы конечного числа гармоник:

$$g[n] = \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N \dot{c}_k e^{j \frac{2\pi}{M} kn},$$

где N — целая часть $M/2$, а коэффициенты разложения

$$\dot{c}_k = c_k e^{j\varphi_k} = \frac{2}{M} \sum_{v=0}^{M-1} g[v] e^{-j \frac{2\pi}{M} kv}.$$

Для каждой гармоники в установившемся режиме может быть сделан расчет в соответствии с изложенным выше для синусоидальной последовательности. Поэтому в установившемся режиме для ошибки можно записать

$$e[n, \varepsilon] = \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N H_e\left(j \frac{2\pi}{M} k, \varepsilon\right) \dot{c}_k e^{j \frac{2\pi}{M} kn}, \quad (2.206)$$

где $H_e\left(j \frac{2\pi}{M} k, \varepsilon\right)$ — значение частотной передаточной функции, полученное из $H_e(z, \varepsilon)$ подстановкой $z = e^{j \frac{2\pi}{M} k}$.

Аналогичным образом по передаточной функции $H(z, \varepsilon)$ может быть получена для установившегося режима выходная величина $y[n, \varepsilon]$.

Более простой метод заключается в следующем. Рассмотрим, например, задающее воздействие $g[n]$, представляющее собой периодическую последовательность, изображение которой (2.107):

$$G(z) = \frac{z^M}{z^M - 1} \sum_{r=0}^{M-1} g[r] z^{-r} = \frac{z^M}{z^M - 1} G_0(z),$$

где $G_0(z)$ — изображение $g[n]$ на интервале $0 - M$. Пусть рассматриваемая последовательность действует на входе системы с передаточной функцией $H(z)$. Тогда изображение выходной величины

$$Y(z) = \frac{Y_1(z)}{Y_2(z)} = H(z) G(z) = Y_{\pi}(z) + Y^0(z)$$

можно представить в виде суммы изображений переходной составляющей $Y_{\pi}(z)$ и установившегося периодического режима $Y^0(z)$.

Первая составляющая определяется полюсами функции $H(z)$ и с течением времени затухает, так как система предполагается устойчивой. Периодическая составляющая на выходе может быть представлена в виде

$$Y^0(z) = \frac{z^M}{z^M - 1} Y_0^0(z) = \frac{z^M}{z^M - 1} \frac{a_0 z^M + a_1 z^{M-1} + \dots + a_{M-1} z}{z^M},$$

где $Y_0^0(z)$ — изображение $y[n]$ на интервале $0 - M$ в установившемся режиме, которое и является искомой величиной; коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_{M-1}$ должны быть определены при разложении на сумму дробно-рациональных функций $Y_{\pi}(z)$ и $Y^0(z)$. Для этой цели могут использоваться известные методы, например теорема разложения. Так, если степень $Y_1(z)$ равна степени $Y_2(z)$ и $Y_1(z) = zY_2(z)$, то

$$Y^0(z) = z \sum_{q=1}^M \frac{Y_2(z_q)}{(z - z_q) \dot{Y}_2(z_q)} = \frac{a_0 z^M + \dots + a_{M-1} z}{z^M}, \quad (2.207)$$

где z_q ($q = 1, 2, \dots, M$) — корни уравнения $z^M - 1 = 0$.

Другие возможные случаи использования теоремы разложения рассмотрены в § 2.2.

Однако при $M \gg 1$ использование формулы (2.207) сопряжено со значительными трудностями. При невысокой степени знаменателя $H(z)$ удобнее найти переходную составляющую $Y_{\pi}(z)$, а затем периодическую $Y^0(z) = Y(z) - Y_{\pi}(z)$. Далее можно найти

$$\begin{aligned} Y_0^0(z) &= \frac{z^M - 1}{z^M} [Y(z) - Y_{\pi}(z)] = \\ &= \frac{a_0 z^M + \dots + a_{M-1} z}{z^M} = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{M-1} z^{-M+1}. \end{aligned} \quad (2.208)$$

Так как полюсы $H(z)$ известны, то отыскание переходной составляющей не представляет труда. Так, например, если степень числителя $Y(z)$ меньше степени знаменателя и полюсы $H(z)$ не кратные, то

$$Y_{\pi}(z) = \sum_{i=1}^l \frac{Y_1(z_i)}{(z - z_i) \dot{Y}_2(z_i)},$$

где z_i ($i = 1, 2, \dots, l$) — полюсы $H(z)$. Если степень числителя $Y(z)$ одинакова со степенью знаменателя, но

числитель имеет общий множитель z , то можно записать

$$Y(z) = \frac{Y_1(z)}{Y_2(z)} = \frac{zY_3(z)}{Y_2(z)}.$$

Тогда

$$Y_n(z) = z \sum_{i=1}^I \frac{Y_3(z_i)}{(z - z_i) \dot{Y}_2(z_i)}.$$

(По поводу других возможных случаев см. § 2.2.)

Если выходное воздействие представляет собой симметричную периодическую последовательность с полупериодом N , изображение которой дается формулой (2.108), то аналогичная зависимость для изображения периодической последовательности выходной величины на интервале $0 - N$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} Y_0^*(z) &= \frac{z^N + 1}{z^N} Y^*(z) = \frac{z^N + 1}{z^N} [Y(z) - Y_n(z)] = \\ &= \frac{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_{N-1} z}{z^N} = \\ &= a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-N+1}, \end{aligned} \quad (2.209)$$

где $Y_n(z)$ — переходная составляющая, определяемая полюсами $H(z)$.

Пример 2.4. Рассмотрим входную последовательность в виде прямоугольной волны (рис. 2.11, в), но с полупериодом $N=3$ и систему с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{z-a}{z}.$$

Изображение периодической последовательности на входе (2.115):

$$G(z) = \frac{z^3}{z^3 + 1} \sum_{r=0}^2 1 \cdot z^{-r} = \frac{z(1+z+z^2)}{z^3+1}.$$

Найдем периодический режим на выходе. В соответствии с (2.209), учитывая, что $H(z)$ имеет единственный полюс $z_1=0$, имеем

$$\begin{aligned} Y_0^*(z) &= \frac{z^3+1}{z^3} \left[\frac{(1+z+z^2)(z-a)}{z^3+1} + a \right] = \\ &= \frac{(1+z+z^2)(z-a) + a(z^3+1)}{z^3} = (1+a) + (1-a)z^{-1} + (1-a)z^{-2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в установившемся периодическом режиме на выходе, если совместить начало положительного полупериода с началом отсчета, будет $y[0] = 1 + a$, $y[1] = y[2] = 1 - a$. В следующем полупериоде будет $y[3] = -y[0] = -(1 + a)$, $y[4] = y[5] = -y[1] = -(1 - a)$ и т. д.

§ 2.8. Построение логарифмических частотных характеристик

Передающая функция разомкнутой ЦАС может быть представлена в виде произведения дискретных передаточных функций ЦВМ и непрерывной части, т. е. $W(z) = W_0(z)D(z)$. Здесь будет рассмотрено построение логарифмических частотных характеристик непрерывной части амплитудной (л. а. х.) и фазовой (л. ф. х.). Построение логарифмических частотных характеристик ЦВМ будет рассмотрено ниже, в главе 5.

Построение логарифмических характеристик наиболее удобно делать в функции абсолютной псевдочастоты, которая определяется формулой (2.190). Целесообразно строить характеристики отдельно для области низких частот ($\omega < T^{-1}$) и для области высоких частот ($\omega > T^{-1}$).

В области низких частот передаточная функция непрерывной части ЦАС в соответствии с § 2.3 может быть представлена в виде

$$W_0(z) = \frac{\delta}{\delta_1} \approx \left\{ \left(\frac{z-1}{z} \right)^{l+1} \left(\frac{1}{p} + \frac{a_1}{p^2 T} + \frac{a_2}{p^3 T^2} + \dots + \frac{1}{p^{l+1} T^l} \right) W_n(p) e^{-p\tau} \right\}, \quad (2.210)$$

где l — порядок экстраполятора, $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}$ — некоторые коэффициенты. Для малых частот приближенное выражение для передаточной функции можно найти следующим образом:

$$\begin{aligned} W_0(e^{pT}) &\approx \frac{\delta}{\delta_1} \approx \left\{ \frac{(pT)^{l+1}}{p^{l+1} T^l} W_n(p) e^{-p\tau} \right\} = \\ &= \frac{\delta T}{\delta_1} \approx \{ W_n(p) e^{-p\tau} \} = \frac{\delta T}{\delta_1} \sum_{n=0}^{\infty} w_n[nT - \tau] z^{-n} \approx \\ &\approx \frac{\delta}{\delta_1} \int_0^{\infty} w_n(t - \tau) e^{-pt} dt = \frac{\delta}{\delta_1} W_n(p) e^{-p\tau}, \quad (2.211) \end{aligned}$$

где $\omega_n(t - \tau)$ — весовая функция непрерывной части с учетом суммарного запаздывания.

Таким образом, для низких частот частотная передаточная функция $W_0(e^{j\omega\tau})$ практически совпадает с точностью до множителя δ/δ_1 с частотной передаточной функцией $W_n(j\omega)e^{-j\omega\tau}$ исходной непрерывной части. Так как для этих частот псевдочастота также практически совпадает с действительной частотой, $\lambda \approx \omega$, то частотные характеристики можно с одинаковым успехом строить как в функции ω , так и в функции λ .

Следовательно, для низких частот ($\omega T < 1$) построение л. а. х. и л. ф. х. сводится, по сути дела, к построению логарифмических характеристик исходной непрерывной части

$$L_0^*(\lambda) \approx L_n(\omega) = 20 \lg |W_n(j\omega)|, \quad (2.212)$$

$$\psi_0^*(\lambda) \approx \psi_n(\omega) - \omega\tau = \arg W_n(j\omega) - \omega\tau \quad (2.213)$$

с добавлением множителя δ/δ_1 .

Проиллюстрируем теперь это положение для непрерывной части системы, описываемой, например, передаточной функцией соответствующей астатизму второго порядка,

$$W_n(p) = \frac{k_n(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) \dots (1 + \tau_m p)}{p^2(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) \dots (1 + T_q p)} \quad (2.214)$$

с экстраполятором нулевого порядка. Примем, что все постоянные времени знаменателя (2.214) дают сопрягающие частоты, меньшие чем $2T^{-1}$, т. е. $T_i > 0,5T$ ($i = 1, 2, \dots, q$). Это предположение сводится к тому, что все изломы асимптотической л. а. х., соответствующей (2.214), расположены в низкочастотной области, для которой справедливо неравенство $\omega T < 2$.

Разложим (2.214) на простые дроби:

$$W_n(p) = \frac{k_n}{p^2} + \frac{k_n T_0}{p} + k_n \sum_{i=1}^q \frac{N_i}{1 + T_i p}, \quad (2.215)$$

где N_i — коэффициент разложения, а постоянная времени

$$T_0 = \sum_{j=1}^m \tau_j - \sum_{i=1}^q T_i. \quad (2.216)$$

На основании (2.136) дискретная передаточная функция разомкнутой системы в области низких частот

$$W_{0н}(z) = \frac{\delta}{\delta_1} \left[\frac{k_n T^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2} + \frac{k_n T_0 T}{z-1} + k_n \sum_{i=1}^q \frac{N_i (1-d_i)}{z-d_i} \right] = \\ = \frac{KT^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2} + \frac{KT_0 T}{z-1} + K \sum_{i=1}^q \frac{N_i (1-d_i)}{z-d_i}, \quad (2.217)$$

где $K = k_n \delta / \delta_1$ — общий коэффициент передачи непрерывной части с учетом преобразователей, а $d_i = e^{-T/T_i}$ ($i = 1, \dots, q$).

Перейдем к дискретной частотной передаточной функции заменой z на w по (2.187) и $w = j0,5T\lambda$. В результате получим

$$W_{0н}^*(j\lambda) = \\ = \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left[\frac{K}{(j\lambda)^2} + \frac{KT_0}{j\lambda} + K \sum_{i=1}^q \frac{N_i}{1 + j\lambda \frac{T}{2} \operatorname{cth} \frac{T}{2T_i}} \right]. \quad (2.218)$$

Так как было принято, что $T_i > 0,5T$, то

$$\operatorname{cth} \frac{T}{2T_i} = \frac{1}{\operatorname{th} \frac{T}{2T_i}} \approx \frac{2T_i}{T},$$

откуда получаем

$$W_{0н}^*(j\lambda) \approx \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left[\frac{K}{(j\lambda)^2} + \frac{KT_0}{j\lambda} + K \sum_{i=1}^q \frac{N_i}{1 + j\lambda T_i} \right]. \quad (2.219)$$

Сравнение последнего выражения с (2.215) показывает, что частотные передаточные функции $W_{0н}^*(j\lambda)$ и $W_n(j\omega)$ в низкочастотной области совпадают с точностью до множителя δ/δ_1 . Так как было принято, что $\omega T < 2$, то влияние дополнительного множителя $\left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)$ в (2.219) можно не учитывать при построении л. а. х. в низкочастотной области.

Совпадение логарифмических частотных характеристик для дискретной передаточной функции и для исходной передаточной функции непрерывной части в области

низких частот дает большие удобства в формировании низкочастотной части л. а. х. проектируемой системы и позволяет ориентироваться на методику, используемую для непрерывных систем.

Рассмотрим построение логарифмических частотных характеристик в области высоких частот при $\omega T > 1$. Введем следующие ограничения.

1. Величина, обратная периоду дискретности T , больше половины частоты среза л. а. х. непрерывной части системы, т. е. $\omega_{\text{ср}} T < 2$. При расчете систем с ЦВМ это неравенство приходится выполнять практически во всех случаях в связи с требованиями по устойчивости и запасу устойчивости.

2. Если рассматривать передаточную функцию непрерывной части в виде

$$W_n(p) = \frac{K \prod_{k=1}^m (1 + \tau_k p)}{p^r \prod_{i=1}^n (1 + T_i p)}, \quad (2.220)$$

где $K = k_n \delta / \delta_1$ [с^{-r}] — общий коэффициент усиления, а r — степень астатизма, то все постоянные времени $T_1, \dots, T_n$ можно разделить на две группы. К первой группе, $T_1, \dots, T_q$, отнесем те из них, которым соответствуют сопрягающие частоты меньше $2T^{-1}$ (большие постоянные времени). Они участвуют в формировании низкочастотной части логарифмических характеристик в соответствии с изложенным выше.

Ко второй группе, $T_{q+1}, \dots, T_n$, отнесем те постоянные времени, которым соответствуют сопрягающие частоты, большие чем $2T^{-1}$ (малые постоянные времени), причем для каждой постоянной времени второй группы должно выполняться неравенство $T_i < 0,5T$ ($i = q+1, \dots, n$). Случай комплексных полюсов (2.220) рассмотрим ниже отдельно.

3. Постоянным времени $\tau_1, \dots, \tau_m$ соответствуют сопрягающие частоты, меньшие частоты $2T^{-1}$, и они участвуют в формировании низкочастотной части логарифмических характеристик. Это требование не относится к тем постоянным времени числителя (2.220), которые были введены для компенсации в непрерывной части некоторых полюсов

передаточной функции и поэтому после сокращения одинаковых множителей не вошли в окончательное выражение (2.220).

4. Пересечение вертикальной прямой $\omega = 2T^{-1}$ асимптотической л. а. х. непрерывной части происходит при отрицательных наклонах 20 дБ/дек и 40 дБ/дек. Эти случаи будут рассмотрены отдельно.

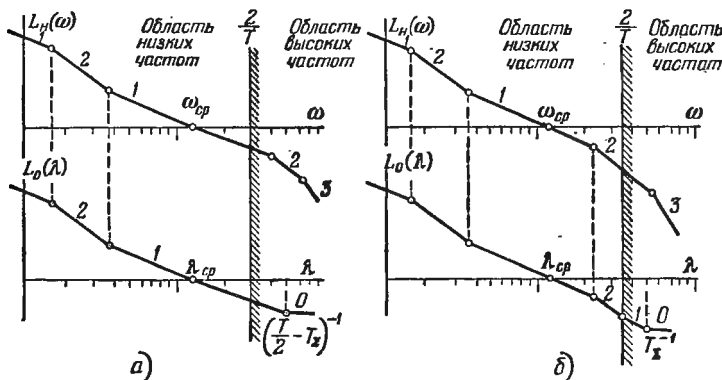


Рис. 2.28. Л. а. х. непрерывной части ЦАС с экстраполятором нулевого порядка.

Рассмотрим сначала случай, когда пересечение вертикальной линии $\omega = 2T^{-1}$ асимптотической л. а. х. непрерывной части происходит при отрицательном наклоне 20 дБ/дек (рис. 2.28, а). Тогда в области высоких частот ($\omega > 2T^{-1}$) передаточная функция непрерывной части может быть представлена в виде

$$W_v(p) = \frac{\omega_{0B} e^{-p\tau}}{p(1 + T_{q+1}p) \dots (1 + T_{nB}p)}. \quad (2.221)$$

Здесь ω_{0B} представляет собой базовую частоту высокочастотной части л. а. х., определяемую как частота пересечения ее первой асимптоты с осью нуля децибел. Базовая частота определяется выражением

$$\omega_{0B} = \frac{K\tau_1\tau_2 \dots \tau_m}{T_1T_2 \dots T_q}, \quad (2.222)$$

причем должно выполняться условие $m = q + r - 1$.

На рис. 2.28, а показано, что базовая частота $\omega_{0в}$ совпадает с частотой среза л. а. х $\omega_{ср}$. Однако это не является обязательным, что иллюстрирует рис. 2.29, где $\omega_{0в} \neq \omega_{ср}$. Лишь при соответствующем увеличении общего коэффициента усиления, что соответствует подъему всей л. а. х.,

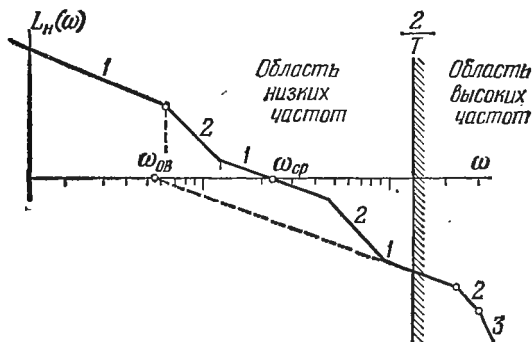


Рис. 2.29. Пример л. а. х. непрерывной части ЦАС.

можно получить условие $\omega_{0в} = \omega_{ср}$ и здесь. При несовпадении $\omega_{0в}$ и $\omega_{ср}$ все изложенное ниже сохраняет свою силу.

При отсутствии временного запаздывания

$$W_{в}(p) = \frac{\omega_{0в}}{p(1+T_{q+1}p) \dots (1+T_n p)} = \frac{\omega_{0в}}{p} + \omega_{0в} \sum_{i=q+1}^n \frac{N_i}{1+T_i p}, \quad (2.223)$$

где $\omega_{0в}$ по-прежнему определяется формулой (2.221).

Аналогично предыдущему найдем дискретную передаточную функцию переходом к псевдочастоте по формулам (2.187) и (2.190):

$$W_{0в}^*(j\lambda) = \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left[\frac{\omega_{0в}}{j\lambda} + \omega_{0в} \sum_{i=q+1}^n \frac{N_i}{1 + j\lambda \operatorname{cth} \frac{T}{2T_i}} \right]. \quad (2.224)$$

Так как $T_i < 0,5T$, то можно положить

$$\operatorname{cth} \frac{T}{2T_i} \approx 1.$$

Учитывая, что

$$\sum_{i=q+1}^n N_i = - \sum_{i=q+1}^n T_i = -T_{\Sigma},$$

получаем в результате

$$W_{0в}^*(j\lambda) = \frac{\omega_{0в} \left[1 + j\lambda \left(\frac{T}{2} - T_{\Sigma} \right) \right] \left(1 - j\lambda \frac{T}{2} \right)}{j\lambda \left(1 + j\lambda \frac{T}{2} \right)}. \quad (2.225)$$

Это выражение и может быть использовано для построения л. а. х.

$$L_{0в}^*(\lambda) = 20 \lg \frac{\omega_{0в} \sqrt{1 + \lambda^2 \left(\frac{T}{2} - T_{\Sigma} \right)^2}}{\lambda}. \quad (2.226)$$

Начало л. а. х. в высокочастотной области сливается с концом л. а. х. в низкочастотной области в точке $\lambda = 2T^{-1}$ (рис. 2.28, а).

Результирующее выражение для дискретной частотной передаточной функции имеет вид

$$W_0^*(j\lambda) = \frac{K (1 + j\lambda\tau_1) \dots (1 + j\lambda\tau_m) \left(1 - j\lambda \frac{T}{2} \right) \left[1 + j\lambda \left(\frac{T}{2} - T_{\Sigma} \right) \right]}{(j\lambda)^r (1 + j\lambda T_1) \dots (1 + j\lambda T_q) \left(1 + j\lambda \frac{T}{2} \right)}. \quad (2.227)$$

Результирующий фазовый сдвиг равен

$$\begin{aligned} \varphi_0^*(\lambda) = & -r \cdot 90^\circ + \sum_{k=1}^m \operatorname{arctg} \lambda \tau_k - \sum_{i=1}^q \operatorname{arctg} \lambda T_i - \\ & - 2 \operatorname{arctg} \lambda \frac{|T|}{2} + \operatorname{arctg} \lambda \left(\frac{T}{2} - T_{\Sigma} \right). \end{aligned} \quad (2.228)$$

В районе частоты среза $\lambda < 2T^{-1}$ можно считать с достаточной точностью, что

$$\begin{aligned} \varphi_0^*(\lambda) \approx & -r \cdot 90^\circ + \sum_{k=1}^m \operatorname{arctg} \lambda \tau_k - \\ & - \sum_{i=1}^q \operatorname{arctg} \lambda T_i - \operatorname{arctg} \lambda \left(\frac{T}{2} + T_{\Sigma} \right). \end{aligned} \quad (2.229)$$

В результате при построении высокочастотного «хвоста» л. а. х. приходится учитывать сумму малых постоянных времени T_Σ и дополнительный множитель $(1 - j\lambda \frac{T}{2})$. Последний приводит на высоких частотах к нулевому наклону л. а. х. и дает дополнительный фазовый сдвиг в отрицательную сторону, равный $\text{arctg } \lambda \frac{T}{2}$.

При учете дополнительного временного запаздывания $\tau \neq 0$ результирующая передаточная функция может быть найдена на основании формул (2.138) и (2.139). Более простые зависимости могут быть получены из приближенных выражений (2.131) и (2.132).

Рассмотрим формулу (2.132). В дополнительном множителе правой части перейдем к псевдочастоте

$$1 - \frac{z-1}{z} \frac{\tau}{T} = \frac{1+w-2w \frac{\tau}{T}}{1+w} = \frac{1+j\lambda \left(\frac{T}{2} - \tau\right)}{1+j\lambda \frac{T}{2}}. \quad (2.230)$$

Тогда при наличии временного запаздывания $0 \leq \tau \leq T$ результирующая частотная передаточная функция непрерывной части будет иметь вид

$$W_0^*(j\lambda) = W_0^0(j\lambda) \frac{1+j\lambda \left(\frac{T}{2} - \tau\right)}{1+j\lambda \frac{T}{2}}, \quad (2.231)$$

где $W_0^0(j\lambda)$ — частотная передаточная функция непрерывной части при $\tau=0$, определяемая (2.227). При $\tau=0$ дополнительный множитель (2.231) обращается в единицу, а при $\tau=T$ он будет равен

$$\frac{1-j\lambda \frac{T}{2}}{1+j\lambda \frac{T}{2}} = e^{-j\omega T}. \quad (2.232)$$

При запаздывании $\tau > T$, т. е. при $\tau = mT + \xi T$, где m — целая и ξ — дробная часть запаздывания, кроме множителя (2.229) в формулу (2.230) должен быть введен дополнительный множитель $z^{-m} = e^{-jm\omega T}$.

Если пересечение вертикальной линии $\omega = 2T^{-1}$ асимптотической л. а. х. непрерывной системы происходит с наклоном 40 дБ/дек (рис. 2.28, б), то в области высоких

частот ($\omega > 2T^{-1}$) вместо (2.223) имеем

$$\begin{aligned} W_B(p) &= \frac{\omega_{0B}^2}{p^2(1+T_{q+1}p)\dots(1+T_np)} = \\ &= \frac{\omega_{0B}^2}{p^2} - \frac{\omega_{0B}^2 T_\Sigma}{p} + \omega_{0B}^2 \sum_{i=q+1}^n \frac{N_i}{1+T_i p}. \end{aligned} \quad (2.233)$$

Здесь $T_\Sigma = T_{q+1} + \dots + T_n$, а ω_{0B} определяется формулой

$$\omega_{0B} = \sqrt{\frac{K\tau_1\tau_2\dots\tau_m}{T_1T_2\dots T_q}}, \quad (2.234)$$

причем должно выполняться условие $m = q + r - 2$.

Перейдем к дискретной передаточной функции:

$$W_{0B}(z) = \omega_{0B}^2 \left[\frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2} - \frac{TT_\Sigma}{z-1} + \sum_{i=q+1}^n \frac{N_i(1-d_i)}{z-d_i} \right]. \quad (2.235)$$

Дискретная частотная передаточная функция

$$\begin{aligned} W_{0B}^*(j\lambda) &= \omega_{0B}^2 \left[\frac{1}{(j\lambda)^2} - \frac{T_\Sigma}{j\lambda} + \sum_{i=q+1}^n \frac{N_i}{1+j\lambda \frac{T}{2} \operatorname{cth} \frac{T}{2T_i}} \right] \times \\ &\quad \times \left(1 - j\lambda \frac{T}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.236)$$

Так как $2T_i < T$, то можно положить

$$\operatorname{cth} \frac{T}{2T_i} \approx 1 \quad (i = q+1, \dots, n).$$

Тогда

$$\begin{aligned} W_{0B}^*(j\lambda) &= \frac{\omega_{0B}^2 \left(1 - j\lambda \frac{T}{2} \right) \left[1 + j\lambda \left(\frac{T}{2} - T_\Sigma \right) - (j\lambda)^2 \left(\frac{TT_\Sigma}{2} - T_\Sigma^2 \right) \right]}{(j\lambda)^2 \left(1 + j\lambda \frac{T}{2} \right)} \approx \\ &\approx \frac{\omega_{0B}^2 \left(1 - j\lambda \frac{T}{2} \right) (1 - j\lambda T_\Sigma)}{(j\lambda)^2}. \end{aligned} \quad (2.237)$$

Здесь $T_\Sigma^2 = T_{q+1}^2 + \dots + T_n^2$.

Это выражение и должно использоваться для построения высокочастотной части л. а. х. и л. ф. х. На частоте $\lambda = 2T^{-1}$ происходит сопряжение низкочастотной и высокочастотной частей характеристик (рис. 2.28, б).

Результирующее выражение для частотной передаточной функции разомкнутой системы, которым можно пользоваться для построения л. а. х. и л. ф. х. во всех частотных областях, имеет вид

$$W_0^*(j\lambda) = \frac{K \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) (1 - j\lambda T_\Sigma) \prod_{l=1}^m (1 + j\lambda \tau_k)}{(j\lambda)^r \prod_{i=1}^q (1 + j\lambda T_i)}. \quad (2.238)$$

Фазовый сдвиг для передаточной функции (2.238) равен

$$\begin{aligned} \psi^*(\lambda) = & -r \cdot 90^\circ - \operatorname{arctg} \lambda \frac{T}{2} - \operatorname{arctg} \lambda T_\Sigma + \\ & + \sum_{k=1}^m \operatorname{arctg} \lambda \tau_k - \sum_{i=1}^q \operatorname{arctg} \lambda T_i. \end{aligned} \quad (2.239)$$

При наличии запаздывания необходимо учесть введенные выше дополнительные множители.

Экстраполяторы первого порядка. Построение высокочастотной части логарифмических характеристик рассматривается применительно к дискретной передаточной функции разомкнутой ЦАС, определяемой в соответствии с формулой (2.143).

В случае, когда асимптотическая л. а. х. непрерывной части системы пересекает вертикальную прямую $\omega = T^{-1}$ асимптотой, имеющей наклон -20 дБ/дек, передаточная функция непрерывной части для частот $\omega > T^{-1}$ может быть записана в виде (2.221) и при отсутствии временного запаздывания — в виде (2.223). Для второго случая дискретная передаточная функция имеет вид

$$\begin{aligned} W_{0B}(z) &= \left(\frac{z-1}{z}\right)^2 \approx \left\{ \frac{W_H(p)}{p} + \frac{W_H(p)}{p^2 T} \right\} = \\ &= \omega_{0B} \left(\frac{z-1}{z}\right)^2 \approx \left\{ \frac{1}{p^3 T} + \frac{T - T_\Sigma}{p^2 T} + \sum_{i=q+1}^n \frac{N_i \left(1 - \frac{T_i}{T}\right)}{p(1 + T_i p)} \right\} = \\ &= \frac{\omega_{0B}}{z} \left[\frac{T(z+1)}{2(z-1)} + T - T_\Sigma + \sum_{i=q+1}^n \frac{N_i \left(1 - \frac{T_i}{T}\right) (1 - d_i) (z-1)}{z - d_i} \right]. \end{aligned} \quad (2.240)$$

Здесь $d_i = \exp(-T/T_i)$, а $T_\Sigma = T_{q+1} + \dots + T_n$.

Переходя к псевдочастоте, получаем дискретную частотную передаточную функцию разомкнутой системы для области высоких частот

$$\begin{aligned}
 W_{0B}^*(j\lambda) &= \\
 &= \frac{\omega_{0B} \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)}{1 + j\lambda \frac{T}{2}} \left[\frac{1}{j\lambda} + T - T_{\Sigma} + \sum_{i=q+1}^n \frac{N_i \left(1 - \frac{T_i}{T}\right) \overline{j\lambda T}}{1 + j\lambda \frac{T}{2} \operatorname{ctg} \frac{T}{2T_i}} \right] \approx \\
 &\approx \frac{\omega_{0B} \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) [1 + j\lambda (T - T_{\Sigma})]}{j\lambda \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)}. \quad (2.241)
 \end{aligned}$$

При получении приближенного выражения учтено, что $2T_i < T$. Поэтому $\operatorname{cth}(T/2T_i) \approx 1$. Результирующая дискретная частотная передаточная функция, справедливая для всех псевдочастот, может быть записана в виде

$$W_0^*(j\lambda) = \frac{K \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) [1 + j\lambda (T - T_{\Sigma})] \prod_{k=1}^m (1 + j\lambda \tau_k)}{(j\lambda)^r \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right) \prod_{i=1}^q (1 + j\lambda T_i)}, \quad (2.242)$$

где $K = k_n \delta / \delta_1$. Результирующий фазовый сдвиг равен

$$\begin{aligned}
 \psi_0^*(\lambda) &= -r \cdot 90^\circ - 2 \operatorname{arctg} \lambda \frac{T}{2} + \operatorname{arctg} \lambda (T - T_{\Sigma}) + \\
 &+ \sum_{k=1}^m \operatorname{arctg} \lambda \tau_k - \sum_{i=1}^q \operatorname{arctg} \lambda T_i. \quad (2.243)
 \end{aligned}$$

В районе средних частот (в районе частоты среза) приближенное выражение для фазового сдвига может быть представлено в виде

$$\psi_0^*(\lambda) \approx -r \cdot 90^\circ - \operatorname{arctg} \lambda T_{\Sigma} + \sum_{k=1}^m \operatorname{arctg} \lambda \tau_k - \sum_{i=1}^q \operatorname{arctg} \lambda T_i. \quad (2.244)$$

Сравнение последнего выражения с (2.239) показывает, что в системах с экстраполятором первого порядка эквивалентная сумма малых постоянных времени равна дейст-

вительной сумме T_{Σ} , тогда как в системах с экстраполятором нулевого порядка она равна $T_{\Sigma} + 0,5T$.

Вместе с тем, как следует из (2.241), граница, разделяющая области низких и высоких частот, оказывается сдвинутой в сторону более низких частот и составляет $\omega = T^{-1}$. Это поясняет рис. 2.30, на котором построены высокочастотные части л. а. х. при $T_{\Sigma} = 0$ (рис. 2.30, а) и при $T_{\Sigma} \neq 0$ (рис. 2.30, б).

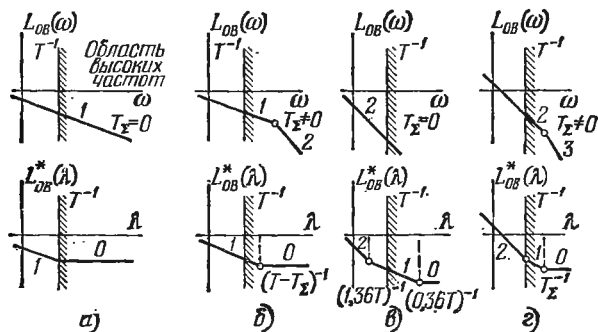


Рис. 2.30. Высокочастотные части л. а. х. ЦАС с экстраполятором первого порядка.

Для случая, когда вертикальная прямая $\omega = T^{-1}$ пересекается асимптотой л. а. х. $W_n(j\omega)$, имеющей наклон -40 дБ/дек, передаточная функция в высокочастотной области представляется формулой (2.233) (при условии $\tau = 0$):

$$W_B(p) = \frac{\omega_{0B}^2}{p^2 (1 + T_{q+1}p) \dots (1 + T_np)}, \quad (2.245)$$

где ω_{0B} — базовая частота, определяемая (2.234).

Аналогичными рассуждениями можно показать, что дискретная передаточная функция в этом случае равна

$$W_{0B}^*(j\lambda) \approx \frac{\omega_{0B}^2 \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left[1 + j\lambda (T - T_{\Sigma}) - (j\lambda)^2 \left(TT_{\Sigma} + \frac{T^2}{12}\right)\right]}{(j\lambda)^2 \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)}. \quad (2.246)$$

Полное выражение для дискретной частотной передаточной функции при наличии астатизма r -го порядка:

$$W_0^*(j\lambda) = \frac{K \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left[1 + j\lambda (T - T_\Sigma) - (j\lambda)^2 \left(TT_\Sigma + \frac{T^2}{12}\right)\right] \prod_{k=1}^m (1 + j\lambda \tau_k)}{(j\lambda)^r \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right) \prod_{i=1}^q (1 + j\lambda T_i)} \quad (2.247)$$

Фазовый сдвиг равен

$$\psi_0^*(\lambda) = -r \cdot 90^\circ - 2 \operatorname{arctg} \lambda \frac{T}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\lambda (T - T_\Sigma)}{1 + \lambda^2 \left(TT_\Sigma + \frac{T^2}{12}\right)} + \sum_{k=1}^m \operatorname{arctg} \lambda \tau_k - \sum_{i=1}^q \operatorname{arctg} \lambda T_i \quad (2.248)$$

В районе частоты среза приближенное выражение для фазового сдвига может быть записано в виде

$$\psi_0^*(\lambda) \approx -r \cdot 90^\circ - \operatorname{arctg} \lambda T_\Sigma + \sum_{k=1}^m \operatorname{arctg} \lambda \tau_k - \sum_{i=1}^q \operatorname{arctg} \lambda T_i \quad (2.249)$$

Из уравнений (2.249) и (2.239) следует, что и в этом случае эквивалентная сумма малых постоянных времени составляет T_Σ вместо значения $T_\Sigma + 0,5T$, которое имело место в цифровых системах с экстраполятором нулевого порядка. Граничная частота, разделяющая области высоких и низких частот, также уменьшилась до значения $\omega = T^{-1}$.

В частном случае $T_\Sigma = 0$, что соответствует $T_i = 0$ ($i = q + 1, \dots, n$), формула (2.246) приобретает вид

$$W_{0в}^*(j\lambda) = \frac{\omega_{0в}^2 \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) (1 + j\lambda 1,36T) (1 - j\lambda 0,36T)}{(j\lambda)^2 \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)} \quad (2.250)$$

Этому случаю соответствует рис. 2.30, в. Другой случай, когда постоянная времени T_Σ достаточно велика и трехчлен в числителе (2.246) разлагается приближенно

на множители

$$1 + j\lambda(T - T_{\Sigma}) - (j\lambda)^2 \left(TT_{\Sigma} + \frac{T^2}{12} \right) \approx (1 + j\lambda T)(1 - j\lambda T_{\Sigma}),$$

изображен на рис. 2.30, з.

Не представляет труда распространить изложенную методику построения высокочастотной части логарифмической характеристики и на иные случаи пересечения прямой $\omega = T^{-1}$ асимптотической л. а. х. непрерывной части.

Колебательные звенья. В непрерывной части канала управления может быть колебательное звено, передаточную функцию которого представим в виде

$$W_{\text{кз}}(p) = \frac{1}{1 + 2\zeta T_1 p + T_1^2 p^2}, \quad \zeta < 1. \quad (2.251)$$

В частном случае при $\zeta = 0$ имеем консервативное звено.

Если выполняется условие $T_1 \gg 0,5 T$, то нахождение дискретной частотной передаточной функции не вызывает затруднений и может быть осуществлено в соответствии с изложенным выше при построении низкочастотной части.

При близости резонансной частоты колебательного звена $q_1 = T_1^{-1}$ к граничной частоте $\omega = 2T^{-1}$, а также при выполнении условия $q_1 > 2T^{-1}$ нахождение дискретной частотной передаточной функции имеет некоторые особенности.

Пусть для ЦАС с экстраполятором нулевого порядка в районе граничной частоты $\omega = 2T^{-1}$ и в области больших частот передаточная функция непрерывной части с учетом преобразователей может быть представлена в виде

$$W_{\text{в}}(p) = \frac{\omega_{0\text{в}}}{p(1 + 2\zeta T_1 p + T_1^2 p^2)}, \quad (2.252)$$

где $\omega_{0\text{в}}$ — базовая частота (рис. 2.29). В частном случае, когда имеется звено без затухания ($\zeta = 0$), дискретная передаточная функция в области высоких частот имеет вид

$$\begin{aligned} W_{0\text{в}}(z) &= \frac{z-1}{z} \approx \left\{ \frac{\omega_{0\text{в}}}{p^2(1 + T_1^2 p^2)} \right\} = \\ &= \omega_{0\text{в}} \left[\frac{T}{z-1} - \frac{(z-1) T_1 \sin \frac{T}{T_1}}{z^2 - 2z \cos \frac{T}{T_1} + 1} \right]. \end{aligned} \quad (2.253)$$

Переход к псевдочастоте дает частотную передаточную функцию

$$W_{0B}^*(j\lambda) = \frac{\omega_{0B} \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) [1 + \tau_3^2 (j\lambda)^2]}{j\lambda [1 + T_3^2 (j\lambda)^2]}. \quad (2.254)$$

Здесь введены постоянные времени, которые определяются зависимостями

$$T_3^2 = \frac{T^2}{4} \operatorname{tg}^{-2} \frac{T}{2T_1}, \quad (2.255)$$

$$\tau_3^2 = \frac{T^2}{4} \left(\operatorname{tg}^{-2} \frac{T}{2T_1} - \frac{2T_1}{T} \operatorname{tg}^{-1} \frac{T}{2T_1} \right) = T_3^2 - \frac{TT_1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{T}{2T_1}. \quad (2.256)$$

Из (2.255) видно, что в ЦАС наблюдается эффект транспонирования частоты $q_1 = T_1^{-1}$ в частоту $q_3 = T_3^{-1}$.

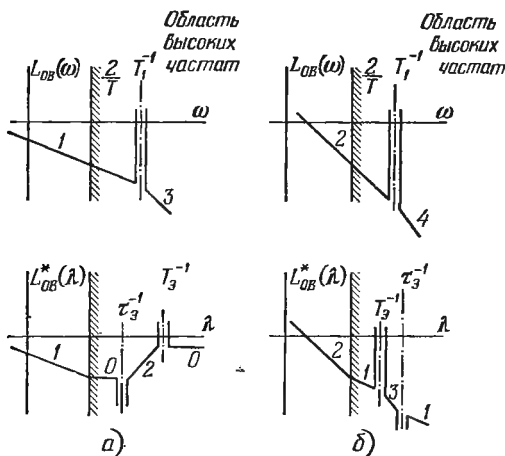


Рис. 2.31. Высокочастотные части л. а. х. ЦАС с консервативным звеном.

При выполнении условия $2T_1 > T$ транспонирования практически не происходит и $q_3 \approx q_1$. При этом $\tau_3 \rightarrow 0$.

Если $\left| \operatorname{tg} \frac{T}{2T_1} \right| > 1$, то будет происходить транспонирование в область высоких частот. При этом появляется

множитель $[1 + \tau_3^2 (j\lambda)^2]$ в числителе (2.254). Частота τ_3^{-1} может быть как больше, так и меньше частоты $q_3 = T_3^{-1}$. Условие $\tau_3^{-1} < T_3^{-1}$ выполняется, если $\operatorname{tg} \frac{T}{2T_1} < 0$, что приводит к условию $(2n-1)\pi < \frac{T}{T_1} < 2n\pi$, где $n=1, 2, \dots$. Этот случай показан на рис. 2.31, а.

В общем случае, когда имеется затухание ($\zeta \neq 0$), дискретная частотная передаточная функция, соответствующая (2.252), сводится к выражению

$$W_{0в}^*(j\lambda) = \frac{\omega_{0в} \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) [1 + 2\xi_3 \tau_3 j\lambda + \tau_3^2 (j\lambda)^2]}{j\lambda [1 + 2\xi_3 T_3 j\lambda + T_3^2 (j\lambda)^2]}. \quad (2.257)$$

Здесь использованы следующие параметры:

$$T_3^2 = \frac{1 + d^2 + 2d \cos \frac{T}{T_1}}{1 + d^2 - 2d \cos \frac{T}{T_1}} \frac{T^2}{4}, \quad (2.258)$$

$$\tau_3^2 = \frac{1 - d^2 - \frac{2\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} d \sin \frac{T}{T_1}}{1 + d^2 - 2d \cos \frac{T}{T_1}} \frac{T^2}{4}, \quad (2.259)$$

$$\xi_3 = \frac{1 - d^2}{\sqrt{(1+d)^2 + 4d \cos \frac{T}{T_1}}}, \quad (2.260)$$

$$\xi_3 = \frac{1 - d \cos \frac{T}{T_1} - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} d \sin \frac{T}{T_1}}{\sqrt{(1-d^2) \left(1 + d^2 - 2d \cos \frac{T}{T_1}\right)}}, \quad (2.261)$$

где $d = \exp(-\zeta T/T_1)$.

Как и в случае отсутствия затухания в исходном звене ($\zeta=0$), здесь наблюдается эффект транспонирования частоты $q_1 = T_1^{-1}$ в частоту $q_3 = T_3^{-1}$. В наиболее важном случае, когда затухание мало ($\zeta \ll 1$), из формул

(2.258) — (2.261) можно получить

$$T_3^2 \approx \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{T}{2T_1}} \frac{T^2}{4}, \quad (2.262)$$

$$\tau_3^2 \approx \frac{\frac{T}{T_1} - \sin \frac{T}{T_1}}{1 - \cos \frac{T}{T_1}} \frac{\xi T^2}{4}, \quad (2.263)$$

$$\xi_3 \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \frac{T}{T_1}}} \frac{\xi T}{T_1}, \quad (2.264)$$

$$2\xi_3 \tau_3 \approx \left(1 - \frac{\xi}{\operatorname{tg} \frac{T}{2T_1}}\right) \frac{T}{2}. \quad (2.265)$$

Эти формулы показывают, что в слабо демпфированных звеньях, кроме эффекта транспонирования резонансной частоты, может наблюдаться увеличение эквивалентного параметра затухания ξ_3 , тем большее, чем больше отношение T/T_1 .

Рассмотрим теперь случай, когда в районе граничной частоты $\omega = 2T^{-1}$ и выше передаточная функция непрерывной части может быть представлена в виде

$$W_B(p) = \frac{\omega_{0B}^*}{p^2(1 + T_1^2 p^2)}. \quad (2.266)$$

Для этого случая дискретная передаточная функция будет иметь вид

$$\begin{aligned} W_{0B}(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{W_B(p)}{p} \right\} = \\ &= \omega_{0B}^* \left[\frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2} - \frac{T_1^2}{z} - \frac{T_1^2(z-1) \left(z \cos \frac{T}{T_1} - 1 \right)}{z \left(z^2 - 2z \cos \frac{T}{T_1} + 1 \right)} \right]. \end{aligned} \quad (2.267)$$

Частотная передаточная функция:

$$W_{0B}^*(j\lambda) = \frac{\omega_{0B}^* \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) [1 + \tau_3^2(j\lambda)^2]}{(j\lambda)^2 [1 + T_3^2(j\lambda)^2]}. \quad (2.268)$$

Эквивалентные параметры:

$$\left. \begin{aligned} T_3^2 &= \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{T}{2T_1}} \frac{T^2}{4}, \\ \tau_3^2 &= \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{T}{2T_1}} - \frac{4T_1^2}{T^2} \right) \frac{T^2}{4} = T_3^2 - 4T_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.269)$$

Заметим, что в этом случае всегда $\tau_3 < T_3$ и $\tau_3^{-1} > T_3^{-1}$.

Вид л. а. х. в высокочастотной области изображен на рис. 2.31, б.

§ 2.9. Передаточные функции многомерных ЦАС

Цифровая автоматическая система может быть предназначена для управления многомерным объектом, который характеризуется наличием нескольких точек приложения

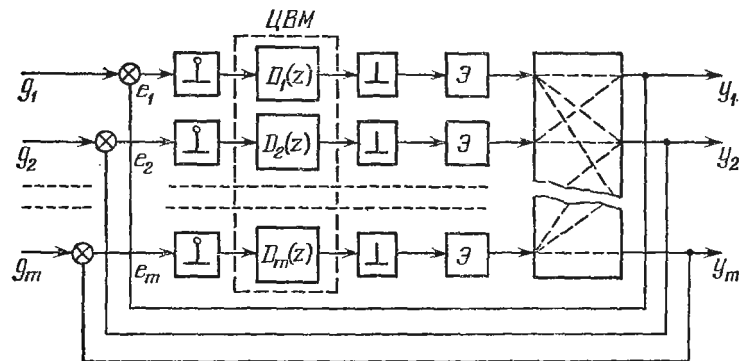


Рис. 2.32. Многомерная система.

управляющих воздействий и нескольких управляемых величин. Рассмотрим эту задачу применительно к наиболее вероятному случаю, когда число управляемых величин и число управляющих воздействий одинаково. При этом будем предполагать, что управление многомерной системой осуществляется от одной ЦВМ, работа отдельных каналов синхронизирована и период дискретности для каждого канала один и тот же.

Схема подобной системы изображена на рис. 2.32. Величины $g_1, g_2, \dots, g_m$ соответствуют задающим воздейст-

виям, $y_1, y_2, \dots, y_m$ — управляемым величинам, $e_1, e_2, \dots, e_m$ — ошибкам. Пусть изображения задающих воздействий будут $G_i(z, \varepsilon_i)$, где $i = 1, 2, \dots, m$. Здесь смещения ε_i характеризуют временной сдвиг в работе синхронных импульсных элементов каждого канала. Выбором начала отсчета времени можно сделать временное смещение одного из каналов, например первого, равным нулю.

Изображения выходных величин и ошибок необходимо определять для тех же временных смещений ε_i , т. е. рассматривать изображения $Y_i(z, \varepsilon_i)$ и $E_i(z, \varepsilon_i) = G_i(z, \varepsilon_i) - Y_i(z, \varepsilon_i)$, где $i = 1, 2, \dots, m$.

Непрерывная часть системы характеризуется матрицей передаточных функций

$$W_H(p) = \begin{vmatrix} W_{H11}(p) & W_{H12}(p) & \dots & W_{H1m}(p) \\ W_{H21}(p) & W_{H22}(p) & \dots & W_{H2m}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{Hm1}(p) & W_{Hm2}(p) & \dots & W_{Hmm}(p) \end{vmatrix}. \quad (2.270)$$

Передаточная функция $W_{Hij}(p)$ дает связь между i -й управляемой величиной и j -м управляющим воздействием. Этой матрице соответствует матрица дискретных передаточных функций непрерывной части

$$W^0(z) = \begin{vmatrix} W_{11}^0(z) & W_{12}^0(z) & \dots & W_{1m}^0(z) \\ W_{12}^0(z) & W_{22}^0(z) & \dots & W_{2m}^0(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{m1}^0(z) & W_{m2}^0(z) & \dots & W_{mm}^0(z) \end{vmatrix}. \quad (2.271)$$

В разомкнутой системе, когда все главные обратные связи разомкнуты, связь между изображениями входных и выходных величин при нулевых начальных условиях можно представить в виде

$$\begin{aligned} Y_i(z, \varepsilon_i) &= \sum_{j=1}^m W_{ij}(z, \varepsilon_i - \varepsilon_j) E_j(z, \varepsilon_j) = \\ &= \sum_{j=1}^m D_j(z) W_{ij}^0(z, \varepsilon_i - \varepsilon_j) E_j(z, \varepsilon_j). \end{aligned} \quad (2.272)$$

Здесь $D_j(z)$ — дискретные передаточные функции ЦВМ соответствующего канала, $W_{ij}(z, \varepsilon_i - \varepsilon_j)$ — дискретные передаточные функции разомкнутых каналов. При этом предполагается, что линейаризованные коэффициенты передачи

темы дает связь между изображениями управляемых величин $Y(z, \epsilon) = \|Y_i(z, \epsilon_i)\|$ и задающих воздействий $G(z, \epsilon) = \|G_i(z, \epsilon_i)\|$ для нулевых начальных условий. При этом необходимо иметь в виду, что все полученные передаточные функции зависят от смещений ϵ_i и ϵ_j , что не отражено в приведенных выше формулах для сокращения записи.

Характеристическое уравнение замкнутой многомерной системы получается приравниванием нулю главного определителя: $\Delta(z) = 0$. При размыкании главной обратной связи одного i -го канала и при замкнутых других каналах может быть получена передаточная функция $W_i(z)$ разомкнутой системы для i -го канала:

$$W_i(z) = \frac{H_{ii}(z)}{1 - H_{ii}(z)} = \frac{H_{ii}(z)}{H_{eii}(z)}. \quad (2.278)$$

Эта передаточная функция может быть использована для определения динамических свойств системы управления (устойчивости, запаса устойчивости, точностных показателей по основному i -му входу и т. п.) методами, которые основаны на исследовании передаточных функций разомкнутых систем, в том числе частотными методами. В последнем случае должна быть найдена частотная передаточная функция разомкнутой системы $W_i(e^{j\omega T})$ или $W_i^*(j\lambda)$.

Пример 2.5. Найдем передаточные функции для двумерной системы с антисимметричными перекрестными связями в предположении, что влиянием временных сдвигов в каналах можно пренебречь, т. е. можно положить $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$. Матрица передаточных функций непрерывной части (2.270) дана в виде

$$W_n(p) = \begin{bmatrix} \frac{K}{p} & \frac{aK}{p} \\ -\frac{aK}{p} & \frac{K}{p} \end{bmatrix}.$$

Для случая экстраполятора нулевого порядка и учитывая, что $D_1(z) = D_2(z) = 1$, имеем матрицу дискретных передаточных функций разомкнутой системы

$$W(z) = \begin{bmatrix} \frac{KT}{z-1} & \frac{aKT}{z-1} \\ -\frac{aKT}{z-1} & \frac{KT}{z-1} \end{bmatrix}.$$

Главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + \frac{KT}{z-1} & \frac{aKT}{z-1} \\ -\frac{aKT}{z-1} & 1 + \frac{KT}{z-1} \end{vmatrix} = \left(1 + \frac{KT}{z-1}\right)^2 + \frac{a^2 K^2 T^2}{(z-1)^2}.$$

Матрица передаточных функций для ошибок из (2.275) и (2.277)

$$H_e(z) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta} \left(1 + \frac{KT}{z-1}\right) & -\frac{1}{\Delta} \frac{aKT}{z-1} \\ \frac{1}{\Delta} \frac{aKT}{z-1} & \frac{1}{\Delta} \left(1 + \frac{KT}{z-1}\right) \end{vmatrix},$$

Матрица передаточных функций замкнутой системы:

$$H(z) = I - H_e(z) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{\Delta} \left(1 + \frac{KT}{z-1}\right) & \frac{1}{\Delta} \frac{aKT}{z-1} \\ -\frac{1}{\Delta} \frac{aKT}{z-1} & 1 - \frac{1}{\Delta} \left(1 + \frac{KT}{z-1}\right) \end{vmatrix}.$$

Передаточные функции при разомкнутом одном канале:

$$\begin{aligned} W_1(z) = W_2(z) = \frac{H_{11}(z)}{H_{e11}(z)} &= \frac{1 - \frac{1}{\Delta} \left(1 + \frac{KT}{z-1}\right)}{\frac{1}{\Delta} \left(1 + \frac{KT}{z-1}\right)} = \\ &= \frac{\Delta}{1 + \frac{KT}{z-1}} - 1 = \frac{KT}{z-1} \left(1 + \frac{a^2 KT}{z-1 + KT}\right). \end{aligned}$$

При расчете устойчивости можно исходить из характеристического уравнения $\Delta = 0$. В рассматриваемом примере можно воспользоваться методом расчета устойчивости двумерных систем [8], из которого следует, что амплитудно-фазовая характеристика изолированного разомкнутого канала не должна охватывать точки на комплексной плоскости с координатами

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{1+a^2} \pm j \frac{a}{1+a^2}.$$

Частотная передаточная функция изолированного канала здесь равна

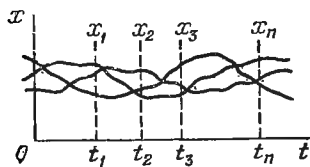
$$W^*(j\lambda) = W \left(\frac{1 + j\lambda \frac{T}{2}}{1 - j\lambda \frac{T}{2}} \right) = \frac{K \left(1 - j\lambda \frac{T}{2} \right)}{j\lambda}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика для этого случая была построена на рис. 2.26, *a* и *b*. Из нее следует условие устойчивости $KT < 2(1 + a^2)^{-1}$.

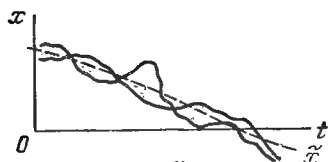
СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦИФРОВЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

§ 3.1. Вводные замечания

Непрерывная случайная величина x , изменяющаяся во времени t , называется *случайным* или *стохастическим процессом*. Случайный процесс не есть определенная кривая $x(t)$, а множество возможных кривых $x(t)$, так же



а)



б)

Рис. 3.1. Непрерывный случайный процесс.

как случайная величина не имеет определенного значения, а является совокупностью (множеством) возможных значений. Можно еще сказать, что случайный процесс есть такая функция времени, значение которой в каждый момент времени является случайной величиной.

Случайный процесс может быть оценен некоторыми вероятностными характеристиками. В каждый момент времени $(t_1, t_2, t_3, \dots, \text{рис. 3.1, а})$ наблюдаются случайные величины $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$

и т. д., каждая из которых имеет свой закон распределения. Поскольку это непрерывная случайная величина, то надо пользоваться понятием плотности вероятности.

Обозначим $\vartheta(x, t)$ закон распределения (плотность вероятности) для всех этих отдельных случайных величин. В общем случае он меняется с течением времени. Для каждого данного t в отдельности $(t_1, t_2, t_3, \dots)$ будет свой закон распределения $\vartheta(x_1, t_1)$, $\vartheta(x_2, t_2)$, $\vartheta(x_3, t_3)$ и т. д., причем для каждого из них

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(x, t) dx = 1.$$

Для каждого заданного момента времени можно найти характеристики случайных величин. В результате будем иметь среднее по множеству (*математическое ожидание*), или *момент первого порядка*,

$$M[x(t)] = \bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \vartheta(x, t) dx \quad (3.1)$$

и дисперсию (*центральный момент второго порядка*)

$$\begin{aligned} D(t) = M\{[x - \bar{x}]^2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 \vartheta(x, t) dx = \\ &= \widetilde{x^2}(t) - [\bar{x}(t)]^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Кроме характеристик $\bar{x}(t)$ и $D(t)$, которые для каждого данного момента времени являются средними по множеству, вводится понятие среднего по времени значения случайной величины $\bar{x}$ для отдельной реализации случайного процесса $x(t)$, которое определяется из выражения

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (3.3)$$

Для того чтобы установить связь между возможными значениями случайной функции $x(t)$ в последующие моменты времени со значениями в предыдущие моменты, вводится понятие двумерной плотности вероятности

$$\vartheta_2(x_1, t_1; x_2, t_2) \quad (\vartheta_2 > 0),$$

смысл которого можно пояснить следующим образом. Вероятность того, что в момент времени t_1 величина x находится в интервале $(x_1, x_1 + dx_1)$, а в момент времени t_2 — в интервале $(x_2, x_2 + dx_2)$, будет $\vartheta_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2$. Это есть вероятность того, что кривая $x(t)$ пройдет вблизи двух заданных точек (x_1, t_1) и (x_2, t_2) .

Вводится также n -мерная плотность вероятности

$$\vartheta_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n).$$

Если ее умножить на $dx_1, dx_2 \dots dx_n$, то это будет вероятность того, что кривая пройдет вблизи заданных n точек. Таким образом, случайный процесс определяется видом функций $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \dots, \vartheta_n$ и связью между ними.

Введем понятие *чисто случайного процесса*. В таком процессе все значения случайной величины в отдельные моменты времени (x_1 в момент t_1 ; x_2 в момент t_2 и т. д.) не зависят друг от друга. Тогда появления значений (x_1, t_1), (x_2, t_2), (x_3, t_3) и т. д. будут независимыми случайными событиями, для которых вероятность их совместного наступления равна, как известно, произведению вероятностей наступления каждого из них в отдельности. Следовательно, для чисто случайного процесса

$$\vartheta_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \vartheta(x_1, t_1) \vartheta(x_2, t_2), \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = \\ = \vartheta(x_1, t_1) \vartheta(x_2, t_2) \dots \vartheta(x_n, t_n). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Эти наиболее простые соотношения в теории случайных процессов могут применяться для характеристики некоторых видов помех (чисто случайные хаотические помехи).

Для характеристики полезных входных сигналов систем управления соотношения (3.4) и (3.5) практически не могут применяться, так как для этих сигналов ход процесса в последующие моменты времени в какой-то степени зависит от того, что было в предыдущие моменты времени. В этом случае вместо формулы (3.4) следует записать

$$\vartheta_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \vartheta(x_1, t_1) \vartheta_{21}(x_2, t_2), \quad (3.6)$$

где $\vartheta_{21}(x_2, t_2) dx$ — условная вероятность того, что случайный процесс пройдет вблизи точки (x_2, t_2) , если он уже прошел через точку (x_1, t_1) . Следовательно, зная плотности вероятности $\vartheta(x_1, t_1)$ и $\vartheta_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$, можно найти также и условную плотность вероятности

$$\vartheta_{21}(x_2, t_2) = \frac{\vartheta_2(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\vartheta(x_1, t_1)}. \quad (3.7)$$

Кроме того, имеет место следующая связь между основными плотностями вероятности:

$$\vartheta(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_2, \quad (3.8)$$

так как $\vartheta(x_1, t_1)$ есть плотность вероятности случайной величины (x_1, t_1) безотносительно к тому, какое потом

будет значение (x_2, t_2) , т. е. допускается $-\infty < x_2 < \infty$. Аналогичным образом, любая плотность вероятности низшего порядка всегда может быть получена из высшей, т. е. высшие плотности вероятностей содержат наибольшее количество информации о случайном процессе (о взаимосвязях между возможными значениями случайной величины x в различные моменты времени).

Стационарным случайным процессом в строгом (широком) смысле называется такой процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. Все плотности вероятностей $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \dots, \vartheta_n$ не меняются при любом сдвиге рассматриваемого участка процесса во времени. Так как отсюда вытекает независимость одномерной плотности вероятности от времени $\vartheta(x, t) = \vartheta(x)$, то получается, что $\bar{x} = \text{const}$ и $D = \text{const}$ вдоль всего случайного процесса. Следовательно, в стационарном случайном процессе средняя линия, в отличие от общего случая (рис. 3.1, б), будет прямая $x = \bar{x}$ (рис. 3.2). Рассеяние значений переменной x в стационарном случайном процессе, определяемое условием $D = \text{const}$, также будет одинаковым на любых отрезках времени.

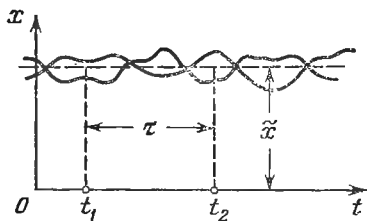


Рис. 3.2. Стационарный непрерывный случайный процесс.

Для стационарных процессов в узком смысле только двумерная плотность вероятности будет одна и та же для одного и того же промежутка времени $\tau = t_2 - t_1$ между любыми t_1 и t_2 (рис. 3.2), т. е.

$$\vartheta_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \vartheta_2(x_1, x_2, \tau), \quad (3.9)$$

при этом одномерная плотность вероятности не зависит от времени.

Задание всех этих функций плотности вероятности определяет случайный процесс. Однако более удобно иметь дело с некоторыми осредненными характеристиками процесса.

Для так называемого эргодического стационарного случайного процесса с вероятностью, равной единице (т. е.

практически достоверно), всякое среднее по множеству равно соответствующему среднему по времени, в частности $\bar{x} = \bar{x}$, $\widehat{x^2} = \overline{x^2}$ и т. д. Из этого вытекает, что длительное наблюдение случайного процесса на одном объекте (среднее по времени) дает в среднем такую же картину, как и большое число наблюдений, сделанное в один и тот же момент времени на большом числе одинаковых объектов (среднее по множеству).

Для многих стационарных процессов существует математическое доказательство этого свойства. Тогда оно сводится к эргодической теореме. Для некоторых процессов эргодичность считают очевидной и тогда используют эргодическую гипотезу.

Итак, среднее значение (математическое ожидание) для эргодического стационарного процесса

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x^0(x) dx = \bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (3.10)$$

Аналогичным образом могут быть записаны моменты более высоких порядков — дисперсия, среднеквадратичное отклонение и т. п.

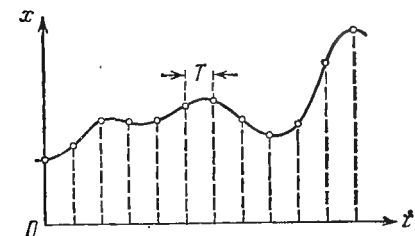


Рис. 3.3. Образование решетчатого случайного процесса.

Эргодические свойства позволяют сильно упрощать все расчеты и эксперименты. Это дает возможность для определения $\bar{x}$, D и т. п., вместо параллельного испытания многих однотипных систем в один и тот же момент времени, пользоваться одной

кривой $x(t)$, полученной при испытании одной системы в течение длительного времени.

Таким образом, важное свойство эргодического стационарного случайного процесса состоит в том, что *отдельная его реализация на бесконечном промежутке времени полностью определяет собой весь случайный процесс со всеми бесчисленными возможными его реализациями.*

В большинстве встречающихся в практике случаев дискретные во времени случайные процессы (случайные

решетчатые функции) могут быть получены из непрерывных их дискретизацией (рис. 3.3). Таким образом, случайная решетчатая функция может быть определена в виде

$$x[n] = x(t), \quad t = nT. \quad (3.11)$$

Совокупность случайных решетчатых функций образует случайный решетчатый процесс, который может быть как стационарным, так и нестационарным. Для стационарного решетчатого случайного процесса практически всегда сохраняется свойство эргодичности.

Среднее значение по множеству (математическое ожидание) может определяться по общей формуле

$$M\{x[n]\} = \bar{x}[n] = \int_{-\infty}^{\infty} x \vartheta[x, n] dx. \quad (3.12)$$

В случае стационарного процесса

$$M\{x[n]\} = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \vartheta(x) dx. \quad (3.13)$$

Аналогичным образом могут вычисляться начальные и центральные моменты более высоких порядков.

Среднее по времени значение случайной решетчатой функции

$$\bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]. \quad (3.14)$$

Для эргодического стационарного процесса с вероятностью единица имеет место равенство $\bar{x} = \bar{x}$.

§ 3.2. Корреляционная функция

Начальный корреляционный момент двух значений непрерывной случайной функции $x(t)$ и $x(t_1)$, взятых в моменты времени t и t_1 , носит название *корреляционной (автокорреляционной) функции*. Она может быть найдена из выражения

$$\begin{aligned} R(t, t_1) &= M\{x(t) x(t_1)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t_1) \vartheta_2(x, t; x_1, t_1) dx dx_1, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $\vartheta_2(x, t; x_1, t_1)$ — двумерная плотность вероятности. Часто под корреляционной функцией понимают центральный корреляционный момент $x(t)$ и $x(t_1)$, т. е.

$$\begin{aligned} K(t, t_1) &= M \{ [x(t) - \bar{x}(t)] [x(t_1) - \bar{x}(t_1)] \} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - \bar{x}(t)] [x(t_1) - \bar{x}(t_1)] \times \\ &\quad \times \vartheta_2(x, t; x_1, t_1) dx dx_1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

В этом случае корреляционная функция (3.15) может быть представлена в виде суммы

$$R(t, t_1) = \bar{x}(t) \bar{x}(t_1) + K(t, t_1). \quad (3.17)$$

Корреляционная функция определяет зависимость случайной величины $x(t_1)$ в последующий момент времени t_1 от предшествующего значения $x(t)$ в момент времени t . Это и есть мера связи между ними.

Основные свойства корреляционных функций.

1. Из определения корреляционной функции следует свойство симметрии: $R(t, t_1) = R(t_1, t)$ и $K(t, t_1) = K(t_1, t)$.

2. При $t_1 = t$ корреляционная функция $R(t, t_1)$ дает средний квадрат случайной величины, а $K(t, t_1)$ — дисперсию:

$$\left. \begin{aligned} R(t, t) &= M \{ x^2(t) \} = \tilde{x}^2(t), \\ K(t, t) &= M \{ [x(t) - \bar{x}(t)]^2 \} = D(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

3. Можно показать, что прибавление к случайным величинам произвольных неслучайных величин не меняет их корреляционных моментов и дисперсий. Поэтому корреляционная функция $K(t, t_1)$ не изменится, если к случайной функции добавить произвольную неслучайную функцию. Это свойство не относится к функции $R(t, t_1)$, так как добавление неслучайных величин к случайным изменяет начальные моменты. В этом случае корреляционная функция будет равна сумме корреляционных функций случайной и неслучайной функции.

Корреляционная функция решетчатого случайного процесса может быть найдена из корреляционной функции непрерывного процесса дискретизацией для моментов

времени $t = nT$ и $t_1 = n_1T$:

$$\left. \begin{aligned} R[n, n_1] &= R(nT, n_1T), \\ K[n, n_1] &= K(nT, n_1T). \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Аналогично формуле (3.17), имеет место зависимость

$$R[n, n_1] = \tilde{x}[n] \tilde{x}[n_1] + K[n, n_1]. \quad (3.20)$$

Сформулированное выше свойство корреляционных функций (3.18) сохраняется применительно к решетчатым функциям. Таким образом, если в $R[n, n_1]$ положить $n_1 = n$, то будет получен средний квадрат рассматриваемой случайной величины:

$$R[n, n] = M\{x^2[n]\} = \tilde{x}^2[n]. \quad (3.21)$$

Применительно к функции $K[n, n_1]$ такая замена дает дисперсию

$$K[n, n] = M\{(x[n] - \tilde{x}[n])^2\} = D[n]. \quad (3.22)$$

Аналогично корреляционной функции (3.15) или (3.16) можно ввести понятие взаимной корреляционной функции для двух случайных величин $x(t)$ и $y(t)$:

$$\left. \begin{aligned} R_{xy}(t, t_1) &= M\{x(t) x(t_1)\}, \\ K_{xy}(t, t_1) &= M\{[x(t) - \tilde{x}(t)][x(t_1) - \tilde{x}(t_1)]\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

В случае тождественного равенства нулю взаимной корреляционной функции случайные функции $x(t)$ и $y(t)$ называют *некоррелированными (независимыми)*. Если взаимная корреляционная функция отлична от нуля, то $x(t)$ и $y(t)$ носят название *коррелированных* случайных функций.

Для решетчатых случайных процессов взаимные корреляционные функции можно получить из (3.23) посредством дискретизации для моментов времени $t = nT$ и $t_1 = n_1T$:

$$\left. \begin{aligned} R_{xy}[n, n_1] &= M\{x[n] y[n_1]\}, \\ K_{xy}[n, n_1] &= M\{(x[n] - \tilde{x}[n])(y[n_1] - \tilde{y}[n_1])\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Стационарные процессы. В случае стационарности процесса корреляционные функции $R[n, n_1]$ и $K[n, n_1]$ не будут зависеть от текущего значения времени $t = nT$ и будут определяться только временным сдвигом $\tau = t_1 - t =$

$= n_1 T - nT = mT$. С учетом эргодичности стационарного процесса корреляционной функцией можно назвать среднее по времени от произведения $x[n]$ и $x[n+m]$ или $(x[n] - \bar{x})$ и $(x[n+m] - \bar{x})$:

$$R[m] = \overline{x[n] x[n+m]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n] x[n+m], \quad (3.25)$$

$$K[m] = \overline{(x[n] - \bar{x})(x[n+m] - \bar{x})} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N (x[n] - \bar{x})(x[n+m] - \bar{x}). \quad (3.26)$$

В последней формуле среднее по времени определяется выражением

$$\bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]. \quad (3.27)$$

Для стационарного процесса корреляционная функция определяет зависимость случайной величины x в последующий момент времени $t_1 = (n+m)T$ от предшествующего значения в момент $t = nT$.

Приведем основные свойства корреляционной функции стационарного процесса применительно к величине $R[m]$.

1. Корреляционная функция является четной функцией, т. е. $R[-m] = R[m]$. Это вытекает из самого определения корреляционной функции.

2. При $m \rightarrow 0$ корреляционная функция дает средний квадрат случайной величины:

$$R[0] = \overline{x[n] x[n]} = \bar{x}^2.$$

3. При $m \rightarrow \infty$ корреляционная функция дает квадрат среднего значения случайной величины. Докажем это. На основании эргодической гипотезы

$$R[m] = \overline{x[n] x[n+m]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \Phi_2[x_1, x_2, n] dx_1 dx_2.$$

При $\tau = mT \rightarrow \infty$ величины x_1 и x_2 можно считать независимыми. Отсюда, принимая во внимание фор-

мулу (3.4) для независимых случайных величин, получим

$$R[\infty] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \vartheta(x_1) dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \vartheta(x_2) dx_2 = (\bar{x})^2 = (\bar{x})^2.$$

4. Значение корреляционной функции при $m=0$ является ее наибольшим значением (рис. 3.4). Докажем это. Рассмотрим очевидное неравенство

$$(x[n] - x[n+m])^2 \geq 0.$$

Сделаем преобразование

$$x^2[n] + x^2[n+m] \geq 2x[n]x[n+m].$$

Возьмем среднее по времени от правой и левой частей. В результате получим

$$\overline{x^2[n] + x^2[n+m]} = 2\bar{x}^2 = 2R[0],$$

$$\overline{2x[n]x[n+m]} = 2R[m].$$

Отсюда вытекает доказываемое неравенство: $R[0] \geq R[m]$.

5. Значение корреляционной функции чаще всего будет тем меньше, чем больше промежуток времени $\tau = mT$,

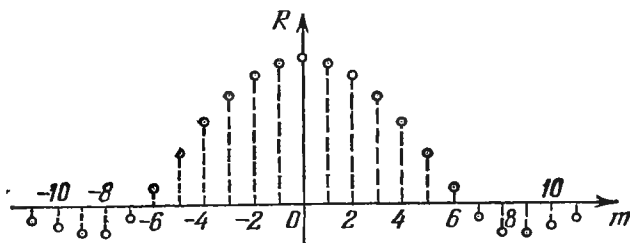


Рис. 3.4. Пример корреляционной функции решетчатого случайного стационарного процесса.

так как связь между далеко отстоящими друг от друга значениями x будет обычно слабее. Увеличение временного сдвига τ может происходить при увеличении числа m и при увеличении периода дискретности T .

6. Чем менее инерционен (более подвижен) объект наблюдения и чем больше период дискретности T , тем быстрее убывают $R[m]$ и $K[m]$ с увеличением числа m . Отсюда следует, что, чем быстрее убывает корреляцион-

ная функция, тем большие частоты будут присутствовать в случайном процессе.

Таким образом, при известной корреляционной функции легко определяются следующие вероятностные характеристики:

а) среднее значение (момент первого порядка)

$$\bar{x} = \tilde{x} = \sqrt{R[\infty]};$$

б) средний квадрат (начальный момент второго порядка)

$$\bar{x}^2 = \tilde{x}^2 = R[0];$$

в) дисперсия (центральный момент второго порядка)

$$D = R[0] - R[\infty] = K[0];$$

г) среднеквадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{R[0] - R[\infty]} = \sqrt{K[0]}.$$

Корреляционную функцию можно найти на основании экспериментально снятой кривой случайного процесса при наличии достаточно длительной записи (рис. 3.5). Обработка имеющейся осциллограммы производится следующим образом. Весь интервал записи осциллограммы T_0 делится на N равных частей, длительность которых равна периоду дискретности T .

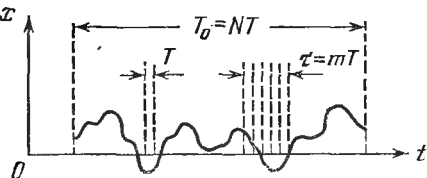


Рис. 3.5. Обработка осциллограммы реализации случайного процесса.

Затем для различных значений $\tau = mT$ находят средние значения произведений ординат

$$R[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=1}^{N-m} x_n x_{n+m}. \quad (3.28)$$

По этим значениям строится график корреляционной функции в зависимости от интервала m . Этот график может быть аппроксимирован затем некоторой функциональной зависимостью.

Корреляционную функцию можно найти по результатам эксперимента также при использовании специальных

приборов — корреляторов, которые автоматически вычисляют среднее произведение двух ординат осциллограммы, отстоящих друг от друга на расстояние $\tau = mT$.

Если найденная корреляционная функция $R[m]$ содержит постоянную составляющую $\bar{x} = \sqrt{R[\infty]}$, то, выделив ее, можно перейти к корреляционной функции $K[m]$ в соответствии с (3.20), т. е. $K[m] = R[m] - (\bar{x})^2$.

Можно также ввести в рассмотрение нормированную корреляционную функцию

$$\rho[m] = \frac{K[m]}{D} = \frac{R[m] - R[\infty]}{R[0] - R[\infty]}, \quad (3.29)$$

которая удобна тем, что всегда $\rho[0] = 1$.

Корреляционная функция $K[m]$ для неслучайных (регулярных) функций времени тождественно равна нулю. Однако корреляционная функция $R[m]$ может вычисляться и для неслучайных функций времени. Рассмотрим несколько примеров.

1. Для постоянной величины $x[n] = A_0$ (например, для постоянного тока) корреляционная функция

$$R[m] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N A_0^2 = A_0^2.$$

2. Для гармонической функции $x[n] = A_1 \sin(\omega_1 nT + \psi_1)$ корреляционная функция

$$\begin{aligned} R[m] &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N A_1^2 \sin(\omega_1 nT + \psi_1) \sin(\omega_1 nT + \omega_1 mT + \psi_1) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \frac{A_1^2}{2} [\cos \omega_1 nT - \cos(2\omega_1 nT + \omega_1 mT + 2\psi_1)]. \end{aligned}$$

При выполнении условия $2\omega_1 T \neq 2k\pi$ ($k = 1, 2, \dots$)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \frac{A_1^2}{2} (2\omega_1 nT + \omega_1 mT + 2\psi_1) = 0.$$

Тогда имеем

$$R[m] = \frac{A_1^2}{2} \cos \omega_1 mT.$$

Появление в корреляционной функции члена вида $0,5A_1^2 \cos \omega_1 mT$ указывает на наличие в случайном процессе скрытой периодичности, которая может не обнаруживаться при первом взгляде на отдельные записи реализации случайного процесса.

3. Периодическая кривая, разлагаемая в ряд Фурье

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k nT + \psi_k),$$

имеет на основании изложенного выше корреляционную функцию вида

$$R[m] = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} \cos(\omega_k mT).$$

Взаимная корреляционная функция для стационарных процессов определяется одной из следующих формул:

$$\begin{aligned} R_{xy}[m] &= M\{x[n]y[n+m]\} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]y[n+m], \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} K_{xy}[m] &= M\{(x[n] - \bar{x})(y[n+m] - \bar{y})\} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N (x[n] - \bar{x})(y[n+m] - \bar{y}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Из определения взаимной корреляционной функции следует:

$$\begin{aligned} R_{xy}[m] &= \overline{x[n]y[n+m]} = \overline{x[n-m]y[n]} = \\ &= \overline{y[n]x[n-m]} = R_{yx}[-m]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Аналогичным образом можно показать, что имеет место равенство $K_{xy}[m] = K_{yx}[-m]$. Кроме того, можно показать, что

$$\left. \begin{aligned} |R_{xy}[m]| &\leq \sqrt{R_x[0]} \sqrt{R_y[0]}, \\ |K_{xy}[m]| &\leq \sqrt{K_x[0]} \sqrt{K_y[0]}. \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

Взаимная корреляционная функция характеризует взаимную связь двух случайных процессов между собой

в разные моменты времени, отстоящие друг от друга на промежуток времени $\tau = mT$. Значение $R_{xy}[0]$ характеризует эту связь в один и тот же момент времени. Примером таких двух взаимосвязанных случайных процессов могут служить две координаты пространственного положения подвижной цели.

Для не связанных друг с другом случайных процессов для всех m справедливо равенство $R_{xy}[m] = 0$. В связи с этим говорят, что процессы *коррелированы* или *некоррелированы*. Это означает наличие или отсутствие между ними статистической связи.

Аналогично предыдущему можно также ввести понятие *нормированной взаимной корреляционной функции*.

§ 3.3. Спектральная плотность стационарных процессов

Для непрерывных процессов вводится понятие *спектральной плотности*, которая связана с корреляционной функцией взаимным преобразованием Фурье [70, 139]. Запишем формулы связи применительно к корреляционной функции $R(\tau)$:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (3.34)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.35)$$

Спектральная плотность может быть записана и как преобразование Фурье корреляционной функции $K(\tau)$. Так как спектральная плотность и корреляционная функция представляют собой четные вещественные функции, то иногда формулы (3.34) и (3.35) представляют в более простом виде:

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (3.36)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (3.37)$$

Это вытекает из того, что имеют место равенства

$$e^{j\omega\tau} = \cos \omega\tau + j \sin \omega\tau,$$

$$e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau,$$

и мнимые части могут быть отброшены после подстановки в (3.34) и (3.35), так как слева стоят вещественные функции.

Таблица 3.1

№ п.п.	Оригинал	Изображение
1	$\delta(\tau)$	1
2	1	$2\pi\delta(\omega)$
3	$ \tau $	$-\frac{2}{\omega^2}$
4	$e^{-\alpha \tau }$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$
5	$e^{-(\alpha\tau)^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2}$
6	$\sin \Omega \tau $	$\frac{2\Omega}{\Omega^2 - \omega^2}$
7	$\cos \Omega \tau$	$\pi [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)]$
8	$\sin(\Omega \tau + \psi)$	$\frac{2\Omega \cos \psi}{\Omega^2 - \omega^2} + \pi [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)] \sin \psi$
9	$e^{-\alpha \tau } \sin \Omega \tau $	$\frac{\Omega - \omega}{\alpha^2 + (\Omega - \omega)^2} + \frac{\Omega + \omega}{\alpha^2 + (\Omega + \omega)^2}$
10	$e^{-\alpha \tau } \cos \Omega \tau$	$\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\Omega - \omega)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\Omega + \omega)^2}$
11	$e^{-(\alpha\tau)^2} \cos \Omega \tau$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \left[e^{-\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^2 (\omega - \Omega)^2} + e^{-\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^2 (\omega + \Omega)^2} \right]$

Спектральная плотность вычисляется обычно по известной корреляционной функции по формулам (3.34) и (3.36), соответствующим двустороннему преобразованию Фурье четной функции $R(\tau)$ или $K(\tau)$. В таблице 3.1 приведены некоторые примеры четных функций от τ и их изображе-

ний Фурье. В таблице используются четные импульсные функции $\delta(\tau)$ и $\delta(\omega)$. Функция $\delta(\tau)$ расположена симметрично относительно начала координат и может быть определена следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \delta(\tau) &= 0, \quad \tau \neq 0, \\ \int_0^\varepsilon \delta(\tau) d\tau &= \int_{-\varepsilon}^0 \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Аналогичное определение может быть сделано и для функции $\delta(\omega)$.

При анализе автоматических систем в рассмотрение вводится также *нормированная спектральная плотность*, являющаяся изображением Фурье нормированной корреляционной функции (3.29):

$$\sigma(\omega) = \frac{S^0(\omega)}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^0(\omega) d\omega} = \frac{S^0(\omega)}{D}, \quad (3.39)$$

где спектральная плотность $S^0(\omega)$ соответствует центрированному процессу $(x - \bar{x})$ и, следовательно, является изображением Фурье корреляционной функции $K(\tau)$, а D — дисперсия.

Аналогично введенному понятию взаимной корреляционной функции могут рассматриваться взаимные спектральные плотности $S_{xy}(\omega)$ и $S_{yx}(\omega)$, являющиеся изображениями Фурье $R_{xy}(\tau)$ и $R_{yx}(\tau)$. Взаимные спектральные плотности также являются мерой связи между двумя случайными величинами. При отсутствии связи взаимные спектральные плотности равны нулю.

Введем теперь понятие спектральной плотности стационарного решетчатого процесса как двустороннего z -преобразования корреляционной функции:

$$S(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R[m] z^{-m} = F(z) + F(z^{-1}) - R[0], \quad (3.40)$$

где $F(z)$ представляет собой z -преобразование корреляционной функции $R[m]$.

Аналогично непрерывному случаю можно ввести понятие спектральной плотности как функции круговой

частоты:

$$S(e^{j\omega T}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R[m] e^{-j\omega m T} = \\ = F(e^{j\omega T}) + F(e^{-j\omega T}) - R[0], \quad (3.41)$$

или, при учете четности $R[m]$ и сопряженности комплексных величин $F(e^{j\omega T})$ и $F(e^{-j\omega T})$,

$$S(e^{j\omega T}) = R[0] + 2 \sum_{m=1}^{\infty} R[m] \cos \omega m T = \\ = 2 \operatorname{Re} F(e^{j\omega T}) - R[0]. \quad (3.42)$$

Формулы (3.41) и (3.42) могут быть записаны и для случая $\varepsilon \neq 0$, когда рассматривается случайная решетчатая функция $x[n, \varepsilon]$, корреляционная функция $R[m, \varepsilon]$ и спектральная плотность $S(e^{j\omega T}, \varepsilon)$.

Формулой обращения для спектральной плотности является преобразование Фурье [139], вычисляемое на интервале $\pm \pi T^{-1}$:

$$R[m] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} S(e^{j\omega T}) e^{j\omega m T} d\omega = \\ = \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} S(e^{j\omega T}) \cos \omega m T d\omega. \quad (3.43)$$

Если в (3.43) положить $m=0$, то будет получен средний квадрат случайной решетчатой функции:

$$\bar{x}^2[n] = R[0] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} S(e^{j\omega T}) d\omega = \\ = \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} S(e^{j\omega T}) d\omega. \quad (3.44)$$

Если рассматривается центрированный процесс с нулевым математическим ожиданием, то интегрирование спектральной плотности дает дисперсию случайной величины, рассматриваемой в дискретные моменты времени nT :

$$D = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} S^0(e^{j\omega T}) d\omega = \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} S^0(e^{j\omega T}) d\omega. \quad (3.45)$$

При использовании спектральной плотности $S(e^{j\omega T}, \epsilon)$ интегрирование дает средний квадрат решетчатой функции, рассматриваемой в дискретные моменты времени $(n + \epsilon)T$:

$$\overline{x^2}[n, \epsilon] = \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} S(e^{j\omega T}, \epsilon) d\omega. \quad (3.46)$$

Средний квадрат огибающей решетчатой функции $x(t)$ может быть получен интегрированием результата, даваемого формулой (3.46), по смещению ϵ в пределах от 0 до 1:

$$\overline{x^2(t)} = \int_0^1 \overline{x^2[n, \epsilon]} d\epsilon = \frac{T}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi/T} S(e^{j\omega T}, \epsilon) d\epsilon d\omega. \quad (3.47)$$

Аналогичные формулы могут быть записаны для дисперсии.

Спектральная плотность может быть представлена как функция псевдочастоты. Так как имеют место равенства

$$e^{j\omega T} = \frac{1 + j\lambda \frac{T}{2}}{1 - j\lambda \frac{T}{2}}, \quad d\omega = \frac{d\lambda}{\left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)\left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)} = \frac{d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2},$$

то можно положить

$$S^*(\lambda) = S\left(\frac{1 + j\lambda \frac{T}{2}}{1 - j\lambda \frac{T}{2}}\right) = 2 \operatorname{Re} F\left(\frac{1 + j\lambda \frac{T}{2}}{1 - j\lambda \frac{T}{2}}\right) - R[0]. \quad (3.48)$$

Формула обращения для $S^*(\lambda)$ приобретает вид

$$\begin{aligned} R[m] &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1 + j\lambda \frac{T}{2}}{1 - j\lambda \frac{T}{2}} \right]^m \frac{S^*(\lambda) d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2} = \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2m \operatorname{arctg} \lambda \frac{T}{2}} \frac{S^*(\lambda) d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2} = \\ &= \frac{T}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{S^*(\lambda) \cos\left(2m \operatorname{arctg} \lambda \frac{T}{2}\right) d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Если в последнем выражении положить $m=0$, то будет получена формула для определения среднего квадрата случайной решетчатой функции:

$$\overline{x^2[n]} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^*(\lambda) d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2}. \quad (3.50)$$

Спектральная плотность $S^*(\lambda)$ удобна тем, что для нахождения интеграла (3.50) возможно использование таблиц интегралов спектральных плотностей непрерывных случайных процессов (Приложение).

Кроме того, в тех случаях, когда спектральная плотность $S^*(\lambda)$ имеет существенные значения в области сравнительно низких частот $|\lambda| < T^{-1}$, формула (3.49) может быть заменена приближенной:

$$R[m] \approx \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^*(\lambda) e^{j\lambda m T} d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2} = \frac{T}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{S^*(\lambda) \cos \lambda m T d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2}. \quad (3.51)$$

Таким образом, формула обращения здесь совпадает с двусторонним преобразованием Фурье, что позволяет использовать для нахождения связи между спектральной плотностью и корреляционной функцией таблицы преобразования (см., например, таблицу 3.1).

§ 3.4. Типовые решетчатые случайные стационарные процессы

Ниже рассматриваются процессы, которые часто встречаются при расчете автоматических систем. Рассматриваются только центрированные процессы с нулевым математическим ожиданием. Для них корреляционная функция $R[m] = K[m]$ и средний квадрат решетчатой функции равен ее дисперсии.

Дискретный белый шум. Если для непрерывной функции $v(t)$, представляющей собой центрированную помеху, эффективное время корреляции

$$\Delta\tau = \frac{1}{K(0)} \int_0^{\infty} K(\tau) d\tau$$

меньше периода дискретности T , то такой процесс может быть представлен как дискретный белый шум с корреляционной функцией

$$K[m] = K[0] \delta_0[m], \quad (3.52)$$

где $K[0] = D$ — дисперсия, а $\delta_0[m]$ — единичная импульсная функция, равная единице при $m=0$ и равная нулю при $m \neq 0$. Этому белому шуму соответствует спектральная плотность

$$S(z) = S(e^{j\omega T}) = S^*(\lambda) = D. \quad (3.53)$$

Как видно из (3.53), дискретному белому шуму соответствует постоянное значение спектральной плотности в пределах изменения частоты $-\infty < \omega < \infty$. Спектральная плотность в функции псевдочастоты совпадает со спектральной плотностью $S(z)$.

Шумы квантования. К процессам типа дискретного белого шума обычно сводится помеха, вызываемая эффектом квантования по уровню во входных и выходных преобразователях ЦВМ. Так, входной преобразователь, характеристика которого изображена на рис. 2.3, *a*, осуществляет округление входной величины $g(t)$ в соответствии с формулой (2.9):

$$g_0 = E \left\{ \delta_1^{-1} g + \frac{1}{2} \text{sign } g \right\},$$

где $E(\alpha)$ — целая часть числа α , δ_1 — цена единицы младшего разряда. Максимальное значение ошибки округления составляет здесь $0,5\delta_1$. Если считать, что все значения ошибки округления от $-0,5\delta_1$ до $+0,5\delta_1$ равновероятны, то для равномерного закона распределения дисперсия ошибки составит

$$D_v = K_v[0] = \int_{-0,5\delta_1}^{0,5\delta_1} v^2 \vartheta(v) dv = \int_{-0,5\delta_1}^{0,5\delta_1} \frac{v^2 dv}{\delta_1} = \frac{\delta_1^2}{12}.$$

Кроме того, если ввести предположение о независимости ошибок округления в каждом такте опроса входного преобразователя, то корреляционная функция и спектральная плотность для шума квантования могут

быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} K_v[m] &= K[0] \delta_0[m] = \frac{\delta_1^2}{12} \delta_0[m], \\ S_v(z) &= S_v(e^{j\omega T}) = S_v^*(\lambda) = \frac{\delta_1^2}{12}. \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

Это позволяет в некоторых случаях заменить структурную схему преобразователя непрерывной величины в код (рис. 2.4) более простой схемой, изображенной на рис. 3.6. Здесь эффект квантования по уровню учитывается в виде шума $v(t)$, корреляционная функция и спектральная плотность которого определяются формулами (3.54).

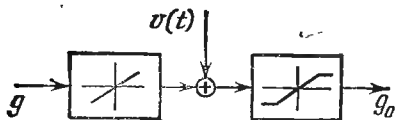


Рис. 3.6. Эквивалентная схема квантователя по уровню.

Аналогичный прием замены нелинейной части преобразователя шумом квантования может применяться для других случаев округления в ЦВМ — в арифметической части и в выходных преобразователях. Это позволяет свести расчет ЦАС к расчету импульсной системы.

Процессы с корреляционной функцией экспоненциального вида. Во многих практических случаях корреляционная функция непрерывного центрированного случайного процесса аппроксимируется формулой $K(\tau) = D \exp(-\mu|\tau|)$, где D — дисперсия. Применительно к решетчатому процессу корреляционная функция должна быть записана в виде $K[m] = D \exp(-\mu T|m|)$.

Двустороннее z -преобразование от этой функции дает спектральную плотность

$$S(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D e^{-\mu T|m|} z^{-m} = \frac{D(1-d^2)z}{(z-d)(1-dz)}, \quad (3.55)$$

где $d = \exp(-\mu T)$. Подстановка $z = e^{j\omega T}$ дает спектральную плотность в функции частоты ω :

$$S(e^{j\omega T}) = \frac{D(1-d^2)}{1+d^2-2d \cos \omega T}. \quad (3.56)$$

При интегрировании этой спектральной плотности в соответствии с формулой (3.44) получается дисперсия

$$\frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} \frac{D(1-d^2) d\omega}{1+d^2-2d \cos \omega T} = D. \quad (3.57)$$

Нормированная спектральная плотность имеет здесь вид

$$\sigma(\omega) = \frac{1-d^2}{1+d^2-2d \cos \omega T}. \quad (3.58)$$

Спектральная плотность (3.56) изображена на рис. 3.7, а.

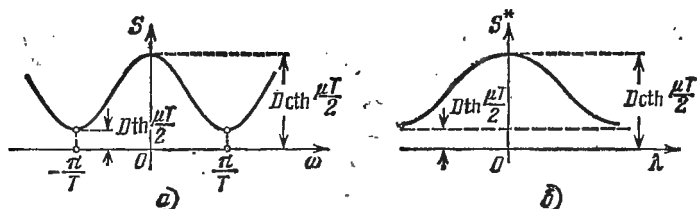


Рис. 3.7. Спектральные плотности сигнала с экспоненциальной корреляционной функцией.

Найдем теперь спектральную плотность рассматриваемого процесса в функции псевдочастоты. Используя формулу (3.48), получаем

$$S^*(\lambda) = \frac{2T_0 D \left(1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4}\right)}{T(1 + \lambda^2 T_0^2)}, \quad (3.59)$$

где эквивалентная постоянная времени

$$T_0 = \frac{1+d}{1-d} \frac{T}{2} = \frac{T}{2} \operatorname{cth} \frac{\mu T}{2}.$$

Заметим, что при $T \rightarrow 0$ спектральная плотность $S^*(\lambda)$ переходит с точностью до множителя T в спектральную плотность непрерывного случайного процесса, соответствующего корреляционной функции $K(\tau) = D \exp(-\mu|\tau|)$:

$$\lim_{T \rightarrow 0} T S^*(\lambda) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{2T_0 D \left(1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4}\right)}{(1 + \lambda^2 T_0^2)} = \frac{2\mu D}{\mu^2 + \omega^2}. \quad (3.60)$$

Интегрирование выражения (3.59) в бесконечных пределах в соответствии с (3.50) также дает дисперсию

$$\frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+d}{1-d} \frac{D d\lambda}{1 + \left(\frac{1+d}{1-d}\right)^2 \frac{\lambda^2 T^2}{4}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2D du}{1+u^2} = D. \quad (3.61)$$

График спектральной плотности $S^*(\lambda)$ близок по своему виду к графику спектральной плотности соответствующего непрерывного процесса (3.60). Он построен на рис. 3.7, б.

Процесс с равномерным спектром в ограниченной полосе частот. В непрерывных системах часто используется

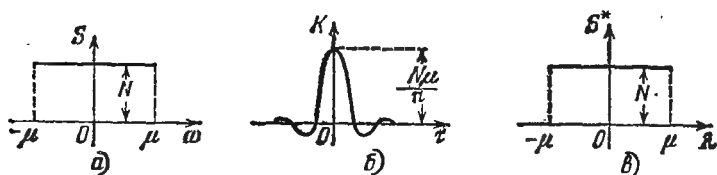


Рис. 3.8. Равномерная спектральная плотность в ограниченной полосе частот.

аппроксимация спектральной плотности случайного процесса белым шумом с ограниченной полосой (рис. 3.8, а). Этой спектральной плотности соответствует корреляционная функция

$$K(\tau) = \frac{N}{\pi} \int_0^{\mu} \cos \omega \tau d\omega = \frac{N \sin \mu \tau}{\pi \tau} = \frac{D_0 \sin \mu \tau}{\mu \tau}. \quad (3.62)$$

Корреляционная функция построена на рис. 3.8, б.

Достоинство подобного представления характеристик случайного процесса заключается в том, что оказываются ограниченными дисперсии производных всех порядков. Действительно, для производной k -го порядка дисперсия может быть определена [8] по формуле

$$D_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu} N \omega^{2k} d\omega = \frac{N \mu^{2k+1}}{\pi (2k+1)} = \frac{D_0 \mu^{2k}}{2k+1}. \quad (3.63)$$

Формула (3.63), в частности, может быть использована для определения диапазона частот $\pm \mu$. Если заданы зна-

чения дисперсий случайного сигнала D_0 и его первой производной D_1 , то из (3.63) следует:

$$\mu = \sqrt{\frac{3D_1}{D_0}}. \quad (3.64)$$

Рассмотрим теперь случай, когда этот случайный процесс представляет собой производящую функцию для решетчатого случайного процесса. Здесь можно выделить два случая.

Если спектр относительно широк и выполняется условие $\mu > T^{-1}$, то такой процесс сводится к дискретному белому шуму.

Если спектр относительно узок и выполняется условие $\mu \ll T^{-1}$, то корреляционная функция решетчатого процесса будет

$$K[m] = \frac{N \sin \mu m T}{\pi m T} = \frac{D_0 \sin \mu m T}{\mu m T}. \quad (3.65)$$

Спектральная плотность $S(e^{j\omega T})$, соответствующая (3.65), будет определяться выражением

$$\begin{aligned} S(e^{j\omega T}) &= \frac{D_0}{\mu T} \left[2 \operatorname{Re} \frac{\sin \mu T}{e^{j\omega T} - \cos \mu T} - \mu T \right] = \\ &= D_0 \left[\frac{\sin \mu T (\cos \omega T - \cos \mu T)}{\mu T (1 - \cos \omega T \cos \mu T)} \right]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Однако использование ее затруднено сложностью полученного выражения (3.66).

Рассмотрим спектральную плотность $S^*(\lambda)$ вида, изображенного на рис. 3.8, в. Если $\mu \ll T^{-1}$, то на основании приближенной формулы (3.51) получаем

$$\begin{aligned} K[m] &\approx \frac{1}{\pi} \int_0^\mu \frac{N \cos \lambda m T d\lambda}{\left| 1 + j\lambda \frac{T}{2} \right|^2} \approx \frac{1}{\pi} \int_0^\mu N \cos \lambda m T d\lambda = \\ &= \frac{N \sin \mu m T}{\pi m T} = \frac{D_0 \sin \mu m T}{\mu m T}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Последнее выражение полностью соответствует корреляционной функции (3.65). Так как для частот $\omega < T^{-1}$ псевдочастота $\lambda = 2T^{-1} \operatorname{tg} 0,5\omega T \approx \omega$, то пределы изменения частоты $\pm \mu$ на рис. 3.8, а и рис. 3.8, в практически совпадают.

Нерегулярная качка. Для описания случайных непрерывных процессов типа нерегулярной качки морских судов

(вообще подвижных объектов) часто используется аппроксимация корреляционной функции в виде

$$K(\tau) = D_0 e^{-\mu|\tau|} \cos \beta \tau, \quad (3.68)$$

где β — преобладающая частота, а μ — коэффициент нерегулярности. При $\mu = 0$ процесс представляет собой так называемую регулярную качку, т. е. гармоническое движение с амплитудой $A = \sqrt{2D_0}$ и случайной фазой.

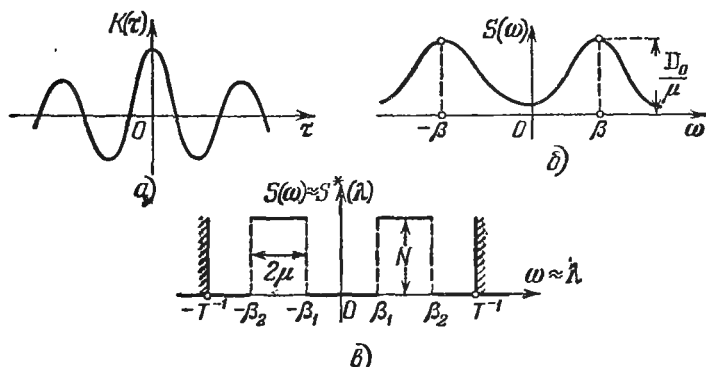


Рис. 3.9. Корреляционная функция и спектральные плотности сигнала типа нерегулярной качки.

Корреляционная функция (3.68) изображена на рис. 3.9, а. Она используется также для аппроксимации реальных корреляционных функций и иных случайных процессов, не связанных с качкой какого-либо подвижного объекта, в тех случаях, когда корреляционная функция носит затухающий колебательный характер. Спектральная плотность такого процесса

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{D_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu|\tau|} \cos \beta \tau e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \mu D_0 \left[\frac{1}{\mu^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{1}{\mu^2 + (\beta + \omega)^2} \right] = \\ &= \frac{2\mu D_0 \left(1 + \frac{\omega^2}{\beta^2 + \mu^2} \right)}{(\beta^2 + \mu^2) \left| 1 + \frac{2\mu j\omega}{\beta^2 + \mu^2} + \frac{(j\omega)^2}{\beta^2 + \mu^2} \right|^2} = \frac{a D_0 (1 + b\omega^2)}{|1 + aj\omega + b(j\omega)^2|^2}, \quad (3.69) \end{aligned}$$

где $a = 2\mu (\beta^2 + \mu^2)^{-1}$, $b = (\beta^2 + \mu^2)^{-1}$.

Недостаток аппроксимации вида (3.68) заключается в том, что дисперсия первой производной рассматриваемой случайной величины $D_1 \rightarrow \infty$. В этом нетрудно убедиться, умножив $S(\omega)$ на квадрат частоты и проинтегрировав полученную спектральную плотность в бесконечных пределах.

Для устранения этого недостатка используется другая форма аппроксимации в виде

$$K(\tau) = D_0 e^{-\mu|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\mu}{\beta} \sin \beta|\tau| \right). \quad (3.70)$$

Этой корреляционной функции соответствует спектральная плотность (рис. 3.9, б)

$$S(\omega) = \frac{\mu D_0}{\beta} \left[\frac{2\beta - \omega}{\mu^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{2\beta + \omega}{\mu^2 + (\beta + \omega)^2} \right] = \\ = \frac{2aD_0}{|1 + aj\omega + b(j\omega)^2|^2}, \quad (3.71)$$

где $a = 2\mu(\beta^2 + \mu^2)^{-1}$, $b = (\beta^2 + \mu^2)^{-1}$.

Интегрирование спектральной плотности $\omega^2 S(\omega)$, которая соответствует производной рассматриваемой величины, в бесконечных пределах дает дисперсию производной

$$D_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S(\omega) d\omega = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2aD_0\omega^2 d\omega}{|1 + aj\omega + b(j\omega)^2|^2} = (\beta^2 + \mu^2) D_0. \quad (3.72)$$

Однако дисперсия второй производной рассматриваемой случайной величины стремится к бесконечности, что указывает на несовершенство и аппроксимации вида (3.70).

Для решетчатого случайного процесса типа нерегулярной качки корреляционная функция может быть получена из (3.68):

$$K[m] = D_0 e^{-\mu T|m|} \cos \beta m T. \quad (3.73)$$

Ей соответствует спектральная плотность

$$S^*(\lambda) = \frac{D_0 A \left(B + \frac{\lambda^2 T^2}{4} \right) \left(1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4} \right)}{\left(B - \frac{\lambda^2 T^2}{4} \right)^2 + 4A^2 \frac{\lambda^2 T^2}{4}}, \quad (3.74)$$

где

$$A = \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu T}{2} \operatorname{ch} \frac{\mu T}{2}}{1 + \operatorname{sh} \frac{\mu T}{2} - \sin^2 \frac{\beta T}{2}},$$

$$B = \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\mu T}{2} + \sin^2 \frac{\beta T}{2}}{1 + \operatorname{sh} \frac{\mu T}{2} - \sin^2 \frac{\beta T}{2}}.$$

Обычно имеют место неравенства $\mu T \ll 1$ и $\beta T \ll 1$ и спектральная плотность может быть представлена в приближенном виде:

$$S^*(\lambda) = \frac{aD_0(1+b^2\lambda^2)\left(1+\frac{\lambda^2T^2}{4}\right)}{T|1+aj\lambda+b(j\lambda)^2|^2}, \quad (3.75)$$

где $a=2\mu(\beta^2+\mu^2)^{-1}$, $b=(\beta^2+\mu^2)^{-1}$. Формула (3.75) совпадает с (3.69) при замене $\omega=\lambda$ и умножении на $T^{-1}\left(1+\frac{\lambda^2T^2}{4}\right)$.

Для решетчатого случайного процесса типа нерегулярной качки более совершенная форма корреляционной функции может быть получена из (3.70):

$$K[m] = D_0 e^{-\mu T|m|} \left(\cos \beta T m + \frac{\mu}{\beta} \sin \beta T |m| \right). \quad (3.76)$$

Если $\beta T \ll 1$ и $\mu T \ll 1$, то спектральная плотность для псевдочастот $\lambda < T^{-1}$ практически совпадает со спектральной плотностью (3.71) при замене $\omega=\lambda$ (рис. 3.9, б) и умножении на $T^{-1}\left(1+\frac{\lambda^2T^2}{4}\right)$:

$$S^*(\lambda) \approx \frac{2aD_0\left(1+\frac{\lambda^2T^2}{4}\right)}{T|1+aj\lambda+b(j\lambda)^2|^2}. \quad (3.77)$$

Удобная форма аппроксимации спектральной плотности $S(\omega)$, для которой существуют ограниченные по величине производные случайной величины всех порядков, изображена на рис. 3.9, в. Если $\beta_2 < T^{-1}$, то спектральная плотность $S^*(\lambda)$ практически совпадает с $S(\omega)$, а псевдочастота $\lambda \approx \omega$.

Интегрирование изображенной на рис. 3.9, в спектральной плотности по всем частотам дает дисперсию рассматриваемого сигнала

$$D_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} N d\omega = \frac{N(\beta_2 - \beta_1)}{\pi} = \frac{2\mu N}{\pi}. \quad (3.78)$$

Корреляционная функция

$$K(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} N \cos \omega \tau d\omega = \frac{D_0 \sin \mu \tau}{\mu \tau} \cos \beta \tau, \quad (3.79)$$

где $\beta = 0,5(\beta_1 + \beta_2)$, $\mu = 0,5(\beta_2 - \beta_1)$.

Для производной k -го порядка дисперсия может быть определена из выражения

$$\begin{aligned} D_k &= \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} N \omega^{2k} d\omega = \frac{D_0 (\beta_2^{2k+1} - \beta_1^{2k+1})}{(2k+1)(\beta_2 - \beta_1)} = \\ &= \frac{D_0}{2(2k+1)\mu} [(\beta + \mu)^{2k+1} - (\beta - \mu)^{2k+1}]. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Для первой производной из (3.80) имеем

$$D_1 = D_0 \left(\beta^2 + \frac{\mu^2}{3} \right) \approx D_0 \beta^2. \quad (3.81)$$

Для второй производной

$$D_2 = D_0 \left(\beta^4 + 2\beta^2 \mu^2 + \frac{\mu^4}{5} \right) \approx D_0 \beta^2 (\beta^2 + 2\mu^2). \quad (3.82)$$

Формулы (3.81) и (3.82) позволяют по заданным значениям D_0 , D_1 и D_2 определить преобладающую частоту β и коэффициент нерегулярности μ .

Корреляционная функция для решетчатого случайного процесса может быть получена из (3.76) подстановкой $\tau = mT$:

$$K[m] = \frac{D_0 \sin \mu mT}{\mu mT} \cos \beta mT. \quad (3.83)$$

Большее приближение к действительности может дать аппроксимация спектральной плотности выражением

$$S(\omega) = N \left[1 - \frac{(\omega - \beta)^2}{\mu^2} \right] = \frac{3\pi D_0}{4\mu} \left[1 - \frac{(\omega - \beta)^2}{\mu^2} \right]$$

при $\beta - \mu \leq \omega \leq \beta + \mu$. Как и в случае аппроксимации, изображенной на рис. 3.9, в, здесь оказываются ограниченными дисперсии всех производных случайной величины. Однако этой аппроксимации соответствует более сложное по сравнению с (3.79) выражение для корреляционной функции, которое здесь не приводится.

Гармонический сигнал. Рассмотрим процесс вида $x(t) = A \sin(\beta t + \psi)$, где A и β представляют собой известные амплитуду и угловую частоту, а ψ — случайную начальную фазу с равномерным распределением в интервале от 0 до 2π . Его корреляционная функция имеет вид $K(\tau) = D_0 \cos \beta \tau$, где дисперсия $D_0 = 0,5A^2$.

Для решетчатой функции корреляционная функция $K[m] = D \cos \beta mT$. Эта функция может быть получена из (3.73) при $\mu \rightarrow 0$. Спектральная плотность может быть получена из (3.74) также при $\mu \rightarrow 0$. При этом получается, что $S^*(\lambda) \equiv 0$ при выполнении условия $\lambda^2 T^2 \neq 4B$. При равенстве $\lambda^2 T^2 = 4B$ в спектральной плотности будет наблюдаться бесконечный пик типа δ -функции. Последнее условие может быть записано в виде

$$\lambda = \pm \frac{2}{T} \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{\beta T}{2}}{1 - \sin^2 \frac{\beta T}{2}}} = \pm \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\beta T}{2} = \pm \lambda_0.$$

Таким образом, спектральная плотность гармонического процесса со случайной начальной фазой в соответствии с таблицей 3.1 может быть записана в виде

$$S^*(\lambda) = D_0 \pi [\delta(\lambda - \lambda_0) + \delta(\lambda + \lambda_0)],$$

и она содержит два бесконечных пика типа δ -функции на частотах $\pm \lambda_0$.

§ 3.5. Прохождение случайного сигнала через линейную систему

Рассмотрим линейную систему (рис. 3.10, а) с дискретной передаточной функцией $W(z)$ и приведенной весовой функцией $w_n[n]$, которые связаны между собой формулой z -преобразования

$$W(z) = \sum \{w_n[n]\}.$$

Пусть на входе действует центрированный случайный решетчатый сигнал $x_1[n]$ с корреляционной функцией $K_1[n, n_1]$. Выходной сигнал на основании формулы (2.119)

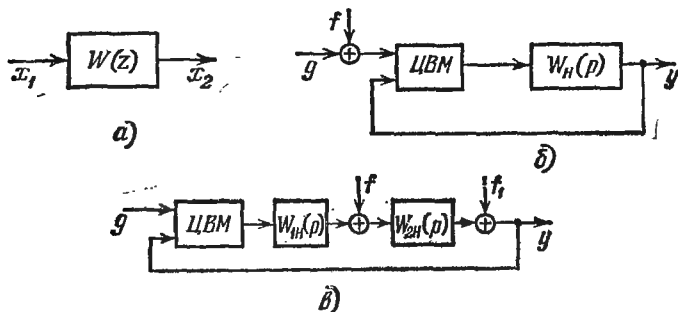


Рис. 3.10. Линейные системы со случайными воздействиями.

может быть представлен для двух моментов времени nT и n_1T в виде

$$\left. \begin{aligned} x_2[n] &= \sum_{i=0}^n w_n[i] x_1[n-i], \\ x_2[n_1] &= \sum_{k=0}^{n_1} w_n[k] x_1[n_1-k]. \end{aligned} \right\} \quad (3.84)$$

После перемножения левых и правых частей формул (3.84) получим

$$x_2[n] x_2[n_1] = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{n_1} w_n[i] w_n[k] x_1[n-i] x_1[n_1-k]. \quad (3.85)$$

Далее, переходя к математическому ожиданию, можно найти корреляционную функцию решетчатого сигнала на выходе линейной системы

$$K_2[n, n_1] = \sum_{i=0}^n w_n[i] \sum_{k=0}^{n_1} w_n[k] K_1[n-i, n_1-k]. \quad (3.86)$$

Для определения дисперсии выходного сигнала необходимо в последнем выражении положить $n_1 = n$. Тогда

$$D_2[n] = \sum_{i=0}^n w_n[i] \sum_{k=0}^n w_n[k] K_1[n-i, n-k]. \quad (3.87)$$

Если на входе действует стационарный процесс, то $K_1[n, n_1] = K_1[m]$, где $m = n - n_1$. Тогда

$$K_2[n, n_1] = \sum_{i=0}^n w_n[i] \sum_{k=0}^{n_1} w_n[k] K_1[m - i + k], \quad (3.88)$$

$$D_2[n] = \sum_{i=0}^n w_n[i] \sum_{k=0}^n w_n[k] K_1[k - i]. \quad (3.89)$$

Если рассматриваемая система устойчива, то $K_2[n, n_1]$ и $D_2[n]$ стремятся к некоторым пределам, которые определяют стационарный процесс на выходе. Они могут быть найдены, если положить $n \rightarrow \infty$ и $n_1 \rightarrow \infty$ при $n - n_1 = m$. Тогда

$$K_2[m] = \sum_{i=0}^{\infty} w_n[i] \sum_{k=0}^{\infty} w_n[k] K_1[m - i + k], \quad (3.90)$$

$$D_2 = K_2[0] = \sum_{i=0}^{\infty} w_n[i] \sum_{k=0}^{\infty} w_n[k] K_1[k - i]. \quad (3.91)$$

Если входной сигнал представляет собой дискретный белый шум с корреляционной функцией $K_1[m] = D_1 \delta_0[m]$, то формула (3.87) может быть представлена в следующем виде:

$$D_2[n] = D_1 \sum_{i=0}^n w_n[i] \sum_{k=0}^n w_n[k] \delta_0[k - i] = D_1 \sum_{k=0}^n w_n^2[k]. \quad (3.92)$$

Установившееся значение дисперсии выходного сигнала в этом случае

$$D_2 = D_2[\infty] = D_1 \sum_{k=0}^{\infty} w_n^2[k]. \quad (3.93)$$

В соответствии с формулами (2.112) и (2.113) сумма квадратов весовой функции, входящая в (3.93), может быть найдена интегрированием квадрата модуля

передаточной функции $W(e^{j\omega T})$ или $W^*(j\lambda)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_n^2[k] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |W(e^{j\omega T})|^2 d\omega = T \Delta\omega_s, \quad (3.94)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_n^2[k] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|W^*(j\lambda)|^2 d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2} = T \Delta\lambda_s. \quad (3.95)$$

Здесь введена эквивалентная полоса пропускания рассматриваемой линейной системы $\Delta\omega_s = \Delta\lambda_s$. Безразмерная полоса пропускания $T\Delta\omega_s = T\Delta\lambda_s$. В результате установившееся значение дисперсии выходной величины может быть выражено через эквивалентную полосу пропускания в виде

$$D_2 = D_1 T \Delta\omega_s = D_1 T \Delta\lambda_s. \quad (3.96)$$

Пример 3.1. Рассмотрим разомкнутый канал с ЦВМ, содержащий непрерывное апериодическое звено первого порядка с передаточной функцией $W_n(p) = k_n(1 + T_1 p)^{-1}$. При $D(z) = 1$ дискретная передаточная функция в соответствии с (2.136) будет

$$W(z) = \frac{\delta}{\delta_1} \frac{z-1}{z} \approx \left\{ \frac{k_n}{p(1 + T_1 p)} \right\} = \frac{\delta k_n (1-d)}{\delta_1 (z-d)},$$

где $d = \exp(-T/T_1)$. Передаточная функция по псевдо-частоте

$$W^*(j\lambda) = W\left(\frac{1 + j\lambda \frac{T}{2}}{1 - j\lambda \frac{T}{2}}\right) = \frac{\delta k_n}{\delta_1} \frac{1 - j\lambda \frac{T}{2}}{1 + j\lambda T_s},$$

где эквивалентная постоянная времени $T_s = 0,5T(1+d) \times (1-d)^{-1}$. Приведенная весовая функция канала (реакция системы на единственную единичную дискрету на входе) будет здесь

$$\begin{aligned} w_n[n] &= K \left\{ \left(1 - e^{-\frac{nT}{T_1}}\right) \cdot 1[n] - \left(1 - e^{-\frac{(n-1)T}{T_1}}\right) \cdot 1[n-1] \right\} = \\ &= K \frac{1-d}{d} e^{-\frac{nT}{T_1}} \cdot 1[n-1] = K \frac{1-d}{d} d^n \cdot 1[n-1], \end{aligned}$$

где $K = k_n \delta \delta_1^{-1}$ — общий коэффициент передачи канала. В соответствии с формулой (3.90) дисперсия выходной

величины при действии на входе шума квантования (3.54) будет

$$D_2[n] = \frac{\delta_1^2}{12} K^2 \frac{(1-d)^2}{d^2} \sum_{k=0}^n d^{2k} \cdot 1[k-1] = \frac{\delta^2 k_H^2}{12} \frac{1-d}{1+d} (1-d^{2n}).$$

Установившееся значение дисперсии при $n \rightarrow \infty$

$$D_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} D_2[n] = \frac{\delta^2 k_H^2}{12} \frac{1-d}{1+d} = \frac{\delta_1^2}{12} K^2 \frac{1-d}{1+d}.$$

Установившееся значение дисперсии можно найти также по эквивалентной полосе пропускания (3.93):

$$\begin{aligned} T d\lambda_{\text{э}} &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|W^*(j\lambda)|^2 d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2} = \\ &= \frac{T \delta^2 k_H^2}{2\pi \delta_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{|1 + j\lambda T_{\text{э}}|^2} = \frac{\delta^2 k_H^2}{\delta_1^2} \frac{1-d}{1+d}, \end{aligned}$$

откуда на основании (3.96) можно получить

$$D_2 = D_1 T \Delta\lambda_{\text{э}} = \frac{\delta_1^2}{12} K^2 \frac{1-d}{1+d} = \frac{\delta^2 k_H^2}{12} \frac{1-d}{1+d}.$$

Рассмотрим теперь вопрос нахождения спектральной плотности $S(e^{j\omega T})$ или $S^*(\lambda)$ и установившейся дисперсии D_2 выходной величины линейной системы по спектральной плотности входной величины. В качестве исходной возьмем формулу (3.90):

$$K_2[m] = \sum_{i=0}^{\infty} w_n[i] \sum_{k=0}^{\infty} w_n[k] K_1[m-i+k].$$

Спектральная плотность выходной величины

$$\begin{aligned} S_2(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_2[m] z^{-m} = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} w_n[i] \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_n[k] \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_1[m-i+k] z^{-m}. \quad (3.97) \end{aligned}$$

Нижние пределы суммирования по i и k в (3.97) могут быть взяты равными $-\infty$, так как при $n < 0$ весовая

функция $w_n[n] \equiv 0$. Произведя подстановку $m - i + k = m_1$, имеем из (3.97)

$$S_2(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} w_n[i] z^{-i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_n[k] z^{+k} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} K_1[m_1] z^{-m_1} = \\ = W(z) W(z^{-1}) S_1(z). \quad (3.98)$$

Переход к спектральным плотностям $S_1(e^{j\omega T})$ и $S_2(e^{j\omega T})$ по формуле (3.41) дает

$$S_2(e^{j\omega T}) = |W(e^{j\omega T})|^2 S_1(e^{j\omega T}). \quad (3.99)$$

Последнее выражение можно также записать для псевдо-частот:

$$S_2^*(\lambda) = |W^*(j\lambda)|^2 S_1^*(\lambda). \quad (3.100)$$

Интегрирование (3.100) в бесконечных пределах дает установившееся значение дисперсии выходной величины:

$$D_2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|W^*(j\lambda)|^2 S_1^*(\lambda) d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2}. \quad (3.101)$$

Отметим, что закон распределения для случайной величины может, вообще говоря, меняться при прохождении ее через линейную систему. Однако в случае, если на входе линейной системы имеется нормальное распределение случайной величины x_1 , то на выходе для случайной величины x_2 также будет иметь место нормальное распределение.

При вычислении интеграла (3.101) обычно приходится иметь дело с подынтегральным выражением вида

$$\frac{|B(j\lambda)|^2}{|A(j\lambda)|^2},$$

где $A(j\lambda)$ и $B(j\lambda)$ представляют собой некоторые полиномы от комплексной переменной $j\lambda$. Наивысшую степень знаменателя обозначим $2n$. Наивысшая степень числителя в реальной системе может быть не выше $2n-2$. Для удобства интегрирования написанное выше выражение обычно представляют в виде

$$\frac{|B(j\lambda)|^2}{|A(j\lambda)|^2} = \frac{G(j\lambda)}{A(j\lambda) A(-j\lambda)},$$

где

$$A(j\lambda) = a_0(j\lambda)^n + a_1(j\lambda)^{n-1} + \dots + a_n,$$

$$G(j\lambda) = b_0(j\lambda)^{2n-2} + b_1(j\lambda)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}.$$

Полином $G(j\lambda)$ содержит только четные степени $j\lambda$. Полином $A(j\lambda)$ для устойчивой системы может иметь корни только в верхней полуплоскости. Область устойчивости оказалась в верхней полуплоскости вследствие того, что была использована подстановка $w = j\lambda T/2$, а множитель j обозначает поворот комплексного числа на угол $\pi/2$. Таким образом, вычисление дисперсии (3.101) можно свести к нахождению интеграла

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(j\lambda) d\lambda}{A(j\lambda) A(-j\lambda)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(j\lambda) d\lambda}{|A(j\lambda)|^2}. \quad (3.102)$$

В общем случае при любом n для устойчивой системы интеграл I_n может быть представлен в виде

$$I_n = \frac{1}{2a_0} \frac{M_n}{\Delta_n}, \quad (3.103)$$

где

$$\Delta_n = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \quad (3.104)$$

совпадает с точностью до знака со старшим определителем Гурвица, а числитель равен

$$M_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}. \quad (3.105)$$

Интегралы такого вида вычислены до $n=7$ и сведены в таблицы (см. Приложение).

Заметим, что знаменатель правых частей приведенных в Приложении формул представляет собой Δ_{n-1} — определитель Гурвица. На границе колебательной устойчивости этот определитель обращается в нуль, а дисперсия выходной величины будет стремиться к бесконечности.

Все рассмотренные формулы, используемые для нахождения корреляционных функций, спектральных плотностей

и дисперсий выходной величины линейной системы, предполагают рассмотрение этой величины только в дискретные моменты времени $t = nT$. Если необходимо рассматривать непрерывную выходную величину и в промежутках между этими моментами времени, то следует воспользоваться приведенной весовой функцией $w_n[n, \varepsilon]$ и передаточной функцией линейной системы (2.124):

$$W(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n[n, \varepsilon] z^{-n},$$

и внести соответствующие изменения во все рассмотренные выше зависимости. Так, например, формула (3.90) должна быть записана для выходного решетчатого сигнала в виде

$$K_2[m, \varepsilon] = \sum_{i=0}^{\infty} w_n[i, \varepsilon] \sum_{k=0}^{\infty} w_n[k, \varepsilon] K_1[m - i + k]. \quad (3.106)$$

Установившееся значение дисперсии решетчатой выходной величины в соответствии, например, с формулой (3.101) будет

$$D_2(\varepsilon) = K_2[0, \varepsilon] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|W^*(j\lambda, \varepsilon)|^2 S_1^*(\lambda) d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2}. \quad (3.107)$$

Усреднение последнего выражения на интервале $0 \leq \varepsilon < 1$ дает дисперсию непрерывной выходной величины дискретной линейной системы

$$\overline{D_2} = \int_0^1 D_2(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (3.108)$$

Однако в большинстве случаев в расчетах можно ограничиваться рассмотрением дисперсии D_2 непрерывной величины, определяемой для дискретных моментов времени nT .

§ 3.6. Расчет установившихся ошибок в линейризованных ЦАС

Замкнутая ЦАС может находиться под воздействием случайного задающего сигнала $g(t)$ и случайного возмущающего воздействия $f(t)$, приложенного в произвольной точке системы (рис. 3.10). Будем считать, что оба сигнала соответствуют случайным стационарным процессам,

В простейшем случае, когда возмущающее воздействие отсутствует, спектральная плотность ошибки

$$S_e^*(\lambda) = |H_e^*(j\lambda)|^2 S_g^*(\lambda) = \frac{S_g^*(\lambda)}{|1 + W^*(j\lambda)|^2}, \quad (3.109)$$

где $S_g^*(\lambda)$ — спектральная плотность задающего воздействия, $H_e^*(j\lambda)$ — частотная передаточная функция замкнутой системы для ошибки, $W^*(j\lambda)$ — частотная передаточная функция разомкнутой системы. Интегрирование (3.109) в бесконечных пределах дает дисперсию ошибки

$$D_e = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_g^*(\lambda) d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2 |1 + W^*(j\lambda)|^2}. \quad (3.110)$$

Спектральная плотность выходной величины

$$S_y^*(\lambda) = |H^*(j\lambda)|^2 S_g^*(\lambda) = \left| \frac{W^*(j\lambda)}{1 + W^*(j\lambda)} \right|^2 S_g^*(\lambda), \quad (3.111)$$

где $H^*(j\lambda)$ — частотная передаточная функция замкнутой системы.

Интегрирование (3.111) в бесконечных пределах дает дисперсию управляемой величины, рассматриваемой в дискретные моменты времени $t = nT$:

$$D_y = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H^*(j\lambda)|^2 S_g^*(\lambda) d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2}. \quad (3.112)$$

Для случая, когда возмущающее воздействие приложено на входе ЦАС (рис. 3.10, б), запишем значения ошибки для двух дискретных моментов времени $t = nT$ и $t_1 = n_1 T$:

$$e[n] = \sum_{i=0}^n h_e[i] g[n-i] + \sum_{q=0}^n h[q] f[n-q], \quad (3.113)$$

$$e[n_1] = \sum_{k=0}^{n_1} h_e[k] g[n_1-k] + \sum_{l=0}^{n_1} h[l] f[n_1-l], \quad (3.114)$$

где $h[n]$ и $h_e[n]$ — приведенные весовые функции замкнутой системы для выходной величины y и ошибки e , связанные,

соответственно, z -преобразованием с передаточными функциями $H(z)$ и $H_e(z)$. Перемножив (3.113) и (3.114) и произведя действия, аналогичные тем, которые были сделаны при выводе формул (3.90) и (3.91), получим выражение для корреляционной функции ошибки в установившемся режиме:

$$\begin{aligned}
 K_e[m] = & \sum_{i=0}^{\infty} h_e[i] \sum_{k=0}^{\infty} h_e[k] K_g[m-i+k] + \\
 & + \sum_{q=0}^{\infty} h[q] \sum_{l=0}^{\infty} h[l] K_f[m-q+l] + \\
 & + \sum_{q=0}^{\infty} h[q] \sum_{k=0}^{\infty} h_e[k] K_{gf}[m-q+k] + \\
 & + \sum_{i=0}^{\infty} h_e[i] \sum_{l=0}^{\infty} h[l] K_{fg}[m-i+l], \quad (3.115)
 \end{aligned}$$

где $K_g[m]$ — корреляционная функция задающего воздействия, $K_f[m]$ — корреляционная функция возмущающего воздействия, $K_{gf}[m]$ и $K_{fg}[m]$ — взаимные корреляционные функции. Из (3.115) может быть найдена дисперсия, если положить $m=0$:

$$\begin{aligned}
 D_e = K_e[0] = & \sum_{i=0}^{\infty} h_e[i] \sum_{k=0}^{\infty} h_e[k] K_g[k-i] + \\
 & + \sum_{q=0}^{\infty} h[q] \sum_{l=0}^{\infty} h[l] K_f[l-q] + \sum_{q=0}^{\infty} h[q] \sum_{k=0}^{\infty} h_e[k] K_{gf}[k-q] + \\
 & + \sum_{i=0}^{\infty} h_e[i] \sum_{l=0}^{\infty} h[l] K_{fg}[l-i]. \quad (3.116)
 \end{aligned}$$

Из формулы (3.115) может быть получено выражение для спектральной плотности ошибки посредством использования тех же операций, которые были сделаны при выводе формулы (3.99):

$$\begin{aligned}
 S_e(e^{j\omega T}) = & |H_e(e^{j\omega T})|^2 S_g(e^{j\omega T}) + |H(e^{j\omega T})|^2 S_f(e^{j\omega T}) + \\
 & + H_e(e^{-j\omega T}) H(e^{+j\omega T}) S_{gf}(e^{j\omega T}) + H_e(e^{+j\omega T}) H(e^{-j\omega T}) S_{fg}(e^{j\omega T}). \quad (3.117)
 \end{aligned}$$

Переход к псевдочастотам дает

$$S_e^*(\lambda) = |H_e^*(j\lambda)|^2 S_g^*(\lambda) + |H^*(j\lambda)|^2 S_f^*(\lambda) + \\ + H_e^*(-j\lambda) H^*(j\lambda) S_{gf}^*(\lambda) + H_e^*(j\lambda) H^*(-j\lambda) S_{fg}^*(\lambda). \quad (3.118)$$

Интегрирование последнего выражения в бесконечных пределах дает дисперсию ошибки

$$D_e = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_e^*(\lambda) d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2}.$$

В частном случае, когда сигналы $g(t)$ и $f(t)$ некоррелированы, $K_{gf}[m] = K_{fg}[m] = 0$. Тогда формула для корреляционной функции ошибки (3.115) упрощается:

$$K_e[m] = \sum_{i=0}^{\infty} h_e[i] \sum_{k=0}^{\infty} h_e[k] K_g[m-i+k] + \\ + \sum_{q=0}^{\infty} h[q] \sum_{l=0}^{\infty} h[l] K_f[m-q+l]. \quad (3.119)$$

Также упрощаются формулы (3.117) и (3.118) для спектральной плотности. Запишем спектральную плотность как функцию частоты:

$$S_e^*(\lambda) = |H_e^*(j\lambda)|^2 S_g^*(\lambda) + |H^*(j\lambda)|^2 S_f^*(\lambda). \quad (3.120)$$

Другой возможный случай приложения возмущающего воздействия в ЦАС изображен на рис. 3.10, в. Здесь можно перенести возмущающее воздействие $f(t)$, как это показано на рис. 3.10, в, на выход. При этом эквивалентное воздействие на выходе

$$f_1(t) = W_{2\pi}(p) f(t). \quad (3.121)$$

Если известна спектральная плотность возмущающего воздействия $S_f(e^{j\omega T})$, то спектральная плотность эквивалентного воздействия на выходе

$$S_s(e^{j\omega T}) = |W_{2\pi}(j\omega)|^2 S_f(e^{j\omega T}). \quad (3.122)$$

По спектральной плотности $S_s(e^{j\omega T})$ может быть найдена корреляционная функция $K_s(\tau)$ эквивалентного воздействия $f_1(t)$. Далее может быть получена корреляционная функция решетчатого сигнала $K_s[m]$ подстановкой $\tau = mT$ и спектральная плотность $S_s^*(\lambda)$ (см. § 3.3 и § 3.4).

Дальнейший расчет близок к изложенному выше для случая, изображенного на рис. 3.10, а. Разница будет заключаться в том, что для воздействия f_1 должна использоваться та же передаточная функция $H_e(e^{j\omega T})$ или $H_e^*(j\lambda)$, которая справедлива для задающего воздействия.

Рассмотрим только случай отсутствия корреляционной связи между g и f_1 . Тогда спектральная плотность ошибки

$$S_e^*(\lambda) = |H_e^*(j\lambda)|^2 [S_g^*(\lambda) + S_s^*(\lambda)]. \quad (3.123)$$

Далее по формуле (3.118) может быть найдена дисперсия ошибки D_e .

§ 3.7. Приближенный расчет дополнительных ошибок ЦАС, вызванных квантованием по уровню

При рассмотрении типовых случайных процессов в § 3.4 был введен дискретный белый шум, генерируемый устройствами квантования по уровню (округления) в ЦАС. Источниками такого шума могут быть входные и выходные преобразователи ЦАС. Кроме того, процессы округления могут наблюдаться в арифметическом устройстве ЦВМ при реализации дискретных алгоритмов коррекции ЦАС. Более строго вопрос учета шумов квантования будет рассмотрен ниже в 3.8.

Линейный дискретный корректирующий алгоритм ЦВМ может представляться либо в виде передаточной функции (2.155), либо в виде разностного уравнения (2.156). Положив $a_0 = 1$, что всегда можно сделать, запишем передаточную функцию в виде

$$D(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_k z^{-k}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{1 + A(z)}. \quad (3.124)$$

Этой передаточной функции соответствует разностное уравнение

$$x[n] = b_0 e[n] + b_1 e[n-1] + \dots + b_k e[n-k] - (a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] + \dots + a_k x[n-k]). \quad (3.125)$$

Структурная схема реализации алгоритма, заданного передаточной функцией (3.124) и разностным уравнением (3.125), изображена на рис. 3.11. На схеме введены квантователи K , соответствующие округлению в арифме-

тическом устройстве ЦВМ, квантователь K_1 входного преобразователя и K_2 выходного преобразователя. Импульсные элементы, работающие с переходом T , показаны только на входе и выходе структурной схемы и не показаны внутри структурной схемы, где они должны были бы иллюстрировать порядок производства операций в арифметическом устройстве.

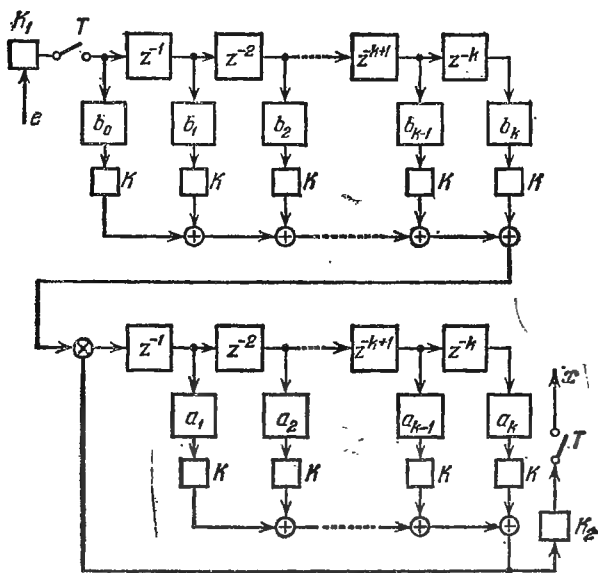


Рис. 3.11. Структурная схема реализации линейного корректирующего алгоритма в ЦВМ.

Схема, изображенная на рис. 3.11, соответствует так называемому *прямому программированию* при реализации передаточной функции (3.125) или ей соответствующего разностного уравнения (3.124). Другие подходы при их реализации будут рассмотрены ниже в § 5.5.

Так как число разрядов арифметического устройства выше числа разрядов входного преобразователя, то цифровая единица младшего разряда входного преобразователя содержит 2^γ цифровых единиц арифметического устройства, где γ — целое число (обычно $\gamma = 3 - 4$).

Если использовать изложенный выше прием замены эффекта квантования дискретным белым шумом (рис. 3.6), то структурная схема реализации линейного алгоритма ЦВМ может быть сведена к виду, изображенному на рис. 3.12. Здесь v_1 представляет собой дискретный белый шум, который генерируется входным преобразователем. Он вводится в ЦВМ с коэффициентом передачи δ_1^{-1} , если его

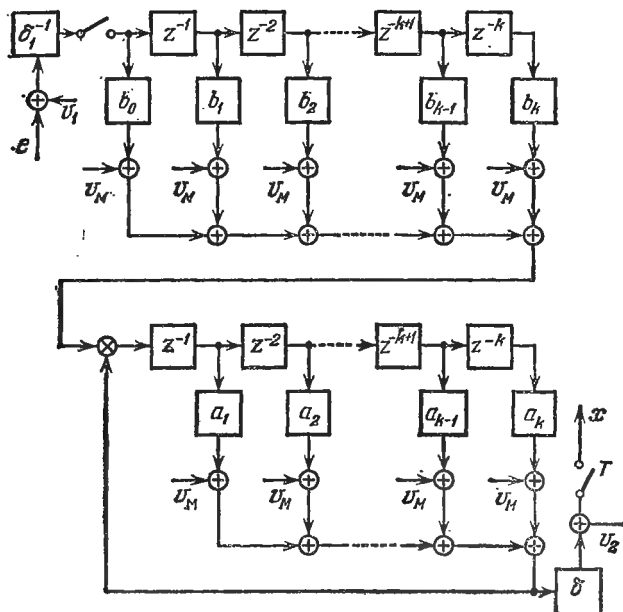


Рис. 3.12. Преобразованная структурная схема реализации линейного корректирующего алгоритма в ЦВМ.

рассматривать отнесенным ко входу ЦВМ. Коэффициент передачи будет равен единице, если рассматривать шум, приложенный ко входу преобразователя.

При рассмотрении шума, генерируемого входным преобразователем, возможны два случая. В системах стабилизации задающее воздействие $g=0$. Поэтому шум генерируется только преобразователем, осуществляющим ввод в ЦВМ управляемой величины y (рис. 1.3). В этом случае корреляционная функция шума v_1 на входе входного

преобразователя (на входе звена с коэффициентом передачи δ_1^{-1} на рис. 3.12) в соответствии с изложенным в § 3.4

$$K_1[m] = \frac{\delta_1^2}{12} \delta_0[m], \quad (3.126)$$

где $\delta_0[m]$ — единичная импульсная решетчатая функция. При этом распределение шума соответствует равномерному закону в интервале $\pm 0,5\delta_1$.

В системах с изменяющимся во времени задающим воздействием округление производится в двух преобразователях: ввода задающего воздействия и ввода управляемой величины (рис. 1.3). Поэтому корреляционная функция шума v_1 будет определяться суммарной дисперсией округления. Считая процессы округления в двух преобразователях независимыми и при равенстве их единиц младшего разряда, можно записать корреляционную функцию в виде

$$K_1[m] = \frac{2\delta_1^2}{12} \delta_0[m] = \frac{\delta_1^2}{6} \delta_0[m]. \quad (3.127)$$

При этом функция распределения суммарного шума соответствует закону Симпсона. Шум, генерируемый выходным преобразователем, может быть на основании § 3.4 описан корреляционной функцией

$$K[m] = \frac{\delta^2}{12} \delta_0[m], \quad (3.128)$$

где δ — цена единицы младшего разряда выходного преобразователя ЦВМ.

Шуму, генерируемому арифметическим устройством [29], на основании структурной схемы, изображенной на рис. 3.12, соответствует корреляционная функция

$$K_M[m] = \frac{L}{12} \delta_0[m], \quad (3.129)$$

где L — число слагаемых в правой части разностного уравнения (3.125). При этом измерение здесь производится в цифровых единицах младшего арифметического устройства.

Суммарному шуму на основании центральной предельной теоремы тем точнее будет соответствовать нормальное распределение, чем больше значение L по сравнению с единицей.

При пересчете этого шума на выход ЦВМ следует учесть два обстоятельства. Во-первых, корреляционная функция (3.128) соответствует случаю размыкания обратной связи на рис. 3.12, которая охватывает нижний ряд элементарных передаточных функций. Во-вторых, следует сделать пересчет цифровых единиц арифметического

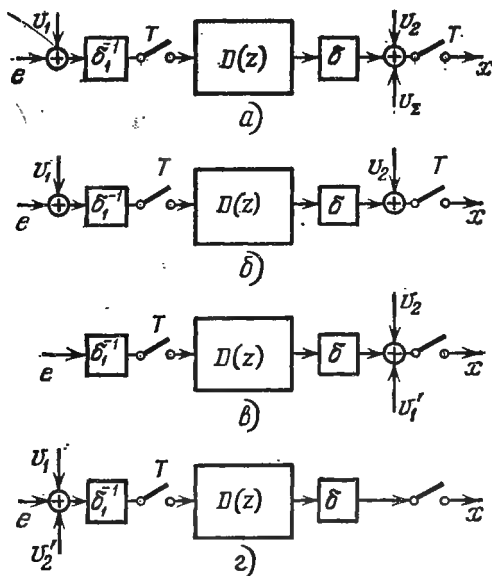


Рис. 3.13. Расчетные структурные схемы учета шумов квантования в ЦАС.

устройства на цифровые единицы входного и выходного преобразователей. При этом будем предполагать в соответствии с рис. 2.22, что в установившемся режиме единице младшего разряда на входе соответствует единица младшего разряда на выходе ЦВМ, а соотношение между ними и единицей младшего разряда арифметического устройства определяется значением 2^{γ} .

В соответствии с этим шум арифметического устройства u_{Σ} , пересчитанный на выход ЦВМ (рис. 3.13, а), может характеризоваться спектральной плотностью

$$S_{\Sigma}^*(\lambda) = \frac{L\delta^2}{2^{\gamma}12|1+A^*(j\lambda)|^2}. \quad (3.130)$$

Здесь $1 + A^*(j\lambda)$ — полином знаменателя (3.124) после перехода от комплексной величины z к псевдочастоте λ посредством обычных подстановок. Таким образом, помеха v_Σ на выходе ЦВМ, генерируемая арифметическим устройством, представляет собой не белый, а окрашенный шум. Величина

$$\lambda_\Sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2 |1 + A^*(j\lambda)|^2} \quad (3.131)$$

представляет собой эквивалентную полосу пропускания ЦВМ шума арифметического устройства, а $\delta \cdot 2^{-\gamma}$ — коэффициент передачи этого шума на выход. Дисперсия шума на выходе ЦВМ может быть представлена в виде

$$D_\Sigma = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L\delta^2 d\lambda}{2^{2\gamma} \cdot 12 \left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2 |1 + A^*(j\lambda)|^2} = \frac{TL\delta^2 \lambda_\Sigma}{12 \cdot 2^{2\gamma}}. \quad (3.132)$$

Нахождение корреляционной функции $K_\Sigma[m]$ шума арифметического устройства на выходе может быть сделано в соответствии с изложенным в § 3.3. Однако следует обратить внимание на то, что структура, изображенная на рис. 3.12 и рис. 3.13, а, обычно не соответствует действительности. Это объясняется рядом факторов.

Замена нелинейного действия квантователей (рис. 3.11) на аддитивные шумы (рис. 3.12) может приближенно делаться лишь для случая независимой работы квантователей, так как предполагает в дальнейшем суперпозицию результатов, что требует линейности системы. Однако работа выходного квантователя не является независимой, так как на его вход поступают шумы арифметического устройства.

Кроме того, существование шума арифметического устройства обычно вообще не подтверждается, так как коэффициенты, входящие в (3.124) и (3.125), выбираются в виде целого количества младших разрядов арифметического устройства (т. е. фактически округляются при записи их в память машины) и никакого округления после умножения на эти коэффициенты не происходит. Лишь в некоторых особых случаях, связанных с исполь-

зованием сдвига разрядных сеток арифметического устройства, возможно появление необходимости в округлении.

Если коэффициенты, входящие в (3.124) и (3.125), выбираются в виде целого количества единиц младшего разряда входного преобразователя (при $a_0 = 1$), а также в случае $D(z) = 1$, не происходит округления и в выходном преобразователе. Тогда единственным источником шума оказывается входной преобразователь.

В связи с изложенным расчетная схема учета квантования в ЦАС для случая, когда округление происходит как во входном, так и в выходном преобразователе, изображена на рис. 3.13, б. Помехи v_1 и v_2 являются дискретными белыми шумами с корреляционными функциями вида (3.126) или (3.127) для v_1 и (3.128) для v_2 .

Возможен перенос действия двух помех в одну точку. На рис. 3.13, в изображен случай приведения помехи v_1 на выход ЦВМ в виде помехи v'_1 . Для помехи v'_1 спектральная плотность

$$S_{12}^*(\lambda) = \frac{i\delta^2}{12} |D^*(j\lambda)|^2, \quad (3.133)$$

где i принимает значения 1 или 2 в зависимости от вида исходной формулы (3.126) или (3.127), а $D^*(j\lambda)$ — передаточная функция ЦВМ после перехода от комплексной величины z к псевдочастоте λ .

Коэффициент i в общем случае равен числу суммируемых на входе ЦВМ сигналов. Оно может быть и больше двух, если, например, на вход поступают, кроме задающего воздействия и управляемой величины, их производные, сигналы, компенсирующие возмущения, приложенные к системе, и т. п. В этом случае спектральная плотность суммарной помехи на выходе ЦВМ от квантования по уровню может быть представлена в виде

$$S_{v_2}^*(\lambda) = \frac{\delta^2}{12} [1 + i |D^*(j\lambda)|^2]. \quad (3.134)$$

При этом предполагается, что процессы квантования на входе и выходе ЦВМ независимы. При $D(z) = 1$, а также при целочисленном выборе коэффициентов передаточной функции $D(z)$ для $a_0 = 1$ первое слагаемое в правой части (3.134) обращается в нуль.

Помеху квантования в выходном преобразователе можно отнести ко входу ЦВМ (рис. 3.13, г) в виде

сигнала u'_2 . Для него спектральная плотность может быть записана в виде

$$S_{u_1}^*(\lambda) = \frac{\delta_1^2}{12} \frac{1}{|D^*(j\lambda)|^2}. \quad (3.135)$$

В этом случае дисперсия сигнала u'_2 может, вообще говоря, стремиться к бесконечности. Это будет, если степень числителя $D^*(j\lambda)$ ниже, чем степень знаменателя. Тогда интегрирование (3.135) в бесконечных пределах дает расходящийся результат. Однако такой перенос помехи u_2 на вход следует рассматривать лишь как некоторый расчетный прием. То обстоятельство, что сигналу u'_2 не может соответствовать никакой реальный процесс, не вызывает здесь затруднений.

Результирующая спектральная плотность шумов квантования, отнесенная ко входу ЦВМ,

$$S_{v_1}^*(\lambda) = \frac{\delta_1^2}{12} \left[i + \frac{1}{|D^*(j\lambda)|^2} \right]. \quad (3.136)$$

При $D(z) = 1$, а также при целочисленном выборе коэффициентов передаточной функции $D(z)$ для $a_0 = 1$ второе слагаемое в правой части (3.136) обращается в нуль.

Корреляционные функции для спектральных плотностей (3.134) и (3.136) могут быть найдены в соответствии с изложенным в § 3.3.

Спектральная плотность дополнительной ошибки, вызываемой квантованием по уровню, может быть получена на основе спектральных плотностей (3.134) или (3.136):

$$S_v^*(\lambda) = \left| \frac{W^*(j\lambda)}{1 + W^*(j\lambda)} \right|^2 S_{v_2}^*(\lambda) = \left| \frac{W_0^*(j\lambda)}{1 + W^*(j\lambda)} \right|^2 S_{v_1}^*(\lambda), \quad (3.137)$$

где $W^*(j\lambda) = D^*(j\lambda) W_0^*(j\lambda)$ — частотная дискретная передаточная функция разомкнутой ЦАС, $W_0^*(j\lambda)$ — частотная дискретная передаточная функция непрерывной части ЦАС.

Интегрирование (3.137) дает дисперсию дополнительной ошибки, вызванной квантованием по уровню на входе и выходе ЦВМ:

$$D_v = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_v^*(\lambda) d\lambda}{\left| 1 + j\lambda \frac{T}{2} \right|^2}. \quad (3.138)$$

Формула (3.138) может быть также представлена в следующем виде:

$$D_v = \frac{i\delta_1^2 T}{12 \cdot 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{H^*(j\lambda)}{1 + j\lambda \frac{T}{2}} \right|^2 d\lambda + \frac{\delta_1^2 T}{12 \cdot 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{H_0^*(j\lambda)}{1 + j\lambda \frac{T}{2}} \right|^2 d\lambda = \\ = \frac{\delta_1^2 T}{12} [i \Delta\lambda_s + \Delta\lambda_0]. \quad (3.139)$$

В этой формуле частотная передаточная функция замкнутой системы

$$H^*(j\lambda) = \frac{W^*(j\lambda)}{1 + W^*(j\lambda)}, \quad (3.140)$$

частотная передаточная функция непрерывной части при замкнутой главной обратной связи

$$H_0^*(j\lambda) = \frac{W_0^*(j\lambda)}{1 + W^*(j\lambda)}, \quad (3.141)$$

$\Delta\lambda_s$ — эквивалентная полоса пропускания замкнутой системы, $\Delta\lambda_0$ — эквивалентная полоса пропускания непрерывной части ЦАС при замкнутой главной обратной связи. Передаточные функции $W_0^*(j\lambda)$ и $W^*(j\lambda)$ определяются в соответствии с изложенным в § 2.5.

Если $D(z) = 1$, а также при целочисленном выборе коэффициентов передаточной функции (3.124) для $a_0 = 1$ второе слагаемое в правой части (3.139) необходимо положить равным нулю.

Помехи на выходе ЦВМ. При расчете ЦАС важным также является нахождение дисперсии выходной величины ЦВМ для контроля возможности переполнения разрядной сетки выходного преобразователя. Спектральная плотность для величины x на выходе ЦВМ (рис. 3.11) может быть записана в виде

$$S_k^*(\lambda) = \frac{\delta^2}{12} \left[1 + \frac{i |D^*(j\lambda)|^2}{|1 + W^*(j\lambda)|^2} \right]. \quad (3.142)$$

В формуле (3.142), как и ранее, первое слагаемое в правой части отсутствует при $D(z) = 1$ и при целочис-

ленных коэффициентах передаточной функции (3.124) при $a_0 = 1$. Интегрирование спектральной плотности (3.142) в бесконечных пределах дает дисперсию выходной величины ЦВМ, определяемую шумами квантования:

$$D_k = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_k^*(\lambda) d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2} = \frac{i\delta^2 T \Delta\lambda_g}{12} + \frac{\delta^2}{12}. \quad (3.143)$$

Здесь введена эквивалентная полоса пропускания ЦВМ дискретного белого шума при замкнутой главной обратной связи

$$\Delta\lambda_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{H_g^*(j\lambda)}{1 + j\lambda \frac{T}{2}} \right|^2 d\lambda, \quad (3.144)$$

где частотная передаточная функция ЦВМ при замкнутой главной обратной связи

$$H_g^*(j\lambda) = \frac{D^*(j\lambda)}{1 + W^*(j\lambda)}. \quad (3.145)$$

Во многих случаях объект управления слишком инерционен, чтобы замыкание главной обратной связи могло бы сильно сказаться на определении эквивалентной полосы пропускания ЦВМ. Поэтому формула (3.144) обычно может быть записана в приближенном виде:

$$\Delta\lambda_g \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{D^*(j\lambda)}{1 + j\lambda \frac{T}{2}} \right|^2 d\lambda. \quad (3.146)$$

Однако следует учитывать, что при наличии полюсов в точке $z = 1$ у передаточной функции $D(z)$ или, соответственно, полюсов в точке $\lambda = 0$ у $D^*(j\lambda)$ (это соответствует реализации на ЦВМ операции интегрирования) формула (3.146) дает расходящийся результат.

В этих случаях в частотной передаточной функции $D^*(j\lambda)$ должны быть предварительно выделены и отбро-

шены члены, содержащие полюсы в точке $\lambda=0$, или, соответственно, в передаточной функции $D(z)$ должны быть выделены и отброшены члены, содержащие полюсы в точке $z=1$. Так, если имеется передаточная функция вида

$$D(z) = \frac{z^2 - az + a}{z(z-1)} = 1 + \frac{1}{z-1} - \frac{a}{z},$$

то после отбрасывания слагаемого, содержащего в знаменателе $(z-1)$, оставшуюся часть передаточной функции

$$D_1(z) = 1 - \frac{a}{z} = \frac{z-a}{z}$$

и следует использовать в формуле (3.146).

Пример 3.2. Пусть система управления с ЦВМ содержит непрерывную часть с передаточной функцией $W_n(p) = k_n/p^2$ и экстраполятор нулевого порядка, а дискретная передаточная функция ЦВМ имеет вид

$$D(z) = \frac{1}{1-a} \frac{z-a}{z} \quad (0 < a < 1).$$

Частотная передаточная функция ЦВМ при этом будет

$$D^*(j\lambda) = \frac{1 + j\lambda\tau}{1 + j\lambda \frac{\tau}{2}},$$

где $\tau = 0,5T(1+a)(1-a)^{-1}$. Определим дисперсию дополнительной ошибки, вызванной квантованием по уровню, и дисперсию выходной величины ЦВМ, если на входе ЦВМ имеется два преобразователя: для задающего воздействия $g(t)$ и для управляемой величины $y(t)$, т. е. $i=2$.

В соответствии с § 2.5 дискретная передаточная функция непрерывной части (2.136)

$$W_0(z) = \frac{\delta}{\delta_1} \frac{z-1}{z} \approx \left\{ \frac{k_n}{p^3} \right\} = \frac{\delta}{\delta_1} \frac{k_n T^2 (z+1)}{2(z-1)^3}.$$

Переход к частотной передаточной функции дает

$$W_0^*(j\lambda) = \frac{\delta}{\delta_1} \frac{k_n \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)}{(j\lambda)^2} = \frac{K \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)}{(j\lambda)^2},$$

где $K = k_n \delta \delta_1^{-1}$ — общий коэффициент усиления канала. Дискретная передаточная функция разомкнутой системы

$$W(z) = D(z) W_0(z) = \frac{\delta k_n T^2}{(1-a) \delta_1} \frac{(z+1)(z-a)}{z(z-1)^2}.$$

Частотная передаточная функция разомкнутой системы

$$W^*(j\lambda) = D^*(j\lambda) W_0^*(j\lambda) = \frac{K(1+j\lambda\tau) \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)}{(j\lambda)^2 \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)}.$$

Далее находим

$$H^*(j\lambda) = \frac{W(j\lambda)}{1+W(j\lambda)} = \frac{K(1+j\lambda\tau) \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)}{(j\lambda)^2 \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right) + K(1+j\lambda\tau) \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)},$$

$$H_0^*(j\lambda) = \frac{W_0^*(j\lambda)}{1+W^*(j\lambda)} = \frac{K \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)}{(j\lambda)^2 \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right) + K(1+j\lambda\tau) \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)},$$

$$H_g^*(j\lambda) = \frac{D^*(j\lambda)}{1+W^*(j\lambda)} = \frac{(1+j\lambda\tau) (j\lambda)^2}{(j\lambda)^2 \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right) + K(1+j\lambda\tau) \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)}.$$

Примем следующие исходные данные: общий коэффициент усиления $K = 100 \text{ с}^{-2}$, постоянная времени $\tau = 0,15 \text{ с}$ и период дискретности $T = 0,03 \text{ с}$. При таком выборе корректирующего алгоритма ЦВМ запас устойчивости замкнутой системы характеризуется показателем колебательности $M \approx 1,5$ с резонансным пиком, расположенным на псевдочастоте $\lambda_m = 15 \text{ с}^{-1}$.

Интегрирование квадратов модулей полученных частотных передаточных функций при использовании При-

ложения дает значения эквивалентных полос пропускания:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_g &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{H^*(j\lambda)}{1 + j\lambda \frac{T}{2}} \right|^2 d\lambda = \\ &= \frac{1 + K\tau^2 - \frac{K\tau T}{2}}{2\left(\tau - T - \frac{K\tau^2 T}{2} + \frac{K\tau T^2}{2}\right)} = 16,7 \text{ Гц},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{H_0^*(j\lambda)}{1 + j\lambda \frac{T}{2}} \right|^2 d\lambda = \\ &= \frac{1 + \frac{KT^2}{4} - \frac{K\tau T}{2}}{2\left(\tau - T - K\frac{\tau^2 T}{2} + K\frac{\tau T^2}{2}\right)} = 4,42 \text{ Гц},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_g &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{H_g^*(j\lambda)}{1 + j\lambda \frac{T}{2}} \right|^2 d\lambda = \\ &= \frac{2\tau\left(\tau^2 - \tau T + \frac{T^2}{4} + \frac{K\tau^2 T^2}{2}\right)}{T^3\left(\tau - T - K\frac{\tau^2 T}{2} + \frac{K\tau T^2}{2}\right)} = 2400 \text{ Гц}.\end{aligned}$$

Использование приближенной формулы (3.146) дает

$$\Delta\lambda_g \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1 + j\lambda\tau}{\left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)^2} \right|^2 d\lambda = \frac{2\left(\tau^2 + \frac{T^2}{4}\right)}{T^3} = 1660 \text{ Гц}.$$

Далее можно найти дисперсию дополнительной ошибки (3.139)

$$D_v = \frac{\delta_1^2 T}{12} (i \Delta\lambda_g + \Delta\lambda_0) = \frac{\delta_1^2 \cdot 0,03}{12} (2 \cdot 16,7 + 4,42) = \frac{\delta_1^2}{10,6}$$

и ее среднеквадратичное значение

$$\sigma_v = \sqrt{D_v} = \frac{\delta_1}{3,26} = 0,307\delta_1.$$

Дисперсия помехи на выходе ЦВМ (3.143)

$$D_k = \frac{iT\delta^2 \Delta\lambda_g}{12} + \frac{\delta^2}{12} = \frac{2 \cdot 0,03 \cdot 2400 \delta^2}{12} + \frac{\delta^2}{12} \approx 12\delta^2$$

и ее среднеквадратичное значение

$$\sigma_k = \sqrt{D_k} = 3,46 \delta.$$

Шумовая ошибка в рассматриваемом примере сравнительно невелика и не превышает половины цены младшего разряда входного преобразователя, однако помеха на выходе ЦВМ имеет довольно высокий уровень. Если предположить для нее нормальный закон распределения, то максимальные выбросы могут достигать значения $3\sigma_k$, что составляет около десяти единиц младшего разряда выходного преобразователя.

§ 3.8. Корреляционные функции и спектральные плотности шумов квантования

В предыдущем параграфе для описания шума квантования использовалась гипотеза возможности описания его посредством дискретного белого шума с корреляционной функцией и спектральной плотностью (3.54). При этом отсутствовала корреляционная связь между процессами округления двух соседних тактов, а также корреляционная связь между входным сигналом и шумом квантования (рис. 3.6). В большинстве практических случаев это оказывается справедливым, и рассмотренную в § 3.7 методику следует считать основной.

Однако в некоторых случаях может потребоваться уточнение расчетов с учетом указанных выше связей. Рассмотрим возможные пути решения этой задачи, а также попытаемся сформулировать условия применимости методики расчета, рассмотренной в § 3.7.

Операция квантования по уровню во входном преобразователе (рис. 3.6) применительно к вводу в ЦВМ задающего воздействия определяется зависимостью (рис. 2.3, а)

$$g_0(t) = E \{ \delta_1^{-1} g(t) + 0,5 \operatorname{sign} g(t) \}, \quad (3.147)$$

где $g_0(t)$ — цифровое представление $g(t)$, δ_1 — цена единицы младшего разряда преобразователя, $E \{ \cdot \}$ — целая

часть числа, находящегося в фигурных скобках. Такая же зависимость может быть записана и для управляемой величины $y(t)$.

Ошибка (шум) квантования, отнесенная к входу преобразователя,

$$v(t) = \delta_1 v_0(t) = g(t) - \delta_1 g_0(t), \quad (3.148)$$

где $v_0(t)$ — ошибка квантования, отнесенная к выходу преобразователя. Если $g(t)$ — случайный процесс, то функцию $v(t)$ можно рассматривать как случайную аддитивную помеху.

Найдем корреляционную функцию процесса на выходе нелинейного звена 2 (рис. 2.4), характеристика которого определяется зависимостью

$$v = g - \delta_1 g_0 = g - \delta_1 E \{ \delta_1^{-1} g + 0,5 \operatorname{sign} g \} = f(g). \quad (3.149)$$

Известно, что эта корреляционная функция может быть представлена в виде [29]

$$K_v(t, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(g) f(g_1) \vartheta_2(g, g_1, t, t_1) dg dg_1, \quad (3.150)$$

где $\vartheta_2(g, g_1, t, t_1)$ — двумерная плотность вероятности процесса $g(t)$, t и t_1 — моменты времени, а g и g_1 — значения входной функции в эти моменты времени. Функцию $f(g)$ полезно разложить в ряд Фурье с периодом δ_1 , что позволит взять интеграл (3.150):

$$\begin{aligned} f(g) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\delta_1} \int_{-0,5\delta_1}^{0,5\delta_1} f(g) \sin \frac{2\pi k g}{\delta_1} dg \right] \sin \frac{2\pi k g}{\delta_1} = \\ &= \frac{\delta_1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{2\pi k g}{\delta_1}. \end{aligned} \quad (3.151)$$

Пусть задающее воздействие $g(t)$ представляет собой нормальный стационарный центрированный процесс с дисперсией $D_0 = \sigma_0^2$ и коэффициентом корреляции, т. е. нормированной корреляционной функцией, $\rho(\tau)$. Тогда двумерная плотность вероятности процесса [57]

$$\vartheta_2(g, g_1, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_0^2 \sqrt{1-\rho^2(\tau)}} \exp \left\{ -\frac{g^2 - 2\rho(\tau)gg_1 + g_1^2}{2\sigma_0^2 [1-\rho^2(\tau)]} \right\}. \quad (3.152)$$

Подставляя (3.151) и (3.152) в формулу для корреляционной функции (3.150), получаем после двойного интегрирования в бесконечных пределах

$$\begin{aligned}
 K_v(\tau) &= \frac{\delta_1^2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+k+1}}{ik} \exp \left[-\frac{2\pi^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} (i^2 + k^2) \right] \times \\
 &\times \operatorname{sh} \left[\frac{4\pi^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} ik \rho(\tau) \right] = \frac{\delta_1^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \left[\frac{-4\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} \right] \times \\
 &\times \operatorname{sh} \left[\frac{4\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} \rho(\tau) \right] + \frac{\delta_1^2}{\pi^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+k+1}}{ik} \times \\
 &\times \exp \left[-\frac{2\pi^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} (i^2 + k^2) \right] \operatorname{sh} \left[\frac{4\pi^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} ik \rho(\tau) \right]. \quad (3.153)
 \end{aligned}$$

Практически всегда выполняется условие $\delta_1 \ll \sigma_0$. Поэтому можно отбросить двойную сумму в (3.153). В результате получим

$$\begin{aligned}
 K_v(\tau) &\approx \frac{\delta_1^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \left[-\frac{4\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} (1 - \rho(\tau)) \right] \times \\
 &\times \frac{1 - \exp \left[-\frac{8\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} \rho(\tau) \right]}{1 - \exp \left[-\frac{8\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} \right]} = \frac{\delta_1^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rho_1(\tau) \rho_2(\tau), \quad (3.154)
 \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 \rho_1(\tau) &= \exp \left[-\frac{4\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} (1 - \rho(\tau)) \right], \\
 \rho_2(\tau) &= \frac{1 - \exp \left[-\frac{8\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} \rho(\tau) \right]}{1 - \exp \left[-\frac{8\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} \right]}.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.155)$$

В формулу (3.154) введен дополнительный делитель, равный знаменателю функции $\rho_2(\tau)$, с целью некоторой компенсации отброшенной двойной суммы (3.153). Этот делитель введен так, чтобы выполнялись условия нормировки $\rho_1(0) \rho_2(0) = 1$ и $\rho_1(\infty) \rho_2(\infty) = 0$.

Из (3.154), в частности, следует, что дисперсия шумовой ошибки от квантования по уровню

$$D_v = K_v(0) = \frac{\delta_1^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\delta_1^2}{12}.$$

Для дискретного процесса, т. е. при учете квантования по времени, корреляционная функция может быть получена из формулы (3.154) ее дискретизацией. Вводя при этом нормировку, имеем

$$\begin{aligned} \rho_v[m] = \frac{K_v[m]}{D_v} &= \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \left[-\frac{4\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} (1 - \rho[m]) \right] \times \\ &\times \frac{1 - \exp \left[-\frac{8\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} \rho[m] \right]}{1 - \exp \left[-\frac{8\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} \right]}. \end{aligned} \quad (3.156)$$

Из (3.156) можно определить условие того, что ошибка квантования по уровню представляла бы собой дискретный белый шум. Это будет при отсутствии корреляции для $\tau \geq T$, т. е. для $m \geq 1$. Если положить $\rho_v[1] = \varepsilon$, то достаточное условие будет иметь вид

$$\delta_1 \leq \sigma_0 \frac{2\pi \sqrt{1 - \rho[1]}}{\ln \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}}. \quad (3.157)$$

Формула (3.154) чрезвычайно неудобна для дальнейшего исследования. Разложение в ряд показательных функций здесь может привести к неправильным результатам вследствие того, что показатель степени по абсолютной величине обычно значительно превосходит единицу. Это вытекает из наиболее вероятного случая $\sigma_0 \gg \delta_1$.

Если последнее неравенство не имеет места, то можно разложить в степенной ряд функцию $\rho_2(\tau)$:

$$\rho_2(\tau) \approx \frac{1 - 1 + \frac{8\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} \rho(\tau)}{1 - 1 + \frac{8\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2}} = \rho(\tau). \quad (3.158)$$

Тогда упрощается формула для корреляционной функции (3.154):

$$K_v(\tau) \approx \frac{\delta_1^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rho(\tau) \exp \left[-\frac{4\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} (1 - \rho(\tau)) \right]. \quad (3.159)$$

Подобное выражение может использоваться, например, в случаях, когда на преобразователь непрерывной величины в код поступает сигнал ошибки ЦАС, которая, как правило, мала по своей величине.

Для дискретного случая из (3.159) имеем

$$K_v[m] \approx \frac{\delta_1^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rho[m] \exp \left[-\frac{4\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} (1 - \rho[m]) \right]. \quad (3.160)$$

Для корреляционных функций $\rho(\tau)$ или $\rho[m]$ сравнительно простого вида здесь может быть найдена спектральная плотность ошибки квантования.

Пусть, например, на входе преобразователя действует случайный стационарный сигнал с корреляционной функцией

$$K(\tau) = D_0 e^{-\mu|\tau|} = \sigma_0^2 e^{-\mu|\tau|}. \quad (3.161)$$

Тогда из (3.159) для непрерывного случая получаем

$$\begin{aligned} K_v(\tau) &\approx \frac{\delta_1^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\mu|\tau|} e^{-\frac{4\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} [1 - \rho(\tau)]} \approx \\ &\approx \frac{\delta_1^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\mu|\tau|} e^{\frac{4\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} \dot{\rho}(0)|\tau|} = \\ &= \frac{\delta_1^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\mu \left(1 + \frac{4\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} \right) |\tau|}. \end{aligned} \quad (3.162)$$

Переход к спектральной плотности может быть сделан по преобразованию Фурье

$$\begin{aligned} S_v(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} K_v(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \\ &= \frac{\delta_1^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{2\mu \left(1 + \frac{4\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} \right)}{\mu^2 \left(1 + \frac{4\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} \right) + \omega^2}. \end{aligned} \quad (3.163)$$

Из последнего выражения следует, что квантование по уровню расширяет спектр входного сигнала тем сильнее, чем больше отношение σ_0/δ_1 . Однако при больших значениях отношения σ_0/δ_1 формула (3.162) перестает быть справедливой, так как оказывается неправильным разложение (3.158).

Спектральная плотность для дискретного случая (при учете квантования по времени) может быть получена из (3.163) на основании приведенной выше формулы (3.59). Используя ее, имеем

$$S_v^*(\lambda) = \frac{\delta_1^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{2T_{\text{эв}} \left| 1 + j\lambda \frac{T}{2} \right|^2}{1 + \lambda^2 T_{\text{эв}}^2}, \quad (3.164)$$

где эквивалентная постоянная времени

$$T_{\text{эв}} = \frac{T}{2} \operatorname{cth} \left[\frac{\mu T}{2} \left(1 + \frac{4\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} \right) \right]. \quad (3.165)$$

Если ограничиться учетом только первой составляющей бесконечной суммы (3.164) и ввести корректирующий множитель с тем, чтобы интеграл по всем частотам от спектральной плотности давал бы дисперсию, то вместо (3.164) получим

$$S_v^*(\lambda) = \frac{\delta_1^2}{12} \frac{2T_{\text{э}} \left(1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4} \right)}{1 + \lambda^2 T_{\text{э}}^2}, \quad (3.166)$$

где

$$T_{\text{э}} = \frac{T}{2} \operatorname{cth} \left[\frac{\mu T}{2} \left(1 + \frac{4\pi^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} \right) \right]. \quad (3.167)$$

Для случая $\sigma_0 \gg \delta_1$ приходится искать другие пути определения спектральной плотности шумовой ошибки квантования. Один из возможных способов заключается в следующем.

Изобразим функцию $\rho_2(\tau)$ в виде графика (рис. 3.14) для случая $n=1$. При известной нормированной корреляционной функции входного сигнала $\rho(\tau)$ это можно сделать по формуле (3.155). Построенный график дает

возможность подобрать некоторую аппроксимацию функции $\rho_2(\tau)$, удобную для последующего использования.

Наиболее грубая аппроксимация получается при использовании прямоугольника с высотой, равной единице, и протяженностью, равной времени корреляции

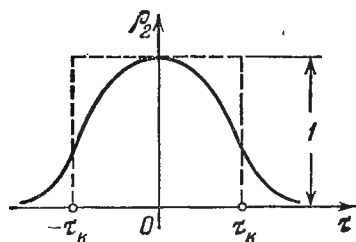


Рис. 3.14. Аппроксимация коэффициента корреляции.

$$\tau_k = \int_0^{\infty} \rho_2(\tau) d\tau. \quad (3.168)$$

Можно использовать параболу или иную зависимость. Все они в той или иной мере приводят к цели. С точки зрения последующего использования наиболее удобна аппроксимация графика $\rho_2(\tau)$ отрезком косинусоиды $\rho_2(\tau) \approx \cos \omega_1 \tau$, рассматриваемой в интервале $-\tau_1 \leq \tau \leq \tau_1$, где τ_1 определяется из условия $\omega_1 \tau_1 = 0,5\pi$. Так как площадь этого отрезка косинусоиды для положительных значений τ равна $2\tau_1 \pi^{-1}$, то время τ_1 и частота ω_1 могут быть определены из времени корреляции:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\pi \tau_k}{2}, \\ \omega_1 &= \frac{\pi}{2\tau_1} = \frac{1}{\tau_k}. \end{aligned} \right\} \quad (3.169)$$

Аналогичным образом для $n > 1$ можно ввести аппроксимирующую функцию $\cos \omega_n \tau$. Значение угловой частоты ω_n определяется временем корреляции при выбранном значении n .

Наиболее вероятен случай, когда справедливы соотношения

$$\left. \begin{aligned} \tau_n &= \frac{\pi}{2} \frac{\tau_k}{n}, \\ \omega_n &= \frac{n}{\tau_k}. \end{aligned} \right\} \quad (3.170)$$

Однако окончательное решение этого вопроса может быть сделано только после исследования для заданного вида функции $\rho(\tau)$. В результате подобной аппроксима-

ции функция (3.154) приобретает вид

$$K_v(\tau) \approx \frac{\delta_1^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rho_1(\tau) \cos \omega_n \tau \quad \left(-\frac{\pi}{2\omega_n} \leq \tau \leq \frac{\pi}{2\omega_n} \right). \quad (3.171)$$

Формула (3.171) позволяет в простейших случаях задания $\rho(\tau)$ найти спектральную плотность шума квантования для $\sigma_0 \gg \delta_1$. Пусть, например, корреляционная функция входного сигнала определяется (3.161). Тогда формула (3.171) может быть записана следующим образом:

$$K_v(\tau) \approx \frac{\delta_1^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \left[-\frac{4\pi^2 n^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} (1 - \rho(\tau)) \right] \cos \omega_n \tau \quad (3.172)$$

при $|\tau| \leq \pi/2\omega_n = \tau_n$. Далее, можно разложить функцию $\rho(\tau)$ в ряд, учитывая то обстоятельство, что существование ее для времени $|\tau| > \tau_n$ не имеет значения, так как при этом $\cos \omega_n \tau \equiv 0$. Ограничиваясь поэтому линейным членом разложения, имеем

$$K_v(\tau) \approx \frac{\delta_1^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \left[-\frac{4\pi^2 n^2 \sigma_0^2 \mu}{\delta_1^2} |\tau| \right] \cos \omega_n \tau. \quad (3.173)$$

Применение преобразования Фурье к корреляционной функции (3.173) дает спектральную плотность шума квантования по уровню

$$S_v(\omega) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\mu\sigma_0^2}{(4\pi^2 n^2 \sigma_0^2 \mu \delta_1^{-2})^2 + (\omega - \omega_n)^2} + \frac{2\mu\sigma_0^2}{(4\pi^2 n^2 \sigma_0^2 \mu \delta_1^{-2})^2 + (\omega + \omega_n)^2} \right]. \quad (3.174)$$

Спектральная плотность представляет совокупность отдельных составляющих, каждая из которых содержит два пика на частотах $\omega = \omega_n$ и $\omega = -\omega_n$. Переход к спектральной плотности решетчатого процесса может быть сделан в соответствии с формулой (3.74).

Следует заметить, однако, что полученные результаты имеют малое практическое значение. Входной сигнал

с корреляционной функцией (3.159) физически нереален, так как ему соответствует бесконечная дисперсия скорости. Попытки использовать корреляционную функцию более сложного вида с конечной дисперсией скорости приводят к необходимости учета квадратичного члена в разложении функции $\rho(\tau)$, так как в этих случаях $\dot{\rho}(0) = 0$. Это обуславливает получение корреляционных функций значительно более сложного вида, не поддающихся последующему интегрированию.

В связи с этим рассмотрим иной путь нахождения статистических характеристик шума квантования, позволяющий вводить более сложные корреляционные функции входного сигнала. Кроме того, этот путь не требует выполнения условия стационарности входного сигнала. Здесь достаточно иметь выполнение условия стационарности скорости изменения входного сигнала.

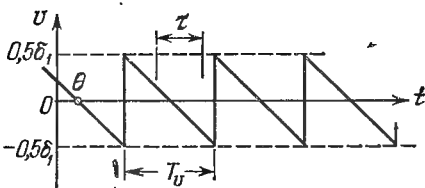


Рис. 3.15 Шум квантования по уровню при линейном возрастании квантуемого сигнала.

Пусть входной сигнал изменяется с постоянной скоростью $V = \text{const}$. В этом случае помеха, вызванная квантованием по уровню, будет изменяться в соответствии с графиком, изображенным на рис. 3.15, в пределах от $-0,5\delta_1$ до $+0,5\delta_1$ с периодом $T_v = \delta_1/V$.

Единственной случайной величиной в этом процессе будет смещение θ , для которого может быть принята гипотеза о равномерном распределении в интервале от 0 до T_v . Рассмотрим корреляционную функцию этого процесса. Так как процесс периодичен, то имеет место равенство

$$\begin{aligned}
 K_v(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T v(t) v(t + \tau) dt = \\
 &= \frac{1}{T_v} \int_{-0,5T_v}^{0,5T_v} v(t_1) v(t_1 + \tau) dt_1, \quad (3.175)
 \end{aligned}$$

где $t_1 = t - \tau$. Далее можно определить при $0 \leq \tau < T_v$

$$K'_v(\tau) = \frac{1}{T_v} \left\{ \int_{-0,5T_v}^{0,5T_v - \tau} V t_1 V(t_1 + \tau) dt_1 + \right. \\ \left. + \int_{0,5T_v - \tau}^{0,5T_v} V t_1 [-\delta_1 + V(t_1 + \tau)] dt_1 \right\} = \\ = \frac{V^2 T_v^3}{12} \left(1 - 6 \frac{\tau}{T_v} + 6 \frac{\tau^2}{T_v^2} \right) = \frac{\delta_1^2}{12} \left(1 - 6 \frac{\tau}{T_v} + 6 \frac{\tau^2}{T_v^2} \right). \quad (3.176)$$

Если $\tau = kT_v + \tau'$, где k — целое число, а $\tau' \leq T_v$, то вследствие периодичности процесса $K'_v(\tau) = K'_v(\tau')$. Поэтому в общем случае формула (3.176) может быть записана в виде

$$K'_v(\tau) = \frac{V^2 T_v^3}{12} \left[1 - 6 \left(\frac{\tau}{T_v} - k \right) + 6 \left(\frac{\tau}{T_v} - k \right)^2 \right] = \\ = \frac{\delta_1^2}{12} \left[1 - 6 \left(\frac{\tau}{T_v} - k \right) + 6 \left(\frac{\tau}{T_v} - k \right)^2 \right], \quad (3.177)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ соответствует целой части относительного временного интервала:

$$k = E \left\{ \frac{\tau}{T_v} \right\} = E \left\{ \frac{V\tau}{\delta_1} \right\}. \quad (3.178)$$

Корреляционную функцию (3.176) можно привести к безразмерному виду делением на дисперсию шума квантования:

$$\rho'_v(\tau) = 1 - 6 \left| \frac{\tau}{T_v} - k \right| + \\ + 6 \left| \frac{\tau}{T_v} - k \right|^2. \quad (3.179)$$

В формулу (3.179) введен знак модуля, так как $\rho'_v(\tau) = \rho'_v(-\tau)$. График этой функции построен на рис. 3.16.

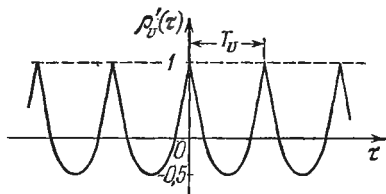


Рис. 3.16. Корреляционная функция шума квантования при движении с постоянной скоростью.

Переход к случаю, когда скорость входного сигнала не постоянна, а меняется случайным образом, представляет собой трудную задачу, которая может быть решена

методами численного интегрирования [73]. Здесь мы рассмотрим получение приближенных зависимостей для случая, когда входная скорость соответствует стационарному процессу.

Пусть скорость может быть принята постоянной на каждом периоде пилообразного сигнала (рис. 3.15). Введем понятие математического ожидания (среднего значения) продолжительности одного зубца «пилы»

$$T_c = \frac{\delta_1}{V_c}, \quad (3.180)$$

где V_c — среднее по модулю значение скорости изменения входного сигнала. Тогда для $\tau < T_c$ корреляционная функция может быть получена из (3.176) при замене T_v на T_c :

$$K_v(\tau) \approx \frac{\delta_1}{12} \left(1 - 6 \frac{\tau}{T_c} + 6 \frac{\tau^2}{T_c^2} \right). \quad (3.181)$$

Если $\tau > T_c$, то в соответствии с формулой (3.177), а также учитывая то обстоятельство, что среднее произведение скоростей двух зубцов «пилы», сдвинутых на k тактов, равно корреляционной функции скорости входного воздействия $K_1(kT_c)$, для корреляционной функции шума квантования по уровню может быть записано приближенное выражение в виде

$$K_v(\tau) \approx \frac{\delta_1^2 K_1(\tau)}{12\sigma_1^2} \left[1 - 6 \left| \frac{\tau}{T_c} - k \right| + 6 \left| \frac{\tau}{T_c} - k \right|^2 \right], \quad (3.182)$$

где σ_1^2 — средний квадрат входной скорости, а k — целая часть относительного временного сдвига, определяемая формулой

$$k = E \left\{ \frac{\tau}{T_c} \right\} = E \left\{ \frac{V_c \tau}{\delta_1} \right\}. \quad (3.183)$$

Таким образом, корреляционная функция шума квантования может быть получена из исходной периодической кривой (рис. 3.15) при замене T_v на T_c и введении затухания, которое определяется огибающей нормированной корреляционной функции $K_1(\tau)/\sigma_1^2$. Формула (3.182) будет тем точнее, чем медленнее затухает огибающая внутри периода T_c .

Для перехода к спектральной плотности целесообразно разложить периодическую кривую (рис. 3.14) в ряд

Фурье. Из формулы (3.179) имеем

$$\rho_v(\tau) = \frac{6}{\pi^2} \left(\cos \frac{2\pi\tau}{T_c} + \frac{1}{4} \cos \frac{4\pi\tau}{T_c} + \frac{1}{9} \cos \frac{6\pi\tau}{T_c} + \dots \right).$$

Использование этого разложения дает возможность представить формулу (3.182) в виде

$$K_v(\rho) \approx \frac{\delta_1^2 K_1(\tau)}{2\pi^2 \sigma_1^2} \left(\cos \frac{2\pi\tau}{T_c} + \frac{1}{4} \cos \frac{4\pi\tau}{T_c} + \frac{1}{9} \cos \frac{6\pi\tau}{T_c} + \dots \right). \quad (3.184)$$

Во многих случаях для корреляционной функции (3.184) сравнительно просто может быть найдена спектральная плотность. Так, например, если на входе действует типовой входной процесс следящей системы [8] с корреляционной функцией для скорости $K_1(\tau) = \sigma_1^2 \exp(-\mu|\tau|)$, то корреляционная функция помехи от квантования по уровню

$$K_v(\tau) \approx \frac{\delta_1^2}{2\pi^2} e^{-\mu|\tau|} \left(\cos \frac{2\pi\tau}{T_c} + \frac{1}{4} \cos \frac{4\pi\tau}{T_c} + \frac{1}{9} \cos \frac{6\pi\tau}{T_c} + \dots \right).$$

Для этой функции нетрудно найти спектральную плотность (3.69):

$$\left. \begin{aligned} S_v(\omega) &\approx \frac{\delta_1^2}{2\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \frac{a_i(1+b_i\omega^2)}{|1+a_ij\omega+b_i(j\omega)^2|^2}, \\ a_i &= \frac{2\mu}{\mu^2 + \left(\frac{i2\pi}{T_c}\right)^2}, \quad b_i = \frac{1}{\mu^2 + \left(\frac{i2\pi}{T_c}\right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.185)$$

Для случая, когда огибающая затухает медленно ($\mu \ll 2\pi T_c^{-1}$), корреляционная функция и спектральная плотность изображены на рис. 3.17. Корреляционная функция (рис. 3.17, а) получена из графика, изображенного на рис. 3.16, изменением периода и введением затухания по экспоненте с постоянной времени μ^{-1} . Спектральная плотность содержит ряд убывающих по высоте размытых пиков на частотах гармоник. Высоты пиков убывают пропорционально i^2 , где i — порядок гармоники.

Для получения корреляционной функции решетчатого процесса следует в формуле (3.182) сделать подстановку

$\tau = mT$, где T — период дискретности. Тогда

$$K_v[m] = \frac{\delta_1^2 K_1[m]}{12\sigma_1^2} \left[1 - 6 \left| \frac{mT}{T_c} - k \right| + 6 \left| \frac{mT}{T_c} - k \right|^2 \right], \quad (3.186)$$

где k — целая часть относительного временного сдвига, определяемая выражением

$$k = E \left\{ \frac{mT}{T_c} \right\} = \left\{ \frac{V_c m T}{\delta_1} \right\}. \quad (3.187)$$

Если использовать форму записи (3.184), то для дискретного процесса, описывающего шум квантования, корреляционная функция

$$K_v[m] = \frac{\delta_1^2 K_1[m]}{2\pi^2 \sigma_1^2} \left[\cos \frac{2\pi m T}{T_c} + \frac{1}{4} \cos \frac{4\pi m T}{T_c} + \dots \right]. \quad (3.188)$$

Рассмотрим теперь несколько случаев. Если скорость движения мала и $T_c \gg T$, то при выполнении условия

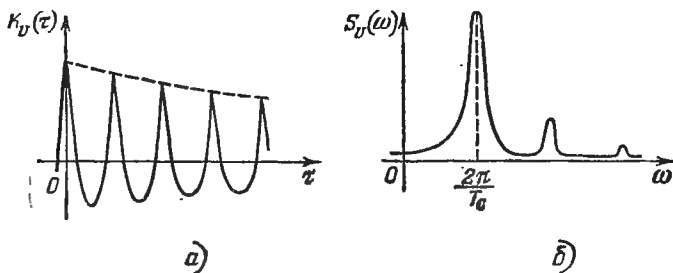


Рис. 3.17. Корреляционная функция и спектральная плотность шума квантования для типового входного сигнала.

$\mu T \ll 1$ на основании (3.75) и (3.185) для рассматриваемого случая можно записать спектральную плотность в виде

$$\left. \begin{aligned} S_v^*(\lambda) &= \frac{\delta_1^2}{2\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \frac{a_i (1 + b_i \lambda^2)}{|1 + a_i j \lambda + b_i (j \lambda)^2|^2}, \\ a_i &= \frac{2\mu}{\mu^2 + \left(\frac{i 2\pi}{T_c} \right)^2}, \quad b_i = \frac{1}{\mu^2 + \left(\frac{i 2\pi}{T_c} \right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.189)$$

График спектральной плотности совпадает с изображенным на рис. 3.17, б при замене частоты ω на псевдо-частоту λ . Если ограничиться учетом только первого

пика спектральной плотности, то ее можно записать в виде

$$S_v^*(\lambda) \approx \frac{N \left(1 + \frac{\lambda^2}{\mu^2 + 4\pi^2 T_c^{-2}} \right)}{\left| 1 + \frac{2\mu j\lambda}{\mu^2 + 4\pi^2 T_c^{-2}} + \frac{(j\lambda)^2}{\mu^2 + 4\pi^2 T_c^{-2}} \right|^2}. \quad (3.190)$$

Уровень спектральной плотности на нулевой частоте $N = S_v^*(0)$ можно определить, интегрируя (3.190) в бесконечных пределах и приравнявая полученное значение дисперсии шума квантования $D_v = \delta_1^2/12$. В результате имеем

$$N = \frac{\delta_1^2 \mu}{6 (\mu^2 + 4\pi^2 T_c^{-2})}. \quad (3.191)$$

Случай очень медленного движения при выполнении условий $2\pi T_c^{-1} < \mu$ и $T_c \gg T$ следует исключить из рассмотрения, так как здесь не будет выполняться условие малого изменения скорости на интервале времени T_c .

В случае медленного движения при $T_c > T$, но при $2\pi T_c^{-1} > \mu$ спектральной плотности (3.190) на основании (3.75) соответствует корреляционная функция шума квантования

$$K_v[m] = \frac{\delta_1^2}{12} e^{-\mu T|m|} \cos \frac{2\pi m T}{T_c}. \quad (3.192)$$

В случае быстрого движения, т. е. при выполнении условия $T_c \ll T$, можно считать, что первый резонансный пик (рис. 3.17, б) сдвинут в область высоких частот, так что в полосе пропускания системы управления шум квантования будет белым с корреляционной функцией

$$K_v[m] \approx \frac{\delta_1^2}{12} \delta_0[m] = D_v \delta_0[m] \quad (3.193)$$

и спектральной плотностью

$$S_v^*(\lambda) = \frac{\delta_1^2}{12} = N. \quad (3.194)$$

Корреляционная функция (3.193) может быть получена из (3.188) при замене

$$\frac{K_1[m]}{\sigma_1^2} \left(\cos \frac{2\pi m T}{T_c} + \frac{1}{4} \cos \frac{4\pi m T}{T_c} + \dots \right) \approx \frac{\pi^2}{6} \delta_0[m]. \quad (3.195)$$

Таким образом, для случая $T_c \ll T$ и было использовано в § 3.7 представление помех от квантования по уровню в виде дискретного белого шума. Однако такое представление может быть оправданным только в том случае, когда полоса пропускания замкнутой ЦАС сравнительно мала и влияние пика спектральной плотности (рис. 3.17, б) оказывается несущественным.

Если статистические характеристики шума квантования во входном преобразователе используются для нахождения дисперсии выходной величины ЦВМ, то представление о малой полосе пропускания здесь часто оказывается несправедливым. Поэтому для расчета в этом случае должны быть использованы формулы (3.189) или (3.191).

В случае, когда сигнал ошибки на входе ЦВМ образуется как разность задающего воздействия $g(t)$ и управляемой величины $y(t)$ с отдельными преобразователями непрерывной величины в код для $g(t)$ и $y(t)$, результирующий шум, создаваемый квантованием по уровню, может быть получен суммированием двух шумовых процессов. При этом, естественно, предположить, что при отсутствии возмущающих воздействий закон изменения управляемой величины близок к закону изменения задающего воздействия. Это приводит к одинаковому виду корреляционных функций и спектральных плотностей двух процессов. Кроме того, наличие регулярных и случайных сдвигов между ними, что определяется наличием ошибки, позволяет использовать гипотезу о их независимости, это приводит к необходимости удвоения дисперсии ошибки квантования во всех полученных в данном параграфе формулах. Таким образом, в этом случае $D_v = \delta_1^2/6$.

Если в системе управления имеются возмущающие воздействия, то закон изменения управляемой величины будет менее близок к закону изменения задающего воздействия, чем в предыдущем случае. Однако, имея в виду малость ошибки в замкнутой системе, и в этом случае можно воспользоваться формулой (3.195).

В принципе здесь возможно ввести уточнение, если найти спектральную плотность и корреляционную функцию скорости изменения управляемой величины в замкнутой системе как результат приложенных к системе

задающего воздействия и возмущений, что может быть сделано на основании § 3.5 и § 3.6.

В системах управления, содержащих один входной преобразователь в канале ошибки, на его входе действует случайный процесс, статистические характеристики которого определяются в процессе расчета в соответствии с § 3.6. Поэтому в формуле (3.188) должна быть использована корреляционная функция скорости изменения ошибки $K_1[m]$.

Пример 3.3. Рассмотрим ЦАС, исходные данные которой были приведены в примере 3.2 (см. § 3.7). Пусть задающее воздействие на входе ЦАС представляет собой типовой входной сигнал следящей системы (рис. 3.7) с большим значением среднего времени движения с неизменной скоростью. Тогда движение на каждом участке постоянства скорости можно рассматривать как квазистационарный процесс с корреляционной функцией для скорости $K_1(\tau) = V^2$, где V — случайное значение скорости движения.

Определим дисперсию ошибки, вызванной квантованием по уровню во входном преобразователе, в квазистационарном режиме движения. При этом сравним использование представления помехи как в виде дискретного белого шума, так и в виде окрашенного шума в соответствии с изложенным в настоящем параграфе.

В соответствии с расчетом, проделанным в примере 3.2, при использовании гипотезы белого шума дисперсия дополнительной ошибки

$$D_v = \frac{T\delta_1^2}{12} i \Delta\lambda_s = \frac{0,03\delta_1^2}{12} \cdot 2 \cdot 16,7 = \frac{\delta_1^2}{12}$$

и ее среднеквадратичное значение

$$\sigma_v = \sqrt{D_v} = \frac{\delta_1}{\sqrt{12}} = 0,28\delta_1.$$

На основании формулы (3.188) корреляционная функция шума квантования в рассматриваемом случае будет (при $i=2$)

$$\begin{aligned} K_v[m] &= \frac{2\delta_1^2}{2\pi^2} \left(\cos \frac{2\pi m T}{T_c} + \frac{1}{4} \cos \frac{4\pi m T}{T_c} + \dots \right) = \\ &= \frac{\delta_1^2}{\pi^2} \left(\cos \frac{2\pi m T V}{\delta_1} + \frac{1}{4} \cos \frac{4\pi m T V}{\delta_1} + \dots \right). \end{aligned}$$

Ограничиваясь первым членом этого ряда, представим корреляционную функцию в виде (см. (3.192))

$$K_v[m] \approx \frac{2\delta_1^2}{12} \cos \frac{2\pi mTV}{\delta_1}.$$

Этой корреляционной функции соответствует спектральная плотность (см. § 3.4)

$$S_v^*(\lambda) = \frac{\pi\delta_1^2}{6} [\delta(\lambda - \lambda_0) + \delta(\lambda + \lambda_0)],$$

где

$$\lambda_0 = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\pi T}{T_c} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\pi TV}{\delta_1}.$$

Дисперсия ошибки от квантования по уровню во входном преобразователе

$$D_k = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H^*(j\lambda)|^2 S_v^*(\lambda) d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2} = \frac{\delta_1^2}{6} |H^*(j\lambda_0)|^2.$$

Максимальное значение дисперсии будет при частоте λ_0 , совпадающей с резонансной частотой замкнутой системы. В этом случае максимальное значение модуля частотной передаточной функции замкнутой системы равно показателю колебательности, т. е. $|H^*(j\lambda_0)| = M = 1,5$.

В результате можно представить дисперсию ошибки от шумов квантования для наиболее неблагоприятного случая, когда частота λ_0 совпадает с резонансной частотой замкнутой системы $\lambda_m = 15 \text{ с}^{-1}$, в виде

$$D_k = \frac{\delta_1^2 M^2}{6} = \frac{\delta_1^2}{2,66}.$$

Это значение дисперсии больше полученного в примере 3.2 приблизительно в четыре раза. Соответственно среднеквадратичное значение ошибки будет больше в два раза.

Рассмотренный неблагоприятный случай характеризуется условием

$$\lambda_0 = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\pi TV}{\delta_1} = \lambda_m,$$

откуда может быть получено значение скорости движения, соответствующей максимальной ошибке, вызванной

квантованием по уровню:

$$V = \frac{\delta_1}{\pi T} \operatorname{arctg} \frac{\lambda_m T}{2} \approx \frac{\delta_1 \lambda_m}{2\pi} = \delta_1 f_m.$$

Из последнего выражения может быть установлен физический смысл условия получения наибольшей ошибки. Это будет иметь место при совпадении основной частоты квантованного сигнала (см. рис. 3.15) с резонансной частотой замкнутой ЦАС.

Взаимосвязь шума квантования и полезного сигнала. Взаимная корреляционная функция этих двух процессов — шума квантования $v(t)$ и входного сигнала $g(t)$ — определяется выражением

$$K_{gv}(t, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} gf(g_1) \vartheta_2(g, g_1, t, t_1) dg_1 dg, \quad (3.196)$$

где $\vartheta_2(g, g_1, t, t_1)$ — двумерная плотность вероятности процесса $g(t)$, t и t_1 — моменты времени, а g и g_1 — значения входной функции в эти моменты времени. Если использовать (3.151), то для стационарного случая имеем

$$\begin{aligned} K_{gv}(\tau) &= \frac{\delta_1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} M \{g \sin(2\pi k g_1 \delta_1^{-1})\} = \\ &= \frac{\delta_1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g \sin(2\pi k g_1 \delta_1^{-1}) \vartheta_2(g, g_1, \tau) dg_1 dg. \end{aligned} \quad (3.197)$$

Для входного сигнала, представляющего собой стационарный центрированный нормальный процесс с дисперсией $D_0 = \sigma_0^2$ и нормированной корреляционной функцией $\rho(\tau)$, при использовании (3.152) получим

$$\begin{aligned} K_{gv}(\tau) &= 2\sigma_0^2 \rho(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp \left[-\frac{2\pi^2 k^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} \right] = \\ &= -\frac{2\sigma_0^2 \rho(\tau)}{1 + \exp \left(\frac{4\pi^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2} \right)}. \end{aligned} \quad (3.198)$$

Для дискретного случая при $\tau = mT$ можем записать

$$K_{gv}[m] = - \frac{2\sigma_0^2 \rho[m]}{1 + \exp\left(\frac{4\pi^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2}\right)} = - \frac{2K_0[m]}{1 + \exp\left(\frac{4\pi^2 \sigma_0^2}{\delta_1^2}\right)}. \quad (3.199)$$

Таким образом, взаимная корреляционная функция совпадает с корреляционной функцией входного сигнала и отличается только дополнительным множителем. Определим условия того, чтобы взаимная корреляционная функция составляла по абсолютной величине незначительную часть корреляционной функции входного сигнала. Запишем это в виде $|K_{gv}[m]| \leq \varepsilon |K_g[m]|$. Тогда из (3.199) можно определить условие выполнения поставленного требования:

$$\delta_1 \leq \frac{2\pi\sigma_0}{\sqrt{\ln \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}}. \quad (3.200)$$

Так, например, если $\varepsilon = 0,01$, то условие (3.200) сводится к неравенству $\delta_1 \leq 0,75\sigma_0$, которое выполняется практически всегда. Таким образом, учета взаимной связи входного сигнала и шума квантования по уровню делать обычно не приходится.

§ 3.9. Прохождение случайного сигнала через нелинейные звенья в разомкнутых системах

Исследование прохождения случайного сигнала через нелинейные звенья в ЦАС сопряжено со значительными трудностями и в большинстве случаев не может быть сделано точными теоретическими методами. Поэтому основным методом исследования подобных систем должно быть моделирование на ЭВМ. Этому вопросу посвящены многочисленные работы [14, 46, 75, 89].

Однако иногда требуется хотя бы ориентировочно оценить влияние нелинейных звеньев при теоретическом анализе системы. В этом случае приобретают значение приближенные методы. Одним из наиболее удобных является метод статистической линеаризации.

При его использовании предполагается, что случайные процессы имеют нормальное распределение. При прохождении такого сигнала через нелинейные звенья нормаль-

ность его будет нарушаться. Однако для приближенной оценки точности системы и здесь можно воспользоваться двумя первыми вероятностными моментами, т. е. математическим ожиданием и дисперсией, что эквивалентно использованию корреляционной теории (или спектральных плотностей).

Рассмотрим случай разомкнутой ЦАС (рис. 3.18), содержащей два импульсных элемента, дискретное корректирующее устройство с передаточной функцией $D(z)$ и приведенную линейную часть с передаточной функцией $W_{пл}(p)$. На входе системы действует случайный сигнал

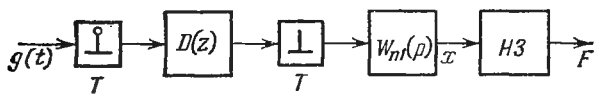


Рис. 3.18. Разомкнутая дискретная система с нелинейным звеном

$g(t)$. Сигнал $x(t)$ поступает на нелинейное звено (НЗ), выходной сигнал которого характеризуется некоторой нелинейной зависимостью, например $F = F(x, px)$.

Сущность статистической линеаризации заключается в том, что нелинейное звено заменяется эквивалентным, которое одинаково с исходным нелинейным звеном преобразует два первых вероятностных момента — математическое ожидание и дисперсию. При этом предполагается, что, так же как и в случае гармонической линеаризации, последующие элементы, на которые поступает выходной сигнал нелинейного звена, обладают свойством фильтра и влияние неучитываемых высших вероятностных моментов будет ослаблено. Это и позволяет применить подобный метод для инженерных расчетов.

Пусть входной сигнал $g(t)$ представляет собой сумму математического ожидания $\bar{g}(t)$, являющегося регулярной функцией времени, и центрированного случайного стационарного процесса, для которого известны корреляционная функция $K_g(\tau)$ или спектральная плотность $S_g(\omega)$. Для дискретных моментов времени корреляционной функции $K_g[m]$ соответствует спектральная плотность в функции псевдочастоты $S^*(\lambda)$.

Передаточная функция линейной части рассматриваемой системы может быть представлена в виде

$$W_1(z, \varepsilon) = D(z) W_{01}(z, \varepsilon). \quad (3.201)$$

Передаточная функция приведенной непрерывной части определяется зависимостью

$$W_{01}(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{01}[n, \varepsilon] z^{-n}, \quad (3.202)$$

где $w_{01}[n, \varepsilon]$ — смещенная решетчатая функция веса приведенной непрерывной части. Передаточной функции (3.201) соответствует смещенная приведенная весовая функция разомкнутого канала от входа до нелинейного звена

$$w_1[n, \varepsilon] = \mathbb{Z}^{-1} \{W_1(z, \varepsilon)\}, \quad (3.203)$$

которая представляет собой реакцию этого канала на решетчатую импульсную входную функцию $g[n] = \delta_0[n]$.

Представим непрерывный сигнал $x(t)$ в виде суммы

$$x = \tilde{x} + x^0, \quad (3.204)$$

где $\tilde{x}$ — математическое ожидание (среднее значение), являющееся регулярной функцией времени, а x^0 — случайная составляющая с нулевым математическим ожиданием. Регулярная составляющая может быть найдена следующим образом. Пусть решетчатой функции регулярной части входного сигнала $\tilde{g}[n]$ соответствует изображение $\tilde{G}(z)$. Тогда изображение сигнала $\tilde{x}[n, \varepsilon]$ на выходе линейной части

$$\tilde{X}(z, \varepsilon) = \tilde{G}(z) W_1(z, \varepsilon). \quad (3.205)$$

Для оригинала имеем

$$\tilde{x}[n, \varepsilon] = \mathbb{Z}^{-1} \{\tilde{X}(z, \varepsilon)\}. \quad (3.206)$$

Переход к оригиналу в (3.203) и (3.206) может быть сделан в соответствии с изложенным в § 2.2. Расчет прохождения через линейную часть системы случайной составляющей может быть сделан на основе изложенного в § 3.5 и § 3.6.

Рассмотрим случай стационарности процесса $g^0(t)$. Корреляционная функция, соответствующая решетчатому сигналу $g^0[n]$, предполагается известной и равной $K_g[m]$.

Тогда корреляционная функция процесса $x^0[n, \varepsilon]$

$$K_x[n, n_1, \varepsilon] = \sum_{j=0}^n \omega_1[j, \varepsilon] \sum_{k=0}^{n_1} \omega_1[k, \varepsilon] K_g[m-j+k]. \quad (3.207)$$

Если в (3.207) положить $n_1 = n$, то будет получена дисперсия рассматриваемого процесса

$$D_x[n, \varepsilon] = \sum_{j=0}^n \omega_1[j, \varepsilon] \sum_{k=0}^n \omega_1[k, \varepsilon] K_g[0-j+k]. \quad (3.208)$$

В устойчивом канале $K_x[n, n_1]$ и $D_x[n, \varepsilon]$ стремятся к некоторым пределам, которые определяют стационарный процесс на выходе. Положив в (3.207) $n \rightarrow \infty$ и $n_1 \rightarrow \infty$ при $n_1 - n = m$, имеем

$$K_x[m, \varepsilon] = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_1[j, \varepsilon] \sum_{k=0}^{\infty} \omega_1[k, \varepsilon] K_g[m-j+k]. \quad (3.209)$$

Если в последнем выражении принять $m = 0$, то получим установившееся значение дисперсии

$$D_x[\varepsilon] = K_x[0, \varepsilon] = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_1[j, \varepsilon] \sum_{k=0}^{\infty} \omega_1[k, \varepsilon] K_g[k-j]. \quad (3.210)$$

Однако приведенные формулы оказываются не всегда удобными для расчета. При рассмотрении только установившихся режимов при входном стационарном процессе удобнее вести расчеты при использовании спектральных плотностей решетчатых процессов $S^*(\lambda)$, рассматриваемых как функции псевдочастоты. Частотная передаточная функция линейной части

$$W_1^*(j\lambda, \varepsilon) = W_1 \left(\frac{1 + j\lambda \frac{T}{2}}{1 - j\lambda \frac{T}{2}}, \varepsilon \right). \quad (3.211)$$

Дисперсия выходной величины линейной части для дискретных моментов времени

$$D_x(\varepsilon) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_x^*(\lambda, \varepsilon) d\lambda}{\left| 1 + j\lambda \frac{T}{2} \right|^2} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|W_1^*(j\lambda, \varepsilon)|^2 S_g^*(\lambda) d\lambda}{\left| 1 + j\lambda \frac{T}{2} \right|^2}. \quad (3.212)$$

Дисперсия непрерывной выходной величины $x(t)$

$$D_x = \int_0^1 D_x(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (3.213)$$

Заметим, что во многих случаях, особенно при относительно малых значениях периода дискретности, можно с большой точностью использовать приближенную зависимость $D_x \approx D_x(\varepsilon)$. При этом оказывается вообще ненужным рассмотрение передаточной функции $W_1(z, \varepsilon)$ и весь расчет может производиться для дискретных моментов времени при $\varepsilon=0$ по передаточной функции $W_1(z, 0) = W_1(z)$. Условие применимости этого заключается в том, чтобы в течение периода дискретности выходная величина оставалась бы практически постоянной.

Таким образом, после расчетов прохождения через линейную часть регулярной и случайной составляющих на ее выходе оказываются известными математическое ожидание и дисперсия.

Величину F на выходе нелинейного звена представим также в виде суммы регулярной составляющей (математического ожидания) и случайной составляющей:

$$F = \tilde{F} + F^0 = \tilde{F} + q^0 x^0 = \tilde{q} \tilde{x} + q^0 x^0. \quad (3.214)$$

Здесь введен эквивалентный коэффициент передачи нелинейного звена q^0 по случайной составляющей. При этом регулярная составляющая $\tilde{F}$ может использоваться непосредственно либо представляться в виде произведения $\tilde{q} \tilde{x}$, где $\tilde{q}$ — эквивалентный коэффициент передачи регулярной составляющей. Для определения последнего коэффициента могут применяться различные методы линеаризации зависимости $\tilde{F} = \tilde{F}(\tilde{x})$. Статическая линеаризация дает $\tilde{q} = \tilde{F}/\tilde{x}$, а динамическая — $\tilde{q} = \partial \tilde{F} / \partial \tilde{x}$. Последний случай совпадает с обычной линеаризацией, используемой в нелинейных системах и вытекающей из разложения в ряд Тейлора.

Регулярная составляющая может определяться по формуле для математического ожидания. Для однозначной нелинейной функции $F(x)$

$$\tilde{F} = M \{F(\tilde{x} + x^0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tilde{x} + x^0) \vartheta(x) dx, \quad (3.215)$$

где $\vartheta(x)$ — плотность вероятности.

Для нелинейности более общего вида $F = F(x, px)$ формула получается в виде

$$\tilde{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tilde{x} + x^0, p\tilde{x} + px^0) \vartheta(x, px) dx d(px). \quad (3.216)$$

Формула (3.216) может быть, в частности, использована для определения математического ожидания $\tilde{F}$ в случае нелинейных петлеобразных характеристик. Так, для характеристики, изображенной на рис. 3.19, для случая симметричной функции распределения можно получить

$$\begin{aligned} \tilde{F} = & \int_{-\infty}^{-b_1} F(\tilde{x} + x^0) \vartheta(x) dx + \\ & \int_{-b_1}^{b_2} \frac{1}{2} [F_1(\tilde{x} + x^0) + F_2(\tilde{x} + x^0)] \vartheta(x) dx + \int_{b_2}^{\infty} F(\tilde{x} + x^0) \vartheta(x) dx. \end{aligned} \quad (3.217)$$

Эквивалентный коэффициент передачи для случайной составляющей можно определить следующими способами.

Первый способ предполагает использование средне-квадратичных отклонений σ_x и σ_F . Эквивалентный коэффициент передачи находится по их отношению

$$q^0 = \frac{\sigma_F}{\sigma_x} = \sqrt{\frac{M\{(F^0)^2\}}{M\{(x^0)^2\}}}. \quad (3.218)$$

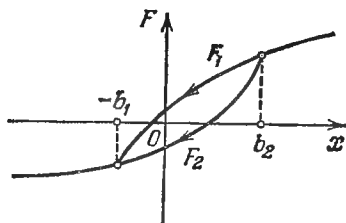


Рис. 3.19. Петлевая нелинейная характеристика.

В случае однозначной нелинейности $F(x)$ расчетная формула приобретает вид

$$q^0 = \frac{1}{\sigma_x} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} F^2(\tilde{x} + x^0) \vartheta(x) dx - \tilde{F}^2}. \quad (3.219)$$

В более общем случае, когда $F = F(x, px)$, а также при наличии петлевых нелинейных характеристик формула (3.219) получается более сложной. Она может быть получена при использовании тех же обобщений, которые были сделаны при нахождении формул (3.216) и (3.217).

Второй способ предполагает определение эквивалентного коэффициента передачи из условия минимума математического ожидания квадрата разности истинного значения F и ее заменяющего значения (3.214). Это условие имеет вид

$$M \{ [F - \tilde{F} - q^0 x^0]^2 \} = \min. \quad (3.220)$$

Из него можно получить

$$q^0 = \frac{M \{ F^0 x^0 \}}{M \{ (x^0)^2 \}} = \frac{r_{Fx}}{\sigma_x^2}, \quad (3.221)$$

где r_{Fx} — значение взаимной корреляционной функции переменных F и x при $\tau = 0$. Если нелинейная зависимость носит однозначный характер, то из (3.221) имеем

$$q^0 = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} F^0 x^0 \vartheta(x) dx = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tilde{x} + x^0) x^0 \vartheta(x) dx. \quad (3.222)$$

Эта формула также может быть обобщена на случай $F = F(x, px)$ и для петлевых характеристик по образцу формул (3.216) и (3.217).

Второй способ определения эквивалентного коэффициента передачи приводит к более простым формулам. С точки зрения точности расчета оба метода примерно равноценны. В некоторых случаях первый метод дает завышенные значения для оценки корреляционной функции величины $F(t)$, а второй — заниженные. Поэтому существует рекомендация [94] использовать для расчета среднее значение двух эквивалентных коэффициентов передачи, определенных двумя способами.

Кусочно-линейные характеристики. При расчете нелинейных систем часто используется замена нелинейной характеристики ее кусочно-линейной аппроксимацией. Пример такой характеристики изображен на рис. 3.20.

Абсциссы b_1 и b_2 соответствуют точкам излома характеристики, а коэффициенты a_1 , a_2 и a_3 представляют собой коэффициенты наклона соответствующих линейных отрезков.

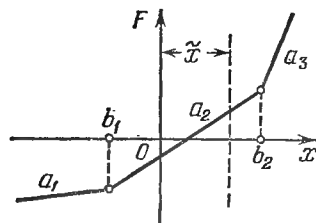


Рис. 3.20. Кусочно-линейная характеристика.

Применительно к такой характеристике формула (3.222) может быть представлена в следующем виде:

$$q^0 = \frac{1}{\sigma_x^2} \left[\int_{-\infty}^{b_1} a_1 (x^0)^2 \vartheta(x) dx + \int_{b_1}^{b_2} a_2 (x^0)^2 \vartheta(x) dx + \right. \\ \left. + \int_{b_2}^{\infty} a_3 (x^0)^2 \vartheta(x) dx \right]. \quad (3.223)$$

Каждый из входящих в (3.223) интегралов может быть выражен через дисперсию σ_x^2 и вероятность нахождения $x(t)$ в рассматриваемом интервале. В результате вместо (3.223) можем записать

$$q^0 = a_1 P_1 (-\infty < x < b_1) + a_2 P_2 (b_1 < x < b_2) + \\ + a_3 P_3 (b_2 < x < \infty). \quad (3.224)$$

Обобщая это на случай произвольного числа линейных участков, имеем

$$q^0 = \sum_{i=1}^N a_i P_i. \quad (3.225)$$

Эта формула оказывается во многих случаях сравнительно простой, так как соответствующие вероятности P_i могут быть определены через интеграл вероятностей. Так, например, для характеристики, изображенной на рис. 3.20, имеем для нормального распределения

$$q^0 = \frac{a_1}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{b_1 + \tilde{x}}{\sigma_x} \right) \right] + \frac{a_2}{2} \left[\Phi \left(\frac{b_1 + \tilde{x}}{\sigma_x} \right) + \Phi \left(\frac{b_2 - \tilde{x}}{\sigma_x} \right) \right] + \\ + \frac{a_3}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{b_2 - \tilde{x}}{\sigma_x} \right) \right] = \frac{a_1 + a_3}{2} + \frac{a_2 - a_1}{2} \Phi \left(\frac{b_1 + \tilde{x}}{\sigma_x} \right) + \\ + \frac{a_2 - a_3}{2} \Phi \left(\frac{b_2 - \tilde{x}}{\sigma_x} \right). \quad (3.226)$$

Характеристики с разрывом непрерывностей. Встречаются характеристики, имеющие разрывы непрерывностей в виде скачков выходной величины. К таким характеристикам, в частности, относятся все релейные характеристики.

На рис. 3.21 изображен отдельно подобный скачок характеристики. Определим составляющую эквивалентного коэффициента передачи случайной величины x^0 . Для этого воспользуемся формулой (3.222).

Будем рассматривать нелинейную характеристику как кусочно-линейную с наклонами отрезков $a_1 = 0$, $a_2 \rightarrow \infty$ и $a_3 = 0$. Второй участок на интервале $(b, b + \Delta x)$ заменим наклонной прямой с коэффициентом $a_2 = c/\Delta x$. Тогда, аналогично изложенному выше,

$$q^0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c}{\Delta x} P(b < x < b + \Delta x) = c \frac{dP}{dx} = c \vartheta(b), \quad (3.227)$$

где $\vartheta(b)$ — плотность вероятности в точке $x = b$.

Для нормального закона распределения

$$q^0 = \frac{c}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{b - \bar{x}}{\sigma_x} \right)^2 \right]. \quad (3.228)$$

Обобщая формулу (3.228) на случай наличия N скачков, имеем

$$q^0 = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^N c_i \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{b_i - \bar{x}}{\sigma_x} \right)^2 \right]. \quad (3.229)$$

Скачку c_i приписывается положительное значение, если положительному приращению x в районе скачка соответствует положительное приращение выходной величины F или отрицательному приращению x соответствует отрицательное приращение F . Формула (3.229) удобна для определения q^0 в случае релейных характеристик.

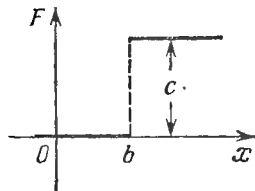


Рис. 3.21. Разрыв непрерывности в характеристике.

Несмотря на приближенность расчетов по методу статистической линеаризации и возможность использования более точных методов исследования на ЭВМ, в некоторых случаях его применение позволяет получить прозрачные и наглядные результаты по поведению нелинейной системы управления при случайных воздействиях.

Ниже приводятся некоторые результаты по расчету $\tilde{F}$ и q^0 для типовых нелинейностей при нормальном законе распределения величины $x(t)$ или, что все равно, при нормальном законе распределения входного воздействия $g(t)$.

Идеальная релейная характеристика. Эта характеристика изображена на рис. 3.22, а. При положительном значении $\tilde{x}$ в соответствии с формулой (3.215)

$$\tilde{F} = \frac{c}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \tilde{x}}{\sigma_x} \right)^2 \right] dx - \int_{-\infty}^0 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \tilde{x}}{\sigma_x} \right)^2 \right] dx \right\} = c\Phi \left(\frac{\tilde{x}}{\sigma_x} \right) = c\Phi(u), \quad (3.230)$$

где интеграл вероятностей для $u = \tilde{x}/\sigma_x$

$$\Phi \left(\frac{\tilde{x}}{\sigma_x} \right) = \Phi(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) dy. \quad (3.231)$$

Числовые значения интеграла вероятностей имеются в справочниках. Для отрицательных значений $\tilde{x}$ результат получается аналогичным, но с обратным знаком.

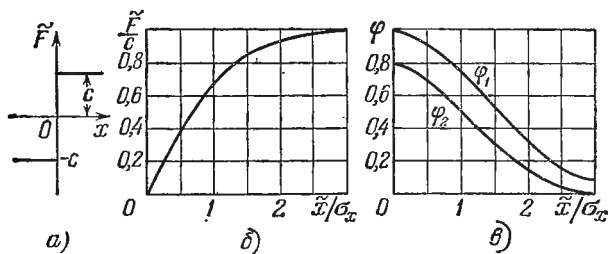


Рис. 3.22. Характеристики идеального релейного звена.

Зависимость относительного значения смещения на выходе нелинейного звена $\tilde{F}/c$ от относительного значения смещения на выходе $\tilde{x}/\sigma_x$ для нормального закона распределения входной величины при $\tilde{x} > 0$ показана на рис. 3.22, б. Характеристика $\tilde{F}(\tilde{x})$ имеет симметрию относительно начала координат (нечетная функция), поэтому случай $\tilde{x} < 0$ может быть получен из изображенной характеристики инвертированием знаков $\tilde{x}$ и $\tilde{F}$.

Линеаризация разложением в ряд Тейлора дает из (3.230) эквивалентный коэффициент передачи регулярной составляющей в точке $\tilde{x} = \tilde{x}_0$ для малых отклонений от

ЭТОЙ ТОЧКИ:

$$\tilde{q} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{x}} = c \frac{\partial \Phi\left(\frac{\tilde{x}}{\sigma_x}\right)}{\partial \tilde{x}} = \frac{c}{\sigma_x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{x}_0}{\sigma_x}\right)^2\right]. \quad (3.232)$$

В частном случае при $\tilde{x}_0 = 0$ имеем

$$\tilde{q}_0 = \frac{c}{\sigma_x} \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (3.233)$$

Эквивалентный коэффициент передачи случайной составляющей в соответствии с формулой (3.219) будет

$$\begin{aligned} q^0 &= \frac{1}{\sigma_x} \sqrt{c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(x) dx - (\tilde{F})^2} = \frac{c}{\sigma_x} \sqrt{1 - \Phi^2\left(\frac{\tilde{x}}{\sigma_x}\right)} = \\ &= \frac{c}{\sigma_x} \varphi_1(\tilde{x}, \sigma_x). \end{aligned} \quad (3.234)$$

В соответствии с формулой (3.229)

$$q^0 = \frac{2c}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{x}}{\sigma_x}\right)^2\right] = \frac{c}{\sigma_x} \varphi_2(\tilde{x}, \sigma_x). \quad (3.235)$$

Полученные функции φ_1 и φ_2 построены на рис. 3.22, в. Эти функции являются четными, т. е. $\varphi_1(-\tilde{x}, \sigma_x) = \varphi_1(\tilde{x}, \sigma_x)$ и $\varphi_2(-\tilde{x}, \sigma_x) = \varphi_2(\tilde{x}, \sigma_x)$. В частном случае, когда $\tilde{x} = 0$ и $\tilde{F} = 0$, эквивалентный коэффициент передачи из формул (3.234) и (3.235) будет равен, соответственно,

$$\left. \begin{aligned} q_0^0 &= \frac{c}{\sigma_x}, \\ q_0^0 &= \frac{c}{\sigma_x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \tilde{q}_0 = 0,8 \frac{c}{\sigma_x}. \end{aligned} \right\} \quad (3.236)$$

Релейная характеристика с зоной нечувствительности. Эта характеристика показана на рис. 3.23, а. Аналогично изложенному выше можно выразить математическое ожидание выходной величины через интеграл вероятностей. Для случая $0 < \tilde{x} < b$ получаем

$$\tilde{F} = \frac{c}{2} \left[\Phi\left(\frac{b+\tilde{x}}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{b-\tilde{x}}{\sigma_x}\right) \right]. \quad (3.237)$$

Для случая $0 < b < \tilde{x}$, соответственно,

$$\tilde{F} = \frac{c}{2} \left[\Phi\left(\frac{b+\tilde{x}}{\sigma_x}\right) + \Phi\left(\frac{\tilde{x}-b}{\sigma_x}\right) \right]. \quad (3.238)$$

Как следует из последней формулы, при $\tilde{x} \rightarrow \infty$ на выходе имеем $\tilde{F} \rightarrow c$. Объединяя две полученные формулы в одну, можем представить искомую зависимость для $\tilde{x} > 0$ в виде

$$\tilde{F} = \frac{c}{2} \left[\Phi \left(\frac{b + \tilde{x}}{\sigma_x} \right) - \Phi \left(\frac{|b - \tilde{x}|}{\sigma_x} \right) \right] \operatorname{sign}(b - \tilde{x}). \quad (3.239)$$

Для $\tilde{x} < 0$ могут быть получены аналогичные формулы. При этом характеристика $\tilde{F}(\tilde{x})$ будет симметричной относительно начала координат, что соответствует нечетной функции от $\tilde{x}$.

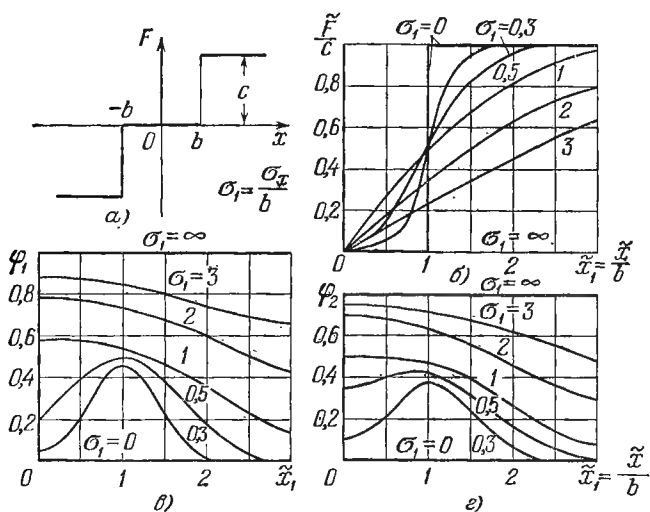


Рис. 3.23. Характеристики релейного звена с зоной нечувствительности.

На рис. 3.23, б построена зависимость величины $\tilde{F}/c$ в функции относительного смещения $\tilde{x}_1 = \tilde{x}/b$ при различных значениях относительного среднеквадратичного значения случайной составляющей входного сигнала $\sigma_1 = \sigma_x/b$.

Представив эквивалентный коэффициент передачи случайной составляющей в виде $q^0 = \sigma_x^{-1} \varphi(\tilde{x}, \sigma_x)$, по

формуле (3.219) находим

$$\varphi_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{F}}{c}\right)^2 - \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{b+\tilde{x}}{\sigma_x}\right) + \Phi\left(\frac{|b-\tilde{x}|}{\sigma_x}\right) \operatorname{sign}(b-\tilde{x}) \right]} \quad (3.240)$$

и по формуле (3.229)

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{b+\tilde{x}}{\sigma_x}\right)^2\right] + \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{b-\tilde{x}}{\sigma_x}\right)^2\right] \right\}. \quad (3.241)$$

Зависимости (3.240) и (3.241) являются четными функциями величины $\tilde{x}_1$. Они изображены для случая $\tilde{x} > 0$ на рис. 3.23, в и г.

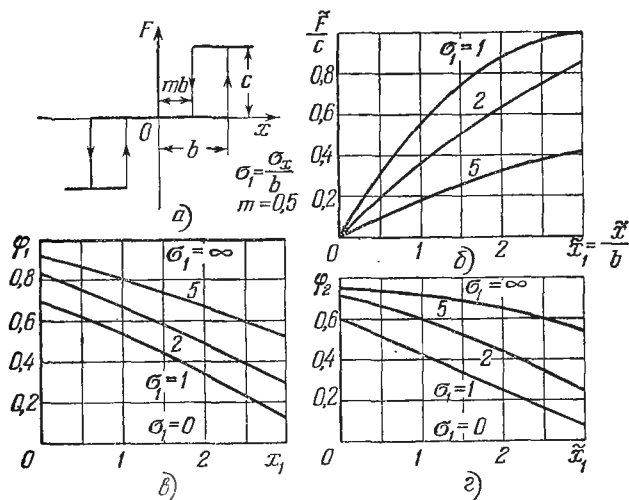


Рис. 3.24. Характеристики релейного звена с гистерезисом.

В частном случае $\tilde{x} = 0$ и $\tilde{F} = 0$ из (3.240) можно получить

$$\varphi_0^0 = \frac{c}{\sigma_x} \varphi_1(0, \sigma_x) = \frac{c}{\sigma_x} \sqrt{1 - \Phi\left(\frac{b}{\sigma_x}\right)}. \quad (3.242)$$

Аналогичным образом из (3.241) имеем

$$\varphi_0^0 = \frac{c}{\sigma_x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{b^2}{\sigma_x^2}\right). \quad (3.243)$$

Релейная характеристика петлевого типа. Эта характеристика изображена на рис. 3.24, а. Математическое ожи-

дание выходной величины (3.215) определяется через интеграл вероятностей (3.224):

$$\tilde{F} = \frac{c}{4} [\Phi(u_1) - \Phi(|u_2|) \operatorname{sign} u_2 + \Phi(u_3) - \Phi(|u_4|) \operatorname{sign} u_4], \quad (3.244)$$

где

$$u_1 = \frac{b + \tilde{x}}{\sigma_x}, \quad u_2 = \frac{b - \tilde{x}}{\sigma_x}, \quad u_3 = \frac{mb + \tilde{x}}{\sigma_x}, \quad u_4 = \frac{mb - \tilde{x}}{\sigma_x}.$$

Зависимость $\tilde{F}/c$ для случая $\tilde{x} > 0$ и $m = 0,5$ изображена на рис. 3.24, б. Как и ранее, эта характеристика соответствует нечетной функции от $\tilde{x}$.

Функции, определяющие эквивалентный коэффициент передачи случайной составляющей, в соответствии с формулами (3.219) и (3.229)

$$\Phi_1 = \left\{ 1 - \left(\frac{\tilde{F}}{c} \right)^2 - \frac{1}{4} [\Phi(u_1) + \Phi(|u_2|) \operatorname{sign} u_2 + \Phi(u_3) + \Phi(|u_4|) \operatorname{sign} u_4] \right\}^{1/4}, \quad (3.245)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} [e^{-0,5u_1^2} + e^{-0,5u_2^2} + e^{-0,5u_3^2} + e^{-0,5u_4^2}]. \quad (3.246)$$

В частном случае $\tilde{x} = 0$ и $\tilde{F} = 0$ из формул (3.245) и (3.246) можно получить

$$q_0^0 = \frac{c}{\sigma_x} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{b}{\sigma_x}\right) + \Phi\left(\frac{mb}{\sigma_x}\right) \right]}, \quad (3.247)$$

$$q_0^0 = \frac{c}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \left[\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{b^2}{\sigma_x^2}\right) + \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m^2 b^2}{\sigma_x^2}\right) \right]. \quad (3.248)$$

Линейная характеристика с насыщением. Эта характеристика изображена на рис. 3.25, а. Математическое ожидание выходной величины

$$\begin{aligned} \tilde{F} = \frac{c}{2} \left[\frac{\tilde{x} + b}{b} \Phi(u_1) + \frac{\tilde{x} - b \operatorname{sign}(b - \tilde{x})}{b} \Phi(|u_2|) \right] + \\ + \frac{c}{b} \frac{\sigma_x}{\sqrt{2\pi}} (e^{-0,5u_1^2} - e^{-0,5u_2^2}). \end{aligned} \quad (3.249)$$

Соответствующий график построен на рис. 3.25, б.

Функция, определяющая эквивалентный коэффициент передачи случайной составляющей, из формулы (3.219)

$$\varphi_1 = \left\{ 1 - \left(\frac{\tilde{F}}{c} \right)^2 + \frac{\sigma_x^2}{2b^2} (1 - u_1 u_2) [\Phi(u_1) + \Phi(|u_2|) \operatorname{sign} u_2 - \frac{\sigma_x^2}{b^2 \sqrt{2\pi}} (u_2 e^{-0,5u_1^2} + u_1 e^{-0,5u_2^2})] \right\}^{1/2}. \quad (3.250)$$

Аналогично из формулы (3.225)

$$\varphi_2 = \frac{\sigma_x}{2b} [\Phi(u_1) + \Phi(|u_2|) \operatorname{sign} u_2]. \quad (3.251)$$

Здесь использованы обозначения, введенные ранее в формулы (3.244) — (3.246). Графики полученных зависимостей изображены на рис. 3.25, б, в и г.

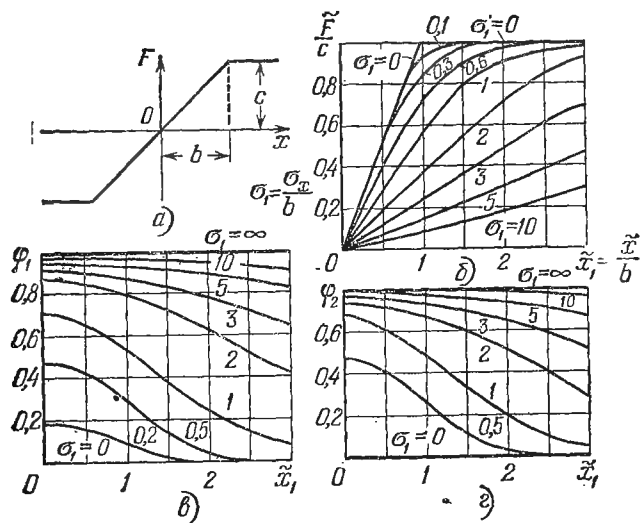


Рис. 3.25. Характеристики линейного звена с насыщением.

Кубическая характеристика. Зависимость вида $F = kx^3$ изображена на рис. 3.26, а. Из (3.215) имеем

$$\tilde{F} = k[3\tilde{x}\sigma_x^2 + (\tilde{x})^3]. \quad (3.252)$$

Для случайной составляющей входного сигнала из (3.219) и (3.222), соответственно,

$$q^0 = k\sigma_x \sqrt{15 + 36\left(\frac{\tilde{x}}{\sigma_x}\right)^2 + 9\left(\frac{\tilde{x}}{\sigma_x}\right)^4} = \frac{k}{\sigma_x} \varphi_1(\tilde{x}, \sigma_x), \quad (3.253)$$

$$\begin{aligned} q^0 &= k\sigma_x \left\{ \frac{\tilde{x}}{2\sigma_x} \Phi\left(\frac{\tilde{x}}{\sigma_x}\right) + \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{\tilde{x}}{\sigma_x}\right)^2 \right] \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{x}}{\sigma_x}\right)^2\right] \right\} = \\ &= \frac{k}{\sigma_x} \varphi_2(\tilde{x}, \sigma_x). \end{aligned} \quad (3.254)$$

Соответствующие графики построены на рис. 3.26, б, в.

Пример 3.4. Рассмотрим разомкнутую цифровую систему, структурная схема которой изображена на

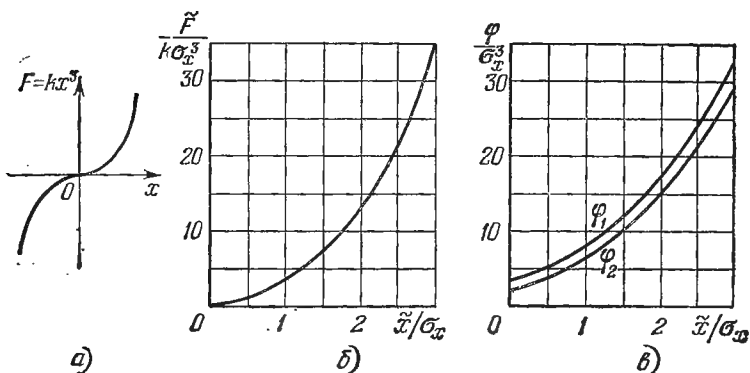


Рис. 3.26. Звено с характеристикой вида кубической параболы.

рис. 3.27. Примем, что на входе системы действует нормальный стационарный процесс с математическим ожиданием $\tilde{g} = \text{const}$ и корреляционной функцией для центрированной составляющей $K_g(\tau) = D_g \exp(-\mu|\tau|)$.

Нелинейное звено представляет собой реле с характеристикой, изображенной на рис. 3.24, а. Предполагается, что можно пренебречь влиянием квантования по уровню во входном и выходном преобразователях.

Передающая функция непрерывной части

$$W_{нл}(p) = \frac{k_{нл}}{1 + T_1 p}.$$

Дискретная передаточная функция приведенной непрерывной части

$$W_{01}(z, \varepsilon) = \frac{\delta k_n}{\delta_1} \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}_\varepsilon \left\{ \frac{1}{p(1+T_1 p)} \right\} = \\ = \frac{\delta k_n (z-1)}{\delta_1 z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{d^e z}{z-d} \right] = \frac{K [(1-d^e)z + d^e - d]}{z-d},$$

где общий коэффициент усиления $K = \delta k_n \delta_1^{-1}$, а $d = \exp(-T/T_1)$.

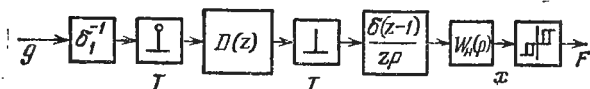


Рис. 3.27. Схема к примеру расчета разомкнутой системы.

Дискретную передаточную функцию цифровой части примем в виде

$$D(z) = \frac{1}{1-d} \frac{z-d}{z}.$$

Результирующая дискретная передаточная функция канала

$$W_1(z, \varepsilon) = D(z) W_{01}(z, \varepsilon) = \frac{K}{1-d} \frac{(1-d^e)z + d^e - d}{z}.$$

Частотная передаточная функция канала

$$W_1^*(j\lambda, \varepsilon) = \frac{K}{1-d} \frac{1-d + (1-2d^e + d)j\lambda \frac{T}{2}}{1 + j\lambda \frac{T}{2}}.$$

Примем следующие исходные данные: постоянная составляющая $\tilde{g} = 5$; дисперсия $D_g = 100$; коэффициент $\mu = 2 \text{ с}^{-1}$; общий коэффициент усиления $K = 1$; ширина зоны нечувствительности реле $b = 4$ при $m = 0,5$; уровень сигнала на выходе реле $c = 20$; постоянная времени $T_1 = 0,5 \text{ с}$; период дискретности $T = 1 \text{ с}$; $d = \exp(-2) = 0,135$.

Произведем расчет математического ожидания $\tilde{x}$ на выходе линейной части. В соответствии с (3.205) имеем

$$\tilde{X}(z, \varepsilon) = \tilde{G}(z) W_1(z, \varepsilon) = \frac{\tilde{g}z}{z-1} \frac{K}{1-d} \frac{(1-d^e)z + d^e - d}{z}.$$

Установившееся значение

$$\tilde{x} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \tilde{X}(z, \varepsilon) = \tilde{g}K = 5.$$

Для расчета дисперсии D_x на выходе линейной части запишем спектральную плотность входного сигнала для корреляционной функции $K_g[m] = D_g \exp(-\mu T |m|)$ в соответствии с формулой (3.59):

$$S_g^*(\lambda) = \frac{2D_g T_g \left(1 + \frac{\lambda^2 T_g^2}{4}\right)}{T(1 + \lambda^2 T_g^2)},$$

$$T_g = \frac{T}{2} \operatorname{cth} \frac{\mu T}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{cth} 1 = 0,656 \text{ с.}$$

Далее находим спектральную плотность для случайной составляющей x^0 на выходе линейной части:

$$\begin{aligned} S_x^*(\lambda) &= |W_1^*(j\lambda, \varepsilon)|^2 S_g^*(\lambda) = \\ &= \frac{2T_g D_g K^2}{T(1-d)^2} \frac{\left[(1-d)^2 - (1-2d^2+d)^2 \frac{T_g^2}{4} (j\lambda)^2\right] \left(1 + \frac{\lambda^2 T_g^2}{4}\right)}{\left|\frac{TT_g}{2} (j\lambda)^2 + \left(T_g + \frac{T}{2}\right) j\lambda + 1\right|^2}. \end{aligned}$$

Интегрирование последнего выражения в бесконечных пределах дает дисперсию для дискретных моментов времени:

$$D_x(\varepsilon) = \frac{D_g K^2}{(1-d)^2} \frac{T_g(1-d)^2 + (1-2d^2+d) \frac{T}{2}}{T_g + \frac{T}{2}}.$$

Дисперсия непрерывной величины на выходе линейной части

$$D_x = \int_0^1 D_x(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{D_g K^2}{T_g + \frac{T}{2}} \left[T_g + \left(\frac{1+d}{1-d} \right) \frac{T}{2} - \frac{1+d}{1-d} T_1 \right].$$

Подстановка численных значений в последнюю формулу дает

$$D_x = \frac{100 \cdot 1}{0,656 + 0,5} \left[0,656 + \frac{1,135^2}{0,865^2} \cdot 0,5 - \frac{1,135}{0,865} \cdot 0,5 \right] = 97.$$

Среднеквадратичное значение $\sigma_x = \sqrt{97} = 9,85$. Для того чтобы воспользоваться графиками на рис. 3.24, определим

$\sigma_1 = \sigma_x b^{-1} = 9,85 \cdot 0,25 = 2,46$ и $\tilde{x}_1 = \tilde{x} b^{-1} = 5 \cdot 0,25 = 1,25$. Из рис. 3.24, б получаем $\tilde{F} \approx c \cdot 0,35 = 20 \cdot 0,35 = 7$. Из рис. 3.24, в для первого способа нахождения эквивалентного коэффициента передачи имеем $\varphi_1 \approx 0,65$, что дает $q^0 = c \sigma_x^{-1} \varphi_1 \approx 20 \cdot 9,85^{-1} \cdot 0,65 = 1,32$. Соответственно для второго способа из рис. 3.24, г имеем $\varphi_2 \approx 0,6$, что дает $q^0 = c \sigma_x^{-1} \varphi_2 \approx 20 \cdot 9,85^{-1} \cdot 0,6 = 1,22$. Уточнение значений $\tilde{F}$ и q^0 может быть сделано при использовании формул (3.239), (3.240) и (3.241).

§ 3.10. Случайные процессы в замкнутых нелинейных системах

Исследование нелинейных замкнутых ЦАС при случайных воздействиях представляет еще более сложную задачу по сравнению со случаем разомкнутых систем и,

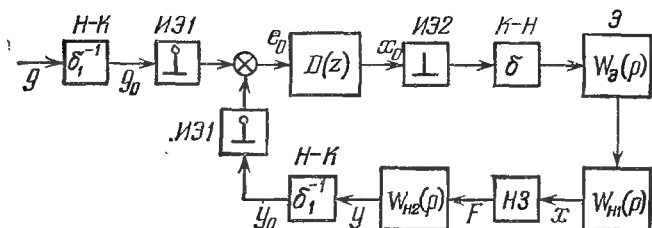


Рис. 3.28. Замкнутая нелинейная дискретная система.

как правило, должно выполняться на ЭВМ. Ниже рассматривается приближенный способ теоретического исследования подобных систем для случая, когда нелинейное звено содержится в непрерывной части системы. Этот способ основан на использовании статистической линеаризации, основы которой применительно к цифровым системам были изложены в § 3.9.

Структурная схема цифровой нелинейной системы изображена на рис. 3.28. В непрерывной части имеется нелинейное звено (НЗ). Передаточные функции линейной непрерывной части — $W_{н1}(p)$ и $W_{н2}(p)$. Передаточная функция экстраполятора (Э) обозначена $W_a(p)$. В схему введены преобразователи непрерывной величины в код Н—К с линеаризованным коэффициентом передачи δ_1^{-1} ,

где δ_1 — цена единицы младшего разряда, и когда в непрерывную величину $K-H$ с линеаризованным коэффициентом передачи, равным цене единицы младшего разряда выходного преобразователя δ . На схеме показаны также идеальные импульсные элементы первого рода *ИЭ1* и второго рода *ИЭ2*.

Примем гипотезу стационарности сигнала ошибки $e = g - y$. При этом условие стационарности может не выполняться для задающего воздействия $g(t)$ и управляемой величины $y(t)$. Примером последнего может служить типовой входной сигнал следящей системы с корреляционной функцией входной скорости вида $K_1(\tau) = D_1 \exp(-\mu|\tau|)$, где D_1 — дисперсия скорости. Процесс изменения задающего воздействия $g(t)$ при этом характеризуется нестационарностью, так как его дисперсия с течением времени неограниченно возрастает. Однако если система управления имеет астатизм хотя бы первого порядка, то при ограниченной дисперсии входной скорости дисперсия ошибки воспроизведения задающего воздействия оказывается ограниченной и постоянной в установившемся режиме. Это означает стационарность сигнала ошибки.

Представим искомые величины в виде суммы математического ожидания и центрированного случайного процесса: $g = \tilde{g} + g^0$, $y = \tilde{y} + y^0$, $e = \tilde{e} + e^0$, $x = \tilde{x} + x^0$ и $F = \tilde{F} + F^0$. Задача расчета системы будет решена, если при заданных характеристиках входного сигнала будут найдены величины $\tilde{e}$ и σ_e . Однако для их нахождения попутно должны быть определены $\tilde{x}$ и σ_x , зная которые можно произвести статистическую линеаризацию нелинейности и определить значения $\tilde{F}$ и q^0 .

При условии стационарности сигнала ошибки для схемы, изображенной на рис. 3.28, можно записать для математических ожиданий

$$\tilde{x} = \tilde{e} \lim_{z \rightarrow 1} W_1(z), \quad (3.255)$$

$$\tilde{e} = \tilde{g} - \tilde{F} \lim_{p \rightarrow 0} W_{n2}(p), \quad (3.256)$$

$$\tilde{F} = \tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x). \quad (3.257)$$

Здесь использована дискретная передаточная функция

части канала управления

$$W_1(z) = D(z) \frac{\delta}{\delta_1} W_{10}(z), \quad (3.258)$$

где $W_{10}(z)$ — дискретная передаточная функция непрерывной части, включающей в себя звено с передаточной функцией $W_{н1}(p)$ и экстраполятор.

Из совокупности уравнений (3.226) — (3.256), в принципе, может быть определена зависимость $\tilde{x} = f_1(\sigma_x)$ после исключения неизвестных $\tilde{e}$ и $\tilde{F}$. В простейших случаях

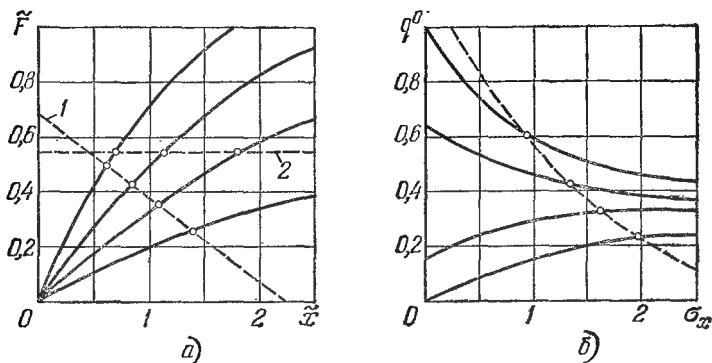


Рис. 3.29. Графики к определению $\tilde{x}$ и σ_x на входе нелинейного звена.

это может быть сделано аналитически. В более сложных случаях — графическими построениями или расчетом на ЭВМ

Если ввести обозначения

$$k_1 = \lim_{z \rightarrow 1} W_1(z), \quad k_2 = \lim_{p \rightarrow 0} W_{н2}(p),$$

то уравнения (3.255) — (3.257) могут быть сведены к одному и представлены в виде

$$\tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x) = \frac{\tilde{g}}{k_2} - \frac{\tilde{x}}{k_1 k_2}. \quad (3.259)$$

Графическое решение последнего уравнения показано на рис. 3.29, а. Пересечение наклонной прямой линии (прямая 1), уравнение которой определяется формулой

(3.259), с исходным семейством характеристик $F(\tilde{x}, \sigma_x)$ дает отдельные точки зависимости $\tilde{x} = f_1(\sigma_x)$.

Если регулярная составляющая $\tilde{g}$ с течением времени возрастает по линейному закону, но $\tilde{e} = \text{const}$, то, продифференцировав (3.256) по времени, получим для производных

$$\dot{\tilde{g}} = \tilde{F} \lim_{p \rightarrow 0} p W_{n2}(p) = k_3 \tilde{F}. \quad (3.260)$$

При этом из условия $\tilde{e} = \text{const}$ следует, что $\lim_{p \rightarrow 0} W_{n2}(p)$ при $p \rightarrow 0$ должен стремиться к бесконечности.

Из (3.260) можно определить

$$\tilde{F} = \frac{\dot{\tilde{g}}}{k_3}, \quad (3.261)$$

где $\dot{\tilde{g}} = \text{const}$ — значение постоянной составляющей первой производной задающего воздействия. Если $\tilde{g}$ возрастает по квадратичному закону, то из условия $\tilde{e} = \text{const}$ следует, что $\lim_{p \rightarrow 0} p W_{n2}(p)$ при $p \rightarrow 0$ должен стремиться к бесконечности. Поэтому равенство (3.256) необходимо продифференцировать дважды. В результате можно найти

$$\tilde{F} = \frac{\ddot{\tilde{g}}}{k_4}, \quad (3.262)$$

где k_4 соответствует пределу, к которому стремится $p^2 W_{n2}(p)$ при $p \rightarrow 0$, а $\ddot{\tilde{g}}$ — значение постоянной составляющей второй производной задающего воздействия.

При известном значении $\tilde{F}$ искомая зависимость может быть получена из того же семейства $\tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x)$, если провести на нем горизонтальную прямую на уровне $\tilde{F}$. Это показано на рис. 3.29, а (прямая 2). Пересечение горизонтальной прямой с семейством $F(\tilde{x}, \sigma_x)$ дает отдельные точки искомой зависимости $\tilde{x} = f_1(\sigma_x)$.

Расчет прохождения случайной составляющей делается следующим образом. Спектральная плотность ошибки может быть записана в виде

$$S_e^*(\lambda, q^0) = |H_e^*(j\lambda, q^0)|^2 S_g^*(\lambda), \quad (3.263)$$

где $S_g^*(\lambda)$ — спектральная плотность входного сигнала в функции псевдочастоты. Частотная передаточная

функция для ошибки

$$H_e^*(j\lambda, q^0) = [1 + W^*(j\lambda, q^0)]^{-1} \quad (3.264)$$

зависит также от эквивалентного коэффициента передачи $q^0 = q^0(\tilde{x}, \sigma_x)$. Дисперсия случайной составляющей на входе нелинейного звена может быть определена в соответствии с изложенным в § 3.9:

$$\begin{aligned} D_x = \sigma_x^2 &= \int_0^1 d\varepsilon \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|W_1^*(j\lambda, \varepsilon)|^2 S_g^*(\lambda, q^0) d\lambda}{|1 + j\lambda \frac{T}{2}|^2} = \\ &= \int_0^1 d\varepsilon \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|W_1^*(j\lambda, \varepsilon)|^2 S_g^*(\lambda) d\lambda}{|1 + W^*(j\lambda, q^0)|^2 |1 + j\lambda \frac{T}{2}|^2}. \end{aligned} \quad (3.265)$$

Частотная передаточная функция части канала управления от его входа до входа нелинейного звена определяется формулами

$$W_1^*(j\lambda, \varepsilon) = W_1(z, \varepsilon), \quad z = \frac{1 + j\lambda \frac{T}{2}}{1 - j\lambda \frac{T}{2}}, \quad (3.266)$$

$$W_1(z, \varepsilon) = D(z) \frac{\delta}{\delta_1} W_{10}(z, \varepsilon), \quad (3.267)$$

где $W_{10}(z, \varepsilon)$ — дискретная передаточная функция части канала управления, включающей в себя непрерывное звено с передаточной функцией $W_{1n}(p)$ и экстраполятор.

В уравнение (3.265) входят две неизвестные величины: $\tilde{x}$ и σ_x , так как коэффициент $q^0 = q^0(\tilde{x}, \sigma_x)$. В принципе это уравнение может быть решено и получена зависимость $\tilde{x} = f_2(\sigma_x)$. В простейших случаях эта задача может быть решена аналитически. В более сложных случаях возможно применение графических приемов, а также проведение расчетов на ЭВМ.

Для графического решения задачи целесообразно построить зависимость $q^0 = q^0(\tilde{x}, \sigma_x)$ в функции σ_x для фиксированных значений $\tilde{x}$. Это показано на рис. 3.29, б, где построена подобная зависимость при фиксированных значениях $\tilde{x}$.

После нахождения интеграла (3.265), что делается известными методами, будет получена зависимость σ_x от эквивалентного коэффициента передачи q^0 . Задаваясь

различными значениями эквивалентного коэффициента передачи, можно нанести эту зависимость на том же графике, что показано на рис. 3.29, б штриховой линией. Для этих построений возможно предварительно произвести нормировку, т. е. перейти от q^0 к φ и от σ_x к σ_1 , которые затем отложить по осям графика (см., например, рис. 3.23—3.26). Пересечение штриховой линии с исходным семейством кривых $q^0 = q^0(\tilde{x}, \sigma_x)$ дает вторую функциональную зависимость $\tilde{x} = f_2(\sigma_x)$.

Далее можно нанести обе полученные зависимости $\tilde{x} = f_1(\sigma_x)$ и $\tilde{x} = f_2(\sigma_x)$ на одном графике. Пересечение этих кривых и даст искомый режим, который характеризуется некоторыми значениями математического ожидания $\tilde{x}$ и среднеквадратичного значения случайной величины σ_x на входе нелинейного звена. Знание этих величин позволяет найти $\tilde{F}$ и q^0 и далее произвести расчет установившейся ошибки по формуле (3.255) и дисперсии случайной составляющей ошибки интегрированием спектральной плотности (3.263) в бесконечных пределах.

В тех случаях, когда на входе ЦАС действует не полезный сигнал $g(t)$, а помеха $v(t)$, расчет имеет следующие особенности. Вместо формулы (3.263) необходимо использовать спектральную плотность сигнала помехи в канале ошибки

$$S_{ev}^*(\lambda) = |H_e^*(j\lambda, q^0)|^2 S_v^*(\lambda), \quad (3.268)$$

где $H_e^*(j\lambda, q^0)$ по-прежнему определяется формулой (3.264), а $S_v^*(\lambda)$ — спектральная плотность помехи. Далее для расчета может быть использована формула (3.265) с заменой $S_e^*(\lambda, q^0)$ на $S_{ev}^*(\lambda, q^0)$.

Для расчета дисперсии ошибки после нахождения q^0 вместо интегрирования спектральной плотности (3.263) здесь следует использовать формулу, справедливую для случая расчета при действии на входе помехи:

$$\sigma_e^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H^*(j\lambda, q^0)|^2 S_v^*(\lambda) d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2}, \quad (3.269)$$

где частотная передаточная функция замкнутой системы

$$H^*(j\lambda, q^0) = \frac{W^*(j\lambda, q^0)}{1 + W^*(j\lambda, q^0)}. \quad (3.270)$$

Все остальные расчеты выполняются аналогично изложенному выше.

При совместном действии независимых полезного сигнала и помехи особенности расчета будут заключаться лишь в нахождении спектральной плотности сигнала в канале ошибки. Эта спектральная плотность определяется обычными способами (§ 3.6 и § 3.7), но вместо передаточной функции $W^*(j\lambda)$ должна использоваться передаточная функция $W^*(j\lambda, q^0)$.

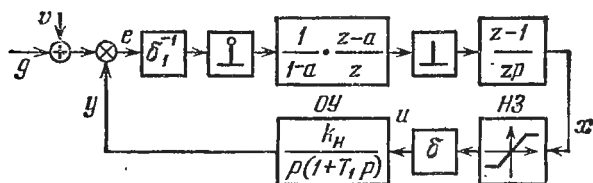


Рис. 3.30. Схема к расчетному примеру.

Пример 3.5. Рассмотрим замкнутую ЦАС, схема которой изображена на рис. 3.30. Объект управления (ОУ) представляет собой звено с передаточной функцией

$$W_H(p) = \frac{k_H}{p(1+T_1p)}.$$

Этому звену соответствует дискретная передаточная функция

$$W_0(z) = \frac{z-1}{z} \approx \left\{ \frac{k_H}{p^2(1+T_1p)} \right\} = \frac{k_H T}{z-1} - \frac{k_H T_1(1-d)}{z-d},$$

где $d = \exp(-T/T_1)$. Передаточная функция ЦВМ

$$D(z) = \frac{1}{1-a} \frac{z-a}{z} = \frac{1}{1-a} - \frac{a}{1-a} z^{-1} \quad (0 < a < 1).$$

Передаточная функция разомкнутого канала управления с учетом линеаризованных входного и выходного преобразователей

$$\begin{aligned} W(z) &= \delta_1 D(z) W_0(z) = \delta_1 \frac{1}{1-a} \frac{z-a}{z} \left[\frac{k_H T}{z-1} - \frac{k_H T_1(1-d)}{z-d} \right] = \\ &= \frac{K}{1-a} \frac{z-a}{z} \left[\frac{T}{z-1} - \frac{T_1(1-d)}{z-d} \right], \end{aligned}$$

где $K = \delta k_n \delta_1^{-1}$ — общий коэффициент усиления разомкнутого канала. Частотная передаточная функция разомкнутого канала

$$W^*(j\lambda) = \frac{\delta}{\delta_1} D^*(j\lambda) W_0^*(j\lambda) = \frac{1 + j\lambda\tau}{1 + j\lambda\frac{T}{2}} \frac{K \left(1 - j\lambda\frac{T}{2}\right)}{j\lambda(1 + j\lambda T_0)},$$

где постоянные времени

$$\tau = \frac{1 + a}{1 - a} \frac{T}{2},$$

$$T_0 = \frac{1 + d}{1 - d} \frac{T}{2} = \frac{T}{2} \operatorname{cth} \frac{T}{2T_1}.$$

Эффект квантования на входе представлен эквивалентным шумом v с дисперсией

$$D_v = \frac{i\delta_1^2}{12},$$

где i — число квантующих элементов, причем для рассматриваемой схемы $i \geq 2$. Цена единицы младшего разряда входного преобразователя δ_1 , а выходного — δ . Предполагается, что выполняются условия, при которых отсутствует шум квантования выходного преобразователя. В данном случае эти условия сводятся к требованию, чтобы $(1 - a)^{-1}$ и $a(1 - a)^{-1}$ были целыми числами.

Примем следующие исходные данные: постоянная времени $T_1 = 1$ с, общий коэффициент усиления разомкнутой системы $K = \delta k_n \delta_1^{-1} = 32$ с⁻¹, постоянная времени $\tau = 0,076$ с, период дискретности $T = 0,008$ с, коэффициент передачи непрерывной части $k_n = 16$ В⁻¹ · с⁻¹, максимальное значение скорости движения объекта управления $V_{\max} = 40$ с⁻¹ при управляющем воздействии $u_{\max} = 2,5$ В.

В рассматриваемой системе требуется найти постоянную составляющую ошибки в случае движения с постоянной скоростью $V = 32$ с⁻¹, а также среднеквадратичное значение случайной составляющей ошибки, вызванной наличием шума квантования во входных преобразователях при их числе $i = 4$ и при числе разрядов выходного преобразователя $\alpha = 2, 3$ и 4.

Шумы квантования в каждом входном преобразователе имеют равномерный закон распределения в интер-

вале $\pm 0,5\delta_1$. Композиция из четырех таких распределений имеет распределение, близкое к нормальному, что дает право воспользоваться изложенной выше методикой.

Нелинейное звено (НЗ) образовано ограничением разрядной сетки выходного преобразователя. При числе разрядов выходного преобразователя α параметры нелинейной характеристики (рис. 3.25, а) будут: $b_0 = c_0 = 2^\alpha - 1$.

Условие согласования выхода ЦВМ с объектом управления сводится к тому, чтобы при любом количестве

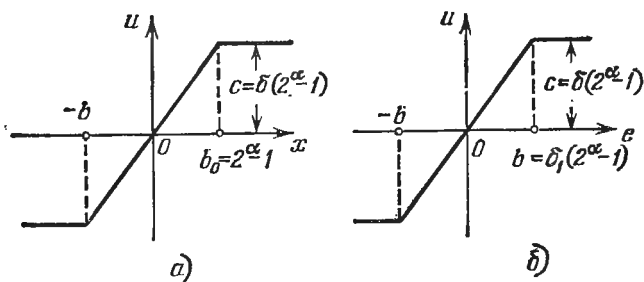


Рис. 3.31. Нелинейные характеристики к расчетному примеру.

разрядов выходного преобразователя максимальное значение управляющего воздействия, прикладываемого к объекту, было бы неизменным, т. е. $u_{\max} = \delta (2^\alpha - 1) = \text{const}$. Поэтому рассматривая нелинейную характеристику совместно со звеном, имеющим коэффициент передачи δ (рис. 3.30), можно представить ее так, как показано на рис. 3.31, а. Ширина линейной части вдоль оси абсцисс (от $-b$ до $+b$) может варьироваться изменением числа разрядов α . Ширина линейной части вдоль оси ординат оказывается жестко заданной и равной $2c = 2u_{\max}$.

Если нелинейную характеристику рассматривать совместно со звеном, имеющим коэффициент передачи δ_1^{-1} (рис. 3.30), то ее можно представить так, как это изображено на рис. 3.31, б. Так как общий коэффициент усиления канала должен быть неизменен, то это приводит к неизменности отношения

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{K}{k_n} = \frac{c}{b} = \frac{32}{16} = 2 \text{ В.}$$

Поэтому у нелинейной характеристики (рис. 3.31, б) оказываются зафиксированными величины $c = \delta(2^\alpha - 1) = 2,5$ В и $b = \delta_1(2^\alpha - 1) = 1,25$.

Варьирование числа разрядов выходного преобразователя здесь возможно только путем изменения цены единицы младшего разряда входного преобразователя. При этом пропорционально должна изменяться цена единицы младшего разряда выходного преобразователя. Предполагается, что в установившемся режиме число единиц младшего разряда на выходе ЦВМ равно числу единиц младшего разряда на входе, т. е. коэффициент передачи ЦВМ считается равным единицы.

Уменьшение цены младшего разряда входных преобразователей как следствие приводит к снижению уровня шума квантования, так как дисперсия шума пропорциональна δ_1^2 .

Цена единицы младшего разряда оказывается равной: при двух разрядах $\delta_1 = 0,417$ и $\delta = 0,835$ В, при трех разрядах $\delta_1 = 0,178$ и $\delta = 0,357$ В и при четырех разрядах $\delta_1 = 0,0834$ и $\delta = 0,167$ В.

В соответствии с изложенной выше методикой запишем требуемые для расчета формулы. Передаточная функция части канала от входа до нелинейного звена

$$W_1(z) = \frac{\delta}{\delta_1} \frac{1}{1-a} \frac{z-a}{z}.$$

Ей соответствует частотная передаточная функция

$$W_1^*(j\lambda) = \frac{\delta}{\delta_1} \frac{1 + j\lambda \tau}{1 + j\lambda \frac{T}{2}} = \frac{c}{b} \frac{1 + j\lambda \tau}{1 + j\lambda \frac{T}{2}}.$$

Установившееся значение

$$k_1 = \lim_{z \rightarrow 1} W_1(z) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} W_1^*(j\lambda) = \frac{c}{b}.$$

Передаточная функция от выхода нелинейного звена до выхода системы $W_{2н}(p)$ совпадает с передаточной функцией объекта управления. Установившееся значение

$$k_3 = \lim_{p \rightarrow 0} p W_{2н}(p) = k_{н} = 16 \text{ В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Спектральная плотность шума квантования $S_v^*(\lambda) = i\delta_1^2/12$.

Для нахождения спектральной плотности ошибки представим общий коэффициент усиления с учетом нелинейного звена в виде

$$K^0 = k_n q^0 = k_n \frac{c}{b} \Phi(\tilde{x}, \sigma_x) = k_n \frac{\delta}{\delta_1} \Phi(\tilde{x}, \sigma_x) = K \Phi(\tilde{x}, \sigma_x).$$

Здесь нормированный коэффициент передачи $\Phi(\tilde{x}, \sigma_x)$ учитывает нелинейные свойства канала управления. Спектральная плотность сигнала помехи в канале ошибки (3.268)

$$S_{ev}^*(\lambda, K^0) = |1 + W^*(j\lambda, K^0)|^{-2} S_v^*(\lambda) = \\ = \frac{i\delta_1^2}{12} \frac{(T_3^2 \lambda^4 + \lambda^2) \left(1 + \lambda^2 \frac{T^2}{4}\right)}{\left| \frac{TT_3}{2} (j\lambda)^3 + \left(T_3 + \frac{T}{2} - K^0 \frac{\tau T}{2}\right) (j\lambda)^2 + \left(1 + K^0 \tau - \frac{K^0 T}{2}\right) j\lambda + K^0 \right|^2}.$$

Спектральная плотность случайной составляющей на входе нелинейного звена

$$S_x^*(j\lambda, K^0) = S_{ev}^*(\lambda, K^0) \left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^2 \left| \frac{1 + j\lambda \tau}{1 + j\lambda \frac{T}{2}} \right|^2 = \\ = \frac{i\delta^2}{12} \frac{\tau^2 T_3^2 \lambda^6 + (\tau^2 + T_3^2) \lambda^4 + \lambda^2}{|a_0 (j\lambda)^4 + a_1 (j\lambda)^3 + a_2 (j\lambda)^2 + a_3 j\lambda + a_4|^2},$$

где

$$a_0 = \frac{T^2 T_3}{4}, \quad a_1 = TT_3 + \frac{T^2}{4} - K^0 \frac{\tau T^2}{4}, \\ a_2 = T_3 + T - \frac{K^0 T^2}{4}, \quad a_3 = 1 + K^0 \tau, \quad a_4 = K^0.$$

Расчет можно начать с определения математического ожидания величины $u = \tilde{u} + u^0 = \tilde{F} + F^0$. В соответствии с формулой (3.261)

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{g}}{k_8} = \frac{V}{k_n} = \frac{32}{16} = 2 \text{ В.}$$

Далее в соответствии с рис. 3.29, а следует построить зависимость $\tilde{x} = f_1(\sigma_x)$. Это сделано на рис. 3.32, где изображено семейство кривых $c^{-1} \hat{F}(x_1, \sigma_1)$ для линейного звена с насыщением и проведена горизонтальная прямая

на уровне $\hat{u}_0/u_{\max}=0,80$ (прямая 2). Точки пересечения прямой 2 с исходным семейством кривых дают искомую зависимость $\hat{x}=f_1(\sigma_x)$, или $\hat{x}_1=f_1(\sigma_1)$.

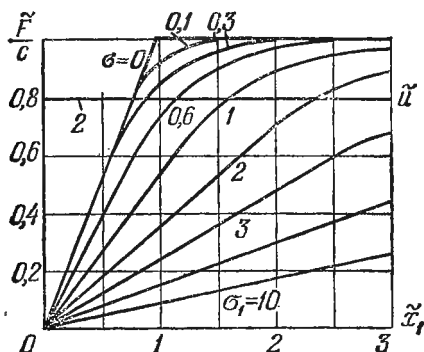


Рис. 3.32. К расчету первой зависимости $\hat{x}=f_1(\sigma_x)$.

Далее проинтегрируем спектральную плотность $S_x^*(\lambda)$ по всем частотам, что дает дисперсию

$$\sigma_x^2 \approx \frac{i\delta^2}{12} \frac{2\tau}{T} \left[1 + \frac{T}{2T_s(K^0\tau + 1)} \right] = \frac{i\delta^2}{12} \frac{2\tau}{T} \left(1 + \frac{\text{th} \frac{T}{2T_1}}{\varphi K\tau + 1} \right).$$

Нормированное значение среднеквадратичной величины

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b} = \frac{\sigma_x}{\delta(2^\alpha - 1)} = \frac{1}{2^\alpha - 1} \sqrt{\frac{i\tau}{6T} \left(1 + \frac{\text{th} \frac{T}{2T_1}}{\varphi K\tau + 1} \right)}.$$

Подстановка численных значений дает

$$\sigma_1 = \frac{2,52}{2^\alpha - 1} \sqrt{1 + \frac{0,004}{2,38\varphi + 1}}.$$

Эта зависимость построена на рис. 3.33 в виде штриховых линий для случаев $\alpha=2, 3$ и 4. На этом же графике нанесено семейство кривых $\varphi=\varphi(\sigma_1)=\varphi(\sigma_x/b)$ при фиксированных значениях $\hat{x}_1=\hat{x}/b$. Оно может быть получено перестройкой, например, графика, изображенного на рис. 3.25, г. В данном случае оно было построено следующим образом. Представим эквивалентный коэффи-

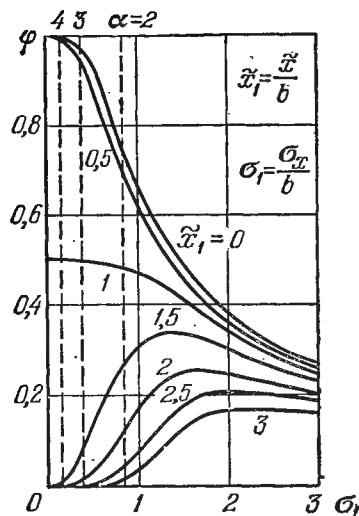


Рис. 3.33. К расчету второй зависимости $\tilde{x} = f_2(\sigma_x)$.

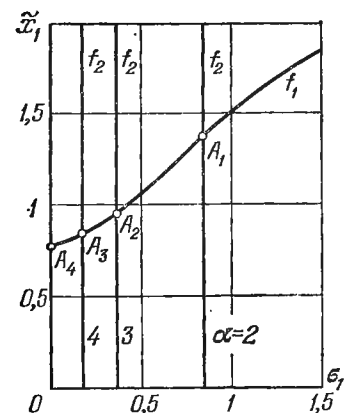


Рис. 3.34. Определение математического ожидания и дисперсии на входе нелинейного звена.

циент передачи линейного звена с насыщением в виде

$$q^0 = \frac{c}{\sigma_x} \varphi_2(\tilde{x}, \sigma_x) = \\ = \frac{c}{\sigma_x} \frac{\sigma_x}{b} \varphi(\tilde{x}, \sigma_x) = \frac{c}{b} \varphi(\tilde{x}, \sigma_x),$$

где в соответствии с формулой (3.251)

$$\varphi(\tilde{x}, \sigma_x) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{b+\tilde{x}}{\sigma_x}\right) + \Phi\left(\frac{|b-\tilde{x}|}{\sigma_x}\right) \text{sign}(b-\tilde{x}) \right].$$

Пересечение штриховых линий с исходным семейством кривых дает вторую искомую зависимость $\tilde{x} = f_2(\sigma_x)$, или $\tilde{x}_1 = f_2(\sigma_1)$.

Полученные зависимости $\tilde{x}_1 = f_1(\sigma_1)$ и $\tilde{x}_1 = f_2(\sigma_1)$ нанесены на общем графике (рис. 3.34). Они имеют точки пересечения A_1 при $\alpha=2$, A_2 при $\alpha=3$ и A_3 при $\alpha=4$. Точка A_4 соответствует бесконечному числу разрядов выходного преобразователя ($\delta_1=0$ и $\sigma_1=0$).

При $\alpha=2$ координаты точки A_1 дают: $\tilde{x}_1=1,375$, $\tilde{x} = b\tilde{x}_1 = 1,25 \cdot 1,375 = 1,58$, $\sigma_1=0,85$, $\sigma_x = 1,25 \cdot 0,85 = 1,06$. При трех разрядах получаем соответственно: $\tilde{x}_1=0,95$, $\tilde{x}=1,19$, $\sigma_1=0,36$, $\sigma_x=0,45$ — и при четырех разрядах: $\tilde{x}_1=0,85$, $\tilde{x}=1,06$, $\sigma_1=0,17$, $\sigma_x=0,213$.

По этим данным может быть произведен расчет ошибки ЦАС. Так как коэффициент передачи от входа си-

стемы до входа нелинейного звена равен единице, то полученные значения $\tilde{x}$ соответственно равны математическому ожиданию ошибки $\tilde{\epsilon}$. Таким образом, при двух разрядах $\tilde{\epsilon}=1,58$, при трех $\tilde{\epsilon}=1,19$ и при четырех $\tilde{\epsilon}=1,06$. Эти цифры полезно сравнить с ошибкой при отсутствии влияния нелинейного звена, когда $\tilde{\epsilon}=V/K=1$. Таким образом, в рассматриваемой системе шум квантования во входных преобразователях увеличивает постоянное значение ошибки при движении с постоянной скоростью тем больше, чем меньше число разрядов в выходном преобразователе.

Для расчета случайной составляющей необходимо по известным $\tilde{x}$ и σ_x определить эквивалентный коэффициент передачи q^0 или коэффициент φ . Это можно сделать, если воспользоваться приведенной выше формулой

$$\varphi = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{b + \tilde{x}}{\sigma_x} \right) + \Phi \left(\frac{|b - \tilde{x}|}{\sigma_x} \right) \operatorname{sign} (b - \tilde{x}) \right].$$

Подстановка в эту формулу полученных выше значений $\tilde{x}$ и σ_x дает для двухразрядного преобразователя $\varphi=0,375$, для трехразрядного $\varphi=0,547$ и для четырехразрядного $\varphi=0,808$.

Далее в соответствии с формулой (3.269) имеем для спектральной плотности ошибки при $K^0 = \varphi K$

$$S_e^*(\lambda, K^0) = \left| \frac{W^*(j\lambda, K^0)}{1 + W^*(j\lambda, K^0)} \right|^2 S_v^*(\lambda) =$$

$$= \frac{i\delta_1^2}{12} \frac{\varphi^2 K^2 (1 + \lambda^2 \tau^2) \left(1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4} \right)}{\left[\frac{TT_2}{2} (j\lambda)^3 + \left(T_2 + \frac{T}{2} - \varphi K \frac{\tau T}{2} \right) (j\lambda)^2 + \left(1 + \varphi K \tau - \frac{\varphi K T}{2} \right) j\lambda + \varphi K \right]^2}.$$

Интегрирование этой спектральной плотности дает среднеквадратичное значение случайной составляющей ошибки 0,77; 0,36 и 0,18 соответственно для числа разрядов 2, 3 и 4.

Следует заметить, что в рассмотренном примере не учитывалась возможность существования периодических режимов, вызываемых квантованием по уровню (см. главу 6).

§ 3.11. Системы со случайным периодом дискретности

При нежесткой программе работы ЦВМ, обслуживающей несколько каналов управления, возможен случай, когда период дискретности оказывается случайной величиной. Учет этого обстоятельства в некоторых случаях может быть необходимым.

Переменность периода дискретности означает, что система управления будет относиться к категории систем с переменными параметрами. Точное исследование подобных систем сопряжено со значительными трудностями даже при использовании вычислительной техники, так как требует, кроме знания закона распределения периода дискретности, также и сведений о статистических характеристиках, оценивающих изменение периода дискретности во времени.

Изменение периода дискретности от интервала к интервалу может быть представлено в виде случайного решетчатого процесса $T[n]$, где n представляет собой номер текущего интервала дискретности. Этому процессу могут быть поставлены в соответствие корреляционная функция и в стационарном случае — спектральная плотность. Однако последние характеристики, как правило, поддаются с трудом достоверной оценке, что вызывает необходимость отыскания приемлемых для практики методов учета случайности периода дискретности при минимальной априорной информации. В качестве такой минимальной информации может использоваться закон распределения или только сведения о первых двух моментах случайной величины.

Ниже приводятся некоторые способы определения влияния случайности периода дискретности для предельных случаев, когда период дискретности изменяется во времени сравнительно быстро и сравнительно медленно по отношению к процессам, протекающим в замкнутой ЦАС.

Рассмотрим вначале общий подход к определению устойчивости замкнутой ЦАС в предположении, что изменение периода дискретности во времени соответствует случайному стационарному процессу. В устойчивой цифровой системе ее решетчатая весовая функция должна быть затухающей. Это можно записать следующим

образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^2[n] < \infty, \quad (3.271)$$

где $h_n[n]$ — приведенная решетчатая весовая функция замкнутой системы (реакция на единичную решетчатую импульсную функцию).

Строго говоря, рассматриваемая весовая функция зависит от двух переменных, так как она соответствует системе с переменными параметрами. Одной из переменных может быть текущее время, а второй — момент приложения импульса на входе. Запись в виде (3.271) соответствует рассмотрению нормальной весовой функции [8] при приложении на входе единичного импульса в любой момент времени, который и служит началом отсчета.

Представим весовую функцию для случая некрратных корней знаменателя передаточной функции замкнутой системы в виде

$$h_n[n] = \sum_{i=0}^m C_i z_i^n, \quad (3.272)$$

где z_i — корни, C_i — постоянные коэффициенты, m — порядок разностного уравнения. Тогда формула (3.271) может быть записана в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^m C_i z_i^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^m C_i^2 z_i^{2n} + \sum_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k}}^m C_j C_k z_j^n z_k^n \right) < \infty. \quad (3.273)$$

При случайном периоде дискретности корни z_i будут также случайными величинами. Для того чтобы система была устойчивой в среднеквадратичном смысле, что определено заданием условия (3.271), потребуем выполнения неравенства (3.273) для математических ожиданий. Тогда получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^m C_i \sigma_i^{2n} + \sum_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k}}^m C_i C_k \sigma_{jk}^{2n} \right) < \infty. \quad (3.274)$$

Здесь введены обозначения для математических ожиданий:

$$\begin{aligned}\sigma_i^2 &= M \{z_i^2\} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \sigma_{jk}^2 &= M \{z_j z_k\} \quad (j, k = 1, 2, \dots, m).\end{aligned}$$

Из формулы (3.274) следует, что условие устойчивости сводится к требованию, чтобы среднеквадратичные значения корней характеристического уравнения $1 + W(z) = 0$ были бы меньше единицы, т. е. $\sigma_i < 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$). При этом условие $\sigma_{jk} < 1$ выполняется автоматически, так как $\sigma_{jk}^2 \leq \sigma_j \sigma_k$.

Однако сформулированное требование к корням может быть практически использовано для оценки устойчивости при выполнении двух условий. Первое условие сводится к тому, чтобы процессу изменения периода дискретности во времени соответствовали бы более высокие частоты по сравнению с частотами, присущими весовой функции. Только в этом случае будет происходить усреднение периода дискретности на интервале существования весовой функции. В противном случае на отдельных отрезках времени, для которых может быть характерным длительное отклонение периода дискретности от его среднего значения, возможно появление так называемой технической неустойчивости системы с большими отклонениями управляемой величины от заданного значения, хотя теоретически такая система продолжает оставаться устойчивой в смысле формулы (3.271).

Второе условие сводится к тому, чтобы определение среднеквадратичных значений корней характеристического уравнения могло бы быть сделано достаточно просто. Это, по сути дела, ограничивает практическое использование условия устойчивости элементарными случаями, когда зависимость $z_i(T)$ известна. Тогда среднеквадратичное значение может быть найдено из формулы

$$\sigma_i^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} z_i^2(T) \vartheta(T) dT \right]^{-1/2}, \quad (3.275)$$

где $\vartheta(T)$ — плотность вероятности для периода дискретности. Вычисление интеграла (3.275), как правило, бывает сопряжено со значительными трудностями и требует использования вычислительной техники.

Если период дискретности изменяется медленно по сравнению с изменением весовой функции, то рациональным здесь оказывается использование метода замороженных коэффициентов. В этом случае расчет устойчивости следует сделать для нескольких возможных значений периода дискретности, например для $T_{\max}$ и $T_{\min}$.

Практически важную задачу представляет определение влияния случайности периода дискретности на качественные показатели системы. Как и при определении устойчивости, здесь можно различать два случая. Первый случай соответствует быстрому изменению во времени периода дискретности. Тогда оценка качественных показателей может быть сделана по усредненным значениям, т. е. по их математическим ожиданиям.

Пусть, например, качество системы определяется некоторым критерием, представляющим собой функцию от периода дискретности: $I = I(T)$. Тогда, если известно выражение для плотности вероятности $\vartheta(T)$, математическое ожидание этого критерия можно найти по формуле

$$\tilde{I} = M\{I\} = \int_{-\infty}^{\infty} I(T) \vartheta(T) dT. \quad (3.276)$$

Формула (3.276) оказывается обычно слишком сложной для практических расчетов. Более простой путь заключается в следующем. Пусть период дискретности имеет математическое ожидание $M\{T\} = T_c = \text{const}$ и случайное отклонение от математического ожидания ΔT , имеющее нулевое среднее и дисперсию D_T . Тогда период дискретности будет $T = T_c + \Delta T$. Разложим функцию качества $I(T)$ в ряд Тейлора в окрестностях точки $T = T_c$:

$$I(T_c + \Delta T) = I(T_c) + \frac{\partial I}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial^2 I}{\partial T^2} \frac{(\Delta T)^2}{2} + \dots \quad (3.277)$$

Математическое ожидание критерия при ограничении тремя членами ряда

$$\tilde{I} \approx I(T_c) + \frac{\partial^2 I}{\partial T^2} \frac{D_T}{2}. \quad (3.278)$$

Формула (3.278) может использоваться для различных оценок качества (точности, запаса устойчивости, быстродействия) и, в частности, может быть применена для приближенной оценки вместо формулы (3.275). Входящая

в формулу производная должна быть вычислена для $T = T_c$.

В случае относительно медленных изменений периода дискретности во времени качественные показатели могут определяться по методу замороженных коэффициентов для некоторых значений периода, например для $T_{\max}$ и $T_{\min}$, что, как правило, приводит к более жестким требованиям для допустимых изменений периода дискретности.

Пример 3.6. Рассмотрим систему с передаточной функцией в разомкнутом состоянии

$$W(z, T) = \frac{KT}{z-1}.$$

Определим условие устойчивости и найдем показатель колебательности замкнутой системы, если $K = 1 \text{ с}^{-1}$, $T_c = 1 \text{ с}$, а плотность вероятности для периода дискретности соответствует равновероятному закону

$$\varphi(T) = \frac{1}{2\Delta} \quad (T_c - \Delta \leq T \leq T_c + \Delta)$$

с дисперсией $D_T = \Delta^2/3$.

Рассмотрим вначале случай относительно быстрых изменений периода дискретности. Характеристическое уравнение замкнутой системы $z - 1 + KT = 0$ имеет один корень $z_1 = 1 - KT$. Среднеквадратичное значение корня из (3.275)

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sqrt{\frac{1}{2\Delta} \int_{T_c - \Delta}^{T_c + \Delta} (1 - KT)^2 dT} = \\ &= \sqrt{1 - 2KT_c + K^2(T_c^2 + D_T)} \end{aligned}$$

Условие устойчивости $\sigma_1 < 1$ дает здесь

$$K < \frac{2T_c}{(T_c^2 + D_T)}.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае среднеквадратичное значение корня не зависит от функции распределения, а определяется только значениями T_c и D_T . Действительно, можем записать здесь

$$z_1^2 = (1 - KT)^2 = 1 - 2KT + K^2T^2.$$

Перейдя в левой и правой частях равенства к математическому ожиданию, имеем

$$\sigma_i^2 = M\{z_i^2\} = 1 - 2KT_c + K^2(T_c^2 + D_T),$$

что совпадает с полученным выше.

Частотная передаточная функция разомкнутой системы здесь имеет вид

$$W^*(j\lambda, T) = \frac{K \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)}{j\lambda}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика для этого примера была построена ранее (см. пример 2.3) на рис. 2.26, *а* и *б*. Из сопоставления ее с запретной областью для заданного показателя колебательности (рис. 2.27, *д*) следует, что последний для случая $KT \geq 1$ может быть определен из равенства $0,5KT = M(M+1)^{-1}$, откуда следует: $M = = KT(2 - KT)^{-1}$. Воспользовавшись формулой (3.276), имеем математическое ожидание показателя колебательности

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \int_{-\infty}^{\infty} M(T) \vartheta(T) dT = \frac{1}{2\Delta} \int_{T_c - \Delta}^{T_c + \Delta} \frac{KT}{2 - KT} dT = \\ &= -1 + \frac{1}{K\Delta} \ln \frac{2 - KT_c + K\Delta}{2 - KT_c - K\Delta} \approx \frac{K(T_c + \Delta)}{2 - K(T_c + \Delta)} - \frac{2K\Delta}{[2 - K(T_c + \Delta)]^2}. \end{aligned}$$

Использование приближенной формулы (3.278) дает здесь

$$\tilde{M} \approx \frac{KT_c}{2 - KT_c} + \frac{2K^2\Delta^2}{3(2 - KT_c)^3}.$$

Пусть, например, $\Delta = 0,5T_c = 0,5$ с. Тогда точная формула дает $\tilde{M} = 1,19$, а приближенная — $\tilde{M} = 1,16$.

Перейдем теперь к случаю медленных изменений периода дискретности. Из полученной выше формулы для z_i следует условие технической устойчивости на любом интервале времени

$$|z_i| = |KT - 1| < 1,$$

которое преобразуется к неравенству $KT < 2$. Наихудший случай, определяющий минимальное допустимое значение

общего коэффициента усиления, соответствует $T = T_{\max} = T_c + \Delta$. Тогда условие устойчивости будет

$$K < \frac{2}{T_{\max}} = \frac{2}{T_c + \Delta}.$$

Оно оказывается более жестким по сравнению с полученным выше для бесконечного интервала времени. Показатель колебательности в наихудшем случае здесь будет определяться выражением

$$M_{\max} = \frac{KT_{\max}}{2 - KT_{\max}} = \frac{K(T_c + \Delta)}{2 - K(T_c + \Delta)}.$$

Для заданных числовых значений имеем $M_{\max} = 3$, что превышает полученное выше математическое ожидание показателя колебательности.

ОПТИМАЛЬНЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ЦАС ПРИ ИЗВЕСТНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ВХОДНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

§ 4.1. Общие сведения о синтезе систем управления

В процессе разработки систем автоматического управления и регулирования приходится учитывать весьма разнообразный комплекс требований, связанных с различными их характеристиками. Эти требования можно объединить в некоторые основные группы.

К первой группе следует отнести требования, связанные со статическими и динамическими свойствами. Среди них важнейшее место занимают точностные характеристики. Они определяют ошибки, которые могут иметь место в системе управления в различных режимах. На ранних стадиях развития теории автоматического управления главенствовал детерминистский подход, когда входные воздействия, полезные и возмущающие, задавались в виде известных функций времени. При этом, конечно, нельзя было гарантировать, что в реальной системе все будет происходить подобным же образом.

Затем стал использоваться статистический подход, когда воздействия считались случайными функциями времени, но с известными их характеристиками. Для линейных систем задание корреляционных функций или спектральных плотностей воздействий позволило не только решить задачу об оценке точности рассматриваемой системы, но и спроектировать ее оптимальным образом в смысле получения экстремального (чаще всего минимального) значения некоторой оценки точности.

Такой подход вызвал появление большого числа работ, посвященных решению проблемы оптимального построения систем управления.

Были разработаны критерии качества (критерии оптимальности) в виде функционалов, которые следовало минимизировать в процессе синтеза системы. Чаще всего критерий качества задается в виде интеграла от положительно-определенных квадратичных форм для фазовых координат

системы x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и управляющих величин u_q ($q = 1, 2, \dots, k$), например, в виде

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{q,s=1}^k c_{qs} u_q u_s \right] dt, \quad (4.1)$$

где t_0 и t_1 — время начала и конца работы системы, b_{ij} и c_{qs} — некоторые весовые коэффициенты.

Функционал (4.1) содержит слагаемые двух типов. Первая сумма соответствует его точностной части, а вторая учитывает некоторым образом ограничения на возможные управляющие воздействия.

Введя функционал качества (4.1) или иного вида, можно сформулировать задачу оптимального управления. Пусть $x = \|x_i\|_{n \times 1}$ — матрица-столбец фазовых координат, а $u = \|u_q\|_{k \times 1}$ — матрица-столбец управляющих воздействий, которые принадлежат некоторому множеству $u(t) \in U$ и считаются допустимыми. Из множества допустимых управлений требуется выбрать такое, которое переводит управляемый объект из начального положения $x(t_0) = x^0$ в конечное $x(t_1) = x^1$ и минимизирует принятый функционал качества. Это управление и соответствующая ему траектория движения объекта называются оптимальными. Подобная формулировка является одной из возможных, но не единственной.

Можно, например, сформулировать задачу оптимального управления как такую задачу, когда при работе в течение длительного времени установившееся значение дисперсии ошибки минимально при заданных полезном входном воздействии и возмущениях. Возможны формулировки понятия оптимальности на основе минимизации времени переходного процесса, минимизации потребления энергии и т. п.

Появление оптимальных методов проектирования характерно не только для области автоматического управления и регулирования. Эти методы находят в настоящее время использование практически во всех областях науки, техники, экономики. Однако достигнутые успехи в части построения оптимальных систем автоматического управления пока еще относительно скромны и в ряде случаев они имеют иногда методическое, а не практическое значение. Это обусловлено рядом факторов.

Во-первых, решение задачи оптимизации требует знания априорной информации о воздействиях в системе в смысле знания их статистических характеристик (корреляционных функций, спектральных плотностей или иных эквивалентных исходных данных). Здесь положение оказывается иногда не лучше по сравнению с тем периодом, когда рассматривались детерминированные входные воздействия. Принимаемые в процессе синтеза статистические характеристики воздействий могут значительно отличаться от характеристик реальных воздействий в процессе работы системы. Специалисты, занимающиеся разработкой методов оптимизации систем управления, недостаточно интересовались изучением и накоплением опыта по характеристикам входных воздействий, а принимали их заданными и в том виде, который был удобен для дальнейшего использования. Такой подход не мог способствовать практическому внедрению полученных результатов. Поэтому использование многих методов оптимального синтеза может быть осуществлено только в тех случаях, когда есть уверенность в том, что принимаемые в расчете статистические характеристики сигналов близки к действительным.

Во-вторых, в приведенном выше функционале качества (4.1) и подобных ему иных формах часто требуется знание весовых коэффициентов. И опять сложилось такое положение, что специалисты, занимающиеся оптимизацией систем управления, относительно мало интересовались проблемой задания весовых коэффициентов, считая, что инженер, проектирующий систему, сам может это сделать. Однако это действительно стало во многих случаях проблемой, путей решения которой часто не видно.

Вообще задание условия точности работы системы управления в виде некоторого функционала оказалось малопримемым для большинства практических случаев. В то же время обычно не представляет труда сформулировать требования по точности для систем автоматического управления практически любого типа в виде максимальных или среднеквадратичных допустимых ошибок в различных режимах работы. Это позволяет не только найти решение задачи синтеза системы, но и в большинстве случаев правильно сформулировать требования к ее отдельным элементам. Необоснованное же задание весовых коэффициентов функционала качества (4.1) делает все решение задачи оптималь-

ного построения системы управления также необоснованным и в этом случае неприемлемым для практики.

В настоящее время только некоторые задачи оптимального синтеза систем управления с точки зрения их точностных свойств имеют более или менее строгое и обоснованное решение. К таким задачам следует отнести, например, получение максимального быстродействия по принципу максимума Л. С. Понтрягина, оптимальные фильтры Н. Винера [16, 149] и Р. Калмана [106, 147, 148] при условии точного знания априорной информации о статистических характеристиках входных воздействий. Однако для многих практических задач построения систем автоматического управления и регулирования теория оптимальных решений еще не находит хорошего использования, что объясняется сравнительно низким уровнем, на котором пока находится развитие этой теории.

В свете сказанного следует подчеркнуть, что в настоящее время и в ближайшем обозримом будущем одной из основных форм задания точности систем управления и регулирования остается задание допустимых ошибок (максимальных, среднеквадратичных и др.). Это не исключает использования оптимальных методов в отдельных случаях, когда существуют достаточно надежные исходные данные по входным воздействиям и требуемым критериям качества. Вероятно, со временем, по мере накопления статистики, круг задач, имеющих оптимальное решение, будет непрерывно расширяться.

При задании максимальных или среднеквадратичных допустимых ошибок системы управления необходимо ясное представление о тех режимах работы системы, для которых задаются эти ошибки. Попытки использовать типовые режимы в виде заданных функций времени или в виде случайных функций времени с известными статистическими характеристиками, как уже отмечалось выше, часто мало пригодны для практики, так как в большинстве случаев достоверная априорная информация отсутствует. Лишь для некоторых частных случаев, например при работе системы стабилизации на качающемся корабле, при работе системы управления под действием помехи типа белого шума, возможно более или менее точно установить статистические характеристики входных воздействий.

Во многих случаях синтеза систем управления и регулирования целесообразно отказаться от методов, базирую-

щихся на знании полной априорной информации о воздействиях в системе, и ориентироваться на задание лишь самых общих сведений об этих воздействиях, т. е. ориентироваться на минимальную априорную информацию.

Обычно известны сведения о максимальных или среднеквадратичных возможных воздействиях, максимальных или среднеквадратичных значениях их первых производных (например, максимальных скоростях слежения), максимальных или среднеквадратичных значениях их вторых производных (например, максимальных ускорениях слежения) и т. п. Сами же статистические характеристики воздействий, как правило, являются неопределенными. Задача синтеза при этом ставится так, чтобы при любых статистических характеристиках входных воздействий (иногда — при статистических характеристиках, занимающих некоторую возможную область) система управления имела бы максимальные или среднеквадратичные ошибки не более заданных, если максимальные или среднеквадратичные значения воздействий или их производных не превышают заданных значений. Такое решение задачи построения системы управления или регулирования мы будем называть в дальнейшем *синтезом при неизвестных статистических характеристиках входных воздействий*.

Так как действительные законы движения системы остаются неопределенными, то требования по точности должны в этом случае дополняться требованиями по другим динамическим качествам системы. Действительно, если, например, система имеет максимальную ошибку не более заданной, но движение системы сопровождается слабо затухающими и непрерывно генерируемыми высокочастотными колебаниями, то такая система может оказаться непригодной для практического использования. Это заставляет использовать некоторые вспомогательные оценки, или критерии, качества. К ним в первую очередь следует отнести оценки запаса устойчивости, определяемого по близости системы к колебательной границе устойчивости.

Запас устойчивости может оцениваться различными способами: по переходной характеристике и величине перерегулирования, по амплитудной частотной характеристике и показателю колебательности, по запасу устойчивости по фазе и амплитуде и др. Выбор того или иного способа не имеет принципиального значения, так как все они в конце

концов приводят к цели. Более важным здесь является удобство принятого критерия с точки зрения его практического использования. Иногда могут дополнительно привлекаться оценки быстродействия системы, определяемого по скорости протекания процессов или по ширине полосы пропускания частот замкнутой системой. Не следует считать, что всегда следует стремиться к увеличению быстродействия. Известны многие случаи, когда целесообразно снижение быстродействия. Это требование возникает, например, в системах, использующих оптические источники информации (астровизеры, оптические координаторы и др.), когда приходится накладывать жесткие требования на ограничение скорости изменения ошибки слежения, в системах, подверженных воздействию шумовых помех, и т. п.

Могут использоваться и другие качественные оценки динамических свойств системы, например динамические диапазоны работы (диапазон рабочих скоростей входных воздействий), плавность работы следящих систем на низких «ползучих» скоростях, генерация системой высших гармоник (имеется в виду гармонический состав ошибки системы при работе, например, по синусоидальному закону), способность сохранять свои динамические характеристики при технологических разбросах параметров управляемых объектов (требования по грубости системы управления) и т. п.

Полное решение задач, относящихся к первой группе требований, мы будем называть в дальнейшем *динамическим синтезом системы управления*.

Ко второй группе относятся требования, связанные с надежностью работы системы управления, ее устойчивостью к влиянию внешних воздействий (климатических, механических, химических) и способностью сохранять свои характеристики в течение заданного промежутка времени. Сюда относятся в первую очередь такие требования, как вероятность безотказной работы, интервал рабочих температур, вибростойкость и вибропрочность, ресурс, требуемое время и условия хранения и т. п.

К третьей группе относятся требования, связанные с характером эксплуатации системы управления. Сюда относятся условия обслуживания системы в процессе ее работы, квалификация обслуживающего персонала, возможность ре-

монта и восстановления, периодичность производства проверок и т. д.

К четвертой группе относятся требования, связанные с допустимым весом и габаритами системы и допустимым потреблением энергии. Кроме общего уровня мощности потребления часто важным является вид энергии (постоянный или переменный ток, пневмопитание), а также стабильность источников питания.

К пятой группе относятся требования, связанные с технологичностью изготовления системы управления. Сюда могут относиться такие требования, как необходимость использования уже освоенных или унифицированных элементов и узлов, простота сборочных и регулировочных операций, экономические показатели и т. п.

К шестой группе относятся требования, связанные с общей ситуацией, имеющей место при проектировании. Сюда относятся требования патентной новизны и чистоты, необходимость использования имеющихся научных, конструкторских и производственных заделов, наличие сложившихся исследовательских и конструкторских кадров и др.

Из этого сравнительно беглого рассмотрения видно, что в процессе проектирования системы управления необходимо учитывать весьма большой круг технических требований. Эти требования могут вступать в противоречие друг с другом. В принципе возможно построение оптимальной системы управления, когда из этих частных требований формируется единый критерий качества системы, экстремальное значение которого будет соответствовать оптимальному построению системы. Однако современное состояние теории оптимизации не позволяет надеяться, что эта задача получит строгое и обоснованное решение в ближайшие годы.

Для того чтобы решение задачи динамического синтеза системы автоматического управления или регулирования (выполнение требований первой группы) не вступало бы в противоречие с требованиями остальных групп или, по крайней мере, для ослабления этих противоречий, целесообразно стремиться к простейшему решению задачи динамического синтеза.

Понятие *простоты построения системы* требует определения. Возможны различные подходы [8, 120]. Может,

например, использоваться *критерий простоты* системы [7, 8] в виде функционала, рассматриваемого в частотной области:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2r} |W(j\omega)|^2 d\omega, \quad (4.2)$$

где r — степень астатизма синтезируемой системы, $W(j\omega)$ — ее частотная передаточная функция в разомкнутом состоянии.

В статических системах ($r = 0$) значение (4.2) совпадает с эквивалентной полосой пропускания разомкнутой системы, что разъясняет физическую сущность этого функционала. Чем меньше требуется полоса пропускания разомкнутой системы при выполнении всех требований первой группы (точность, запас устойчивости и т. п.) в замкнутом состоянии, тем проще реализация этой системы. Это объясняется снижением требований к отдельным элементам в части допустимых постоянных времени, запаздываний, быстродействия используемой ЦВМ и др.

Для дискретных систем функционал (4.2) полезно преобразовать для использования в нем псевдочастоты (см. § 2.6). Тогда он приобретает вид

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^{2r} |W^*(j\lambda)|^2}{\left(1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4}\right)^{2r}} d\lambda, \quad (4.3)$$

где $\lambda = 2T^{-1} \operatorname{tg} 0,5\omega T$ — псевдочастота, T — период дискретности, $W^*(j\lambda)$ — дискретная частотная передаточная функция разомкнутой системы.

Динамический синтез при условии минимизации функционалов (4.2) или (4.3) можно назвать *оптимальным синтезом по заданным качественным показателям*. Рассмотренные ниже, в главе 5, методы решения задачи динамического синтеза в такой постановке не даются строго, а носят скорее эвристический характер в части выполнения условия минимизации функционалов (4.2) и (4.3). Однако общая тенденция нахождения простейшего решения задачи динамического синтеза сохраняется, что делает это решение часто предпочтительным для целей практики.

§ 4.2. Критерии качества и методы синтеза

При известных статистических характеристиках входных сигналов естественна постановка вопроса об оптимальном синтезе системы управления. Такая постановка может быть сделана и при неизвестных характеристиках, однако при этом неизбежно существенное усложнение всей системы за счет необходимости использования дополнительных устройств экспресс-анализа входной информации, идентификации, адаптации и т. п.

При оптимальном синтезе цифровых систем управления могут использоваться различные критерии качества, которые и определяют понятие оптимальности системы. Одним из наиболее очевидных критериев может служить величина дисперсии ошибки, либо среднеквадратичное значение ошибки системы, которая должна воспроизводить задающее воздействие $g(t)$, представляющее собой регулярную или случайную функцию времени, при наличии помех на входе или в канале управления.

Согласно этому критерию нежелательность ошибки пропорциональна квадрату ее величины. Такая постановка часто является логичной, однако она не может претендовать на универсальность. В некоторых случаях, например при стрельбе по какой-либо цели, все ошибки, большие определенного значения, одинаково нежелательны. Однако средний квадрат (дисперсия) ошибки системы управления

$$\overline{e^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^2(t) dt \quad (4.4)$$

практически во всех случаях сравнительно просто вычисляется, что и определило использование этого критерия. Из (4.4) следует, что при таком подходе никаких ограничений на время переходного процесса не накладывается. Это значит, что решение задачи ищется в классе систем с «бесконечной памятью». Возможна и другая постановка задачи, когда время переходного процесса ограничивается некоторой величиной $t_{\text{пер}}$, что соответствует случаю синтеза системы с «конечной памятью» [7, 26, 120].

Применительно к дискретным системам формула (4.4) должна быть трансформирована. Если рассматривать решетчатую функцию времени, представляющую собой ошибку

системы, то формула (4.4) должна быть записана следующим образом:

$$\bar{e}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N e^2[n], \quad (4.5)$$

где n — дискретное время.

Для систем управления, содержащих непрерывный объект управления, более строга формула, дающая усреднение не только по значениям дискрет в моменты времени $t = nT$, но и предусматривающая усреднение между отдельными дискретами. Для этого должна рассматриваться смещенная решетчатая функция $e[n, \varepsilon]$ с последующим интегрированием по всем смещениям $0 \leq \varepsilon < 1$:

$$\bar{e}^2 = \int_0^1 \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N e^2[n, \varepsilon] \right) d\varepsilon. \quad (4.6)$$

Однако в подавляющем большинстве случаев расчеты по формулам (4.5) и (4.6) практически совпадают, что позволяет ограничиться формулой (4.5). Для выполнения этого достаточно, чтобы период дискретности был малым по сравнению с временем переходного процесса непрерывной части.

Задачу построения оптимальной системы по критериям (4.5) и (4.6) можно сформулировать различным образом. Наиболее просто это можно сделать так. Если имеется какая-то система автоматического управления заданной структуры, то необходимо так выбрать все параметры, которые могут варьироваться, чтобы получить минимум дисперсии ошибки при заданных статистических характеристиках полезного сигнала (задающего воздействия) и помехи.

При этом предполагается, конечно, что статистические характеристики входных сигналов известны достаточно точно и эти характеристики достоверны. Если это не выдерживается, то оптимизация теряет свой смысл.

Сформулированная задача решается следующим образом. При известной структуре системы управления по спектральной плотности ошибки путем ее интегрирования (см. § 3.6) находится дисперсия ошибки. Дисперсия получается зависящей от вероятностных характеристик полезного сигнала и помехи и от параметров системы. Затем

ищутся условия, которые должны быть наложены на параметры системы, чтобы получить минимум дисперсии. При достаточно простом выражении для дисперсии это может быть сделано непосредственным ее дифференцированием и приравниванием нулю частных производных.

В более сложных случаях могут применяться расчеты на ЭВМ. Задачи поиска минимума некоторого функционала в настоящее время сравнительно хорошо проработаны, и уже имеется большое количество типовых программ поиска.

Использование фильтров Винера. Другая постановка задачи при расчете по критерию минимума дисперсии ошибки заключается в том, что ставится вопрос о нахождении оптимальной структуры и значений параметров системы автоматического управления, при которых обеспечивается получение теоретического минимума среднеквадратичной ошибки при заданных вероятностных характеристиках полезного сигнала (задающего воздействия) $g(t)$ и помехи $v(t)$. Эта задача будет решена, если найти, например, частотную передаточную функцию замкнутой системы $H(j\omega)$ для непрерывной системы или $H^*(j\lambda)$ для дискретной системы (рис. 4.1). Передаточной функции $H(j\omega)$ может быть поставлена в соответствие передаточная функция $H(p)$, а передаточной функции $H^*(j\lambda)$ — функция $H(z)$. Задача относится к категории вариационных задач в открытой области, т. е. без ограничений на фазовые координаты системы и управляющие воздействия.

Для решения этой задачи требуется знание статистических характеристик полезного входного сигнала (задающего воздействия) и помехи на входе системы (или помехи, пересчитанной на вход системы). При этом предполагается, что на систему управления заранее не налагается никаких ограничений в смысле обязательного использования реальных элементов (чувствительных элементов, усилителей, исполнительных элементов и др.) с заданными характеристиками.

Запишем критерий оптимальности в задаче Н. Винера. При поступлении на вход системы аддитивной смеси полезного сигнала и помехи (рис. 4.1)

$$r(t) = u(t) + v(t), \quad (4.7)$$

представляющих собой стационарные случайные функции с нулевыми математическими ожиданиями и известными

корреляционными функциями, требуется найти частотную передаточную функцию замкнутой системы $H(j\omega)$ или ей соответствующую физически реализуемую весовую функцию $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)]$, осуществляющую требуемое линейное преобразование входного сигнала

$$g(t) = H_0(p) u(t), \quad (4.8)$$

где $H_0(p)$ — заданный линейный оператор, и обеспечивающую минимум дисперсии ошибки (4.4):

$$M[e^2(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^2(t) dt.$$

Если $H_0(p) = 1$, то это будет задача оптимального сглаживания, т. е. выделения сигнала $g(t) = u(t)$ из аддитивной смеси полезного сигнала и помехи. При равенстве помехи нулю решение задачи сглаживания имеет тривиальный вид: $H(p) = 1$.

В задачах оптимального статистического упреждения $H_0(p) = e^{p\tau_0}$, где τ_0 — время упреждения. Решение получается нетривиальным даже в случае от-

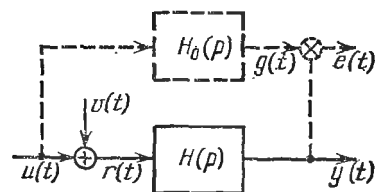


Рис. 4.1. Оптимальный фильтр Винера

сутствия помехи. В задачах дифференцирования сигнала при наличии помех заданный линейный оператор имеет вид $H_0(p) = p^k$, где k — порядок отыскиваемой производной.

После нахождения оптимальной передаточной функции $H(j\omega)$ или $H^*(j\lambda)$ конструктор должен попытаться реализовать ее посредством использования тех элементов, которыми он располагает и из которых должна быть построена система управления. Так как в большинстве практических случаев точное воспроизведение оптимальной передаточной функции оказывается невозможным, то приходится использовать квазиоптимальную, или субоптимальную, систему, более или менее близко совпадающую по своим параметрам с оптимальной.

Задача винеровской фильтрации может быть решена и для многомерного случая, когда рассматриваются матрицы-столбцы величин $u(t)$, $v(t)$ и $g(t)$. Схему, изображенную на

рис. 4.1, следует тогда рассматривать как многомерную. В качестве критерия оптимальности здесь принимается минимум математического ожидания $M[e'Ge]$, где G — любая положительно-определенная матрица, а e — матрица-столбец ошибок. В этом случае минимизируется и каждая составляющая $e(t)$.

Использование фильтров Калмана. Эти фильтры в литературе также называются *фильтрами Калмана — Бьюси* [106, 147, 148]. В отличие от задачи Винера, для задания случайного входного полезного сигнала (задающего воздействия) здесь используется формирующий фильтр (ФФ) (рис. 4.2), представляющий собой некоторую динамическую

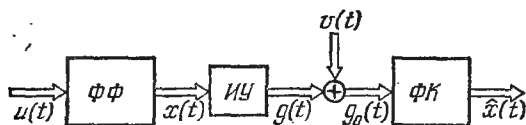


Рис. 4.2. Оптимальный фильтр Калмана.

систему, описываемую линейными дифференциальными уравнениями в общем случае с переменными коэффициентами и возбуждаемую многомерным белым шумом $u(t)$ с гауссовским распределением. На рис. 4.2 это показано для непрерывного случая.

Формирующий фильтр, возбуждаемый белым шумом, представляет собой модель входного процесса системы управления (систему-аналог). Состояние этой модели в каждый момент времени определяется совокупностью переменных состояния $x(t)$, число которых обуславливается видом входного сигнала, т. е. его корреляционной функцией или спектральной плотностью. Определение состояния системы-аналога производится измерительным устройством (ИУ), которое на своем выходе дает совокупность входных сигналов системы управления $g(t)$, т. е. многомерный входной сигнал, искаженный аддитивной помехой $v(t)$, представляющей собой многомерный белый шум с гауссовым распределением. В дискретном варианте задачи Р. Калмана входные и выходные величины формирующего фильтра рассматриваются в дискретные моменты времени $t = kT$, где k — целое число, а T — период дискретности. В этом случае

модель входного сигнала описывается системой линейных разностных уравнений.

Требуется построить динамическую систему — фильтр Калмана (ΦK), которая дает наилучшую оценку многомерной величины $x(t)$ в виде совокупности выходных величин фильтра $\hat{x}(t)$. Далее из этой совокупности могут формироваться линейным образом выходные величины систем управления $y(t) = \|y_i(t)\|$.

К оценке $\hat{x}(t)$ предъявляется требование несмещенности, т. е. ее математическое ожидание

$$M[\hat{x}(t)] = M[x(t)], \quad t \geq t_0. \quad (4.9)$$

Выражение (4.9) записывается также в другом виде. При заданных измерениях величины $x(t)$ от момента t_0 до момента t оценка $\hat{x}(t_1/t)$ в некоторый момент времени t_1 должна обладать свойством

$$M[\hat{x}(t_1/t)] = M[x(t_1)]. \quad (4.10)$$

Кроме того, накладывается условие минимума дисперсии ошибки оценки, которое записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} M[\varepsilon' \Gamma \varepsilon] &= \min, \\ \varepsilon(t_1/t) &= x(t_1) - \hat{x}(t_1/t), \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

где Γ — любая положительно-определенная матрица. Матричное произведение $\varepsilon' \Gamma \varepsilon$ представляет собой квадратичную форму с весовой матрицей Γ . Выражение (4.11) означает, что оценка $\hat{x}(t_1/t)$ величины $x(t_1)$ удовлетворяет условию минимума дисперсии ошибки каждой из составляющих совокупности величин $x(t_1)$.

При использовании фильтров Калмана возможны следующие случаи.

1. Для непрерывных систем решается задача оптимальной фильтрации, т. е. задача выделения полезного сигнала из аддитивной смеси полезного сигнала и помехи. В этом случае фильтр Калмана дает оценку совокупности переменных $x(t)$, начиная с некоторого момента времени t_0 , в виде первоначального грубого приближения $\hat{x}(t_0)$, которое тем точнее, чем больше имеется априорных сведений о совокупности $x(t_0)$. Далее с течением времени эта оценка улучшается и постоянно приближается к теоретически достижимой.

мому значению, которое уже не зависит от априорных сведений о значении $x(t_0)$, а определяется свойствами формирующего фильтра и помехами измерительного устройства.

В установившемся состоянии фильтр Калмана совпадает с фильтром Винера и дает то же значение оценки.

2. В дискретных системах возможна постановка задачи оптимального определения оценки $\hat{x}[k]$ для времени $t = kT$ по данным измерений входного сигнала в n временных точках от $t = (k - n)T$ до $t = (k - 1)T$, т. е. задачи оптимального предсказания на один (или несколько) такт вперед. Эта задача имеет смысл и в случае равенства нулю помех измерительного устройства.

3. В дискретных системах возможна также постановка задачи оптимальной фильтрации, т. е. задачи определения оценки $\hat{x}[k]$ по данным n предыдущих измерений, включая и момент времени $t = kT$. Эта задача может быть решена в случае наличия конфликтной ситуации, даваемой помехами измерений.

Применительно к цифровым системам автоматического управления и регулирования необходимо отметить следующее. В цифровой системе управления, как правило, измерение входного сигнала в момент времени $t = kT$ не дает возможности откорректировать ее выходную величину в этот же момент времени, так как реакция непрерывной части системы (ее приведенная весовая функция) на входной сигнал в этот же момент времени равна нулю ($w_n[0] = 0$) и она не может быть не равной нулю. Поэтому выходная величина системы в момент времени $t = kT$ может быть определена только в результате прогнозирования по результатам предыдущих измерений.

Указанная выше вторая задача, решаемая фильтрами Калмана, имеет очевидное практическое значение для цифровых автоматических систем. Однако следует заметить, что во многих случаях период дискретности цифровой системы управления приходится выбирать по различным соображениям (устойчивости, возможности потери входной информации и др.) сравнительно малым (тысячные и сотые доли секунды). Сама же непрерывная часть системы управления может содержать экстраполяторы, хорошо прогнозирующие требуемый выходной процесс. Такими экстраполяторами могут быть интеграторы различного вида и сами объекты управления. Поэтому задача оптимального прогнозирования на

такт вперед в некоторых случаях теряет свой смысл и может привести к неправильным решениям конкретной технической задачи. Однако прогнозирование на несколько тактов вперед обычно не теряет своего смысла и при малых периодах дискретности. Но в этом случае оно практически совпадает со случаем прогнозирования в непрерывных системах.

Третья задача, решаемая фильтром Калмана, имеет большие возможности, так как предполагает нахождение оптимального решения задачи построения системы управления при одновременном действии полезного сигнала и помехи. Ограничения в использовании фильтров Калмана для построения цифровых систем управления определяются следующими обстоятельствами.

1. Построение фильтра Калмана предполагает полные априорные сведения о структуре формирующего фильтра, т. е. полные априорные сведения о статистических свойствах входного сигнала и полные сведения о действующих помехах. Если эти сведения малодостоверны, то оптимизация теряет здесь смысл либо следует идти по пути значительного усложнения системы за счет использования принципов адаптации.

2. Использование фильтров Калмана предполагает отсутствие ограничений на структуру оптимальной системы. Поэтому переход от требуемой теоретической структуры к реальной структуре системы управления, содержащей те или иные заданные элементы, может значительно ухудшить результаты. Эти ограничения обычно не сказываются в тех случаях, когда вся система выработки оценки многомерной величины $x(t)$ строится, например, на ЦВМ и не включает в себя заданных заранее элементов системы управления.

3. При построении фильтра Калмана предполагается, как это будет показано ниже, что для обработки может быть использовано n предыдущих значений входных сигналов, где n — порядок разностного уравнения, описывающего формирующий фильтр (рис. 4.2). В реальных условиях работы цифровой системы управления можно использовать для обработки большее число предыдущих входных сигналов, что позволяет существенно снизить влияние помех измерения входных сигналов и получить результаты, лучшие по сравнению с фильтром Калмана.

Использование реальных фильтров. В некоторых случаях построения систем управления входной сигнал задан своими

характеристиками, но помехи отсутствуют или они сравнительно малы, в результате чего построение оптимальной системы в смысле Винера или Калмана теряет смысл. Это не означает, однако, что реальная система управления может быть построена со сколь угодно малой дисперсией ошибки. В идеализированном случае винеровского или калмановского фильтра на проектируемую систему не накладывается никаких предварительных ограничений. Увеличение общего коэффициента с целью повышения точности воспроизведения полезного сигнала здесь ограничивается возрастанием ошибки за счет увеличения пропуска помех, действующих на входе. Это и создает конфликтную ситуацию.

В реальных системах помехи во входном сигнале могут и отсутствовать, но увеличение общего коэффициента усиления в этом случае ограничивается приближением к колебательной границе устойчивости, которое вызывает рост ошибки за счет увеличения колебательности системы. Максимальные достижимые коэффициенты усиления в этом случае будут определяться наличием в реальной системе некоторой совокупности звеньев с малыми постоянными времени, влияние которых уже не может быть скомпенсировано.

В этом смысле наличие совокупности звеньев, характеризующее суммой их постоянных времени или результирующим временным запаздыванием, эквивалентно по конечному результату действию на входе некоторой помехи. И в том и в другом случаях максимальная точность системы оказывается ограниченной, а дисперсия ошибки не может быть сделана меньше некоторого предельного значения.

Оценка минимальной суммы постоянных времени или суммарного временного запаздывания в проектируемой системе может быть сделана достаточно опытным конструктором при выборе ее элементов. При этом, конечно, конструктор может влиять на эту сумму в сторону ее уменьшения. Однако это может быть связано с переходом к более совершенным и дорогим элементам. Поэтому эта сумма может быть всегда оценена для данной конкретной ситуации и она зависит от уровня развития используемой техники.

Учет влияния малых постоянных времени накладывает на проектируемую систему некоторые ограничения, которых обычно нет при решении задачи оптимального синтеза. Эти ограничения в принципе могут быть учтены в виде неко-

торого эквивалентного шума. Поясним это простейшим примером. Пусть полезный сигнал на входе $g(t)$ имеет спектральную плотность для производной $\dot{g}(t)$ в виде

$$S_1(\omega) = \frac{2T_1 D_1}{1 + \omega^2 T_1^2}, \quad (4.12)$$

где D_1 — дисперсия первой производной, а T_1 — некоторая постоянная времени, и спектральную плотность помехи на входе $S_v(\omega) = N$, соответствующую белому шуму. Пусть отыскивается оптимальное значение общего коэффициента усиления $K \gg T_1^{-1}$ системы, имеющей передаточную функцию в разомкнутом состоянии вида

$$W(p) = \frac{K}{p}. \quad (4.13)$$

При отсутствии взаимной корреляции между полезным сигналом и помехой дисперсия ошибки

$$\begin{aligned} M[e^2] = \overline{e^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2T_1 D_1 d\omega}{(1 + \omega^2 T_1^2)(K^2 + \omega^2)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K^2 N d\omega}{K^2 + \omega^2} = \\ &= \frac{T_1 D_1}{K(1 + K T_1)} + \frac{KN}{2} \approx \frac{D_1}{K^2} + \frac{KN}{2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Дифференцирование (4.14) по коэффициенту усиления и приравнивание производной нулю дает условие минимума дисперсии ошибки

$$K = \sqrt[3]{\frac{4D_1}{N}}. \quad (4.15)$$

Подстановка (4.15) в (4.14) дает минимальное значение дисперсии ошибки, соответствующее оптимальному значению общего коэффициента усиления:

$$\overline{e_{\min}^2} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{D_1 N^2}{2}}. \quad (4.16)$$

Пусть теперь решается задача оптимального выбора коэффициента усиления при том же полезном входном сигнале и при отсутствии помехи, но при условии, что передаточная функция разомкнутой системы может иметь вид

$$W(p) = \frac{K e^{-p\tau}}{p}, \quad (4.17)$$

где τ — суммарное временное запаздывание, которое не может быть устранено в системе управления при выбранных

элементах. Такое суммарное временное запаздывание может быть введено, например, при наличии нескольких апериодических звеньев с малыми постоянными времени. Дисперсия ошибки в этом случае

$$\overline{e^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2T_1 D_1 d\omega}{|1 + j\omega T_1|^2 |K e^{j\omega\tau} + j\omega|^2}. \quad (4.18)$$

Интеграл (4.18) не берется элементарным образом. Приближенное его вычисление дает

$$\overline{e^2} \approx \frac{T_1 D_1}{K(1 + KT_1) \left(1 - \frac{\pi}{2} K\tau\right)} \approx \frac{D_1}{K^2 \left(1 - \frac{\pi}{2} K\tau\right)}. \quad (4.19)$$

Минимум дисперсии ошибки будет при выполнении условия

$$K = \frac{4}{3\pi\tau}. \quad (4.20)$$

Подстановка этого значения коэффициента усиления в (4.19) дает минимальную дисперсию ошибки

$$\overline{e^2}_{\min} = \frac{27}{16} \pi^2 \tau^2 D_1. \quad (4.21)$$

Приравнивание (4.16) и (4.21) позволяет определить уровень эквивалентного белого шума

$$N_{\text{экв}} = \frac{27}{16} \pi^3 \tau^3 D_1, \quad (4.22)$$

который по своему действию приводит к такому же эффекту, как и влияние неустраняемого временного запаздывания.

Возможны, конечно, более сложные ситуации, когда, кроме наличия в системе некоторых малых параметров, на входе системы действуют реальные помехи. И в этом случае в принципе можно найти эквивалентную помеху, учитывающую наличие двух этих факторов. Однако подобный путь приводит к значительному усложнению расчетов. Поэтому эквивалентность малых постоянных времени по своему конечному действию входному шуму в системе управления имеет лишь некоторый познавательный интерес. Сама же задача синтеза системы управления в этом случае может более просто решаться на основе разработанных в настоящее время инженерных методов, предполагающих

использование типовых передаточных функций, типовых переходных характеристик, типовых логарифмических частотных характеристик и т. п.

Таким образом, при построении реальных фильтров, представляющих собой системы автоматического управления, работающие как при наличии помех на входе, так и при их отсутствии, структура их должна соответствовать изображенной на рис. 4.3. На вход системы поступает аддитивная смесь полезного сигнала $u(t)$ и помехи $v(t)$ либо только

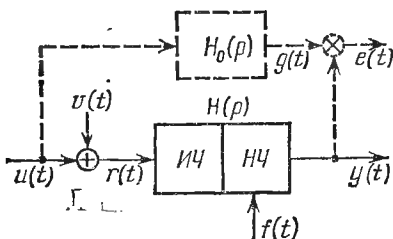


Рис. 4.3. Реальный одномерный фильтр.

полезный сигнал. Полезный сигнал может быть регулярной функцией времени, стационарным случайным процессом или нестационарным процессом. Помехи, как правило, представляются в виде случайного стационарного процесса с нулевым средним значением. Кроме того,

на систему может действовать возмущение $f(t)$ или несколько возмущений, приложенных к различным точкам объекта.

Линейный оператор $H_0(p)$ формирует из процесса $u(t)$ задающее воздействие $g(t)$, которое и должно воспроизводиться на выходе системы управления с передаточной функцией $H(p)$. Система управления должна состоять из неизменяемой части (ИЧ), в качестве которой может рассматриваться, например, совокупность некоторых звеньев с малыми постоянными времени или звено временного запаздывания, и изменяемой части (НЧ), по отношению к которой имеется свобода выбора в части ее передаточной функции.

Таким образом, здесь приходится иметь дело с полужесткой структурой системы управления. Заметим, что сформулированное выше понятие неизменяемой части системы несколько отличается от обычно используемого в литературе, когда под неизменяемой частью просто понимается объект управления с его передаточной функцией. Дело в том, что применение различных корректирующих средств (последовательного типа, параллельного типа, обратных связей) позволяет активно влиять на передаточную функцию объекта, меняя ее нужным образом. Однако это может делаться только

до некоторого предела, который характеризуется минимальными значениями «остаточных» постоянных времени или временных запаздываний, которыми располагает конструктор. Поэтому неизменяемая часть системы определяется здесь в этом смысле.

При построении реальных фильтров возможны следующие случаи.

1. При условии задания характеристик полезного сигнала, помехи, возмущений и неизменяемой части системы требуется найти передаточную функцию системы управления $H(p)$, при которой обеспечивается выполнение требований по точности, определяемых по среднеквадратичной ошибке, максимальной ошибке, наиболее вероятной ошибке или иным образом, и выполняются другие требования к системе, сформулированные в § 4.1.

Задача может облегчаться, если отсутствуют помехи на входе, либо отсутствуют возмущения, приложенные к объекту управления, либо отсутствует и то и другое. Однако она не становится при этом тривиальной.

2. При условии задания характеристик полезного сигнала, помехи, возмущений и неизменяемой части системы требуется определить передаточную функцию системы управления, при которой выполняется условие минимизации дисперсии ошибки $M[e^2]$, что соответствует построению оптимальной системы.

Следует обратить внимание на то, что построение реальных фильтров представляет значительно более трудную задачу, чем построение, например, фильтра Винера. В этом можно убедиться, сравнив рис. 4.1 и рис. 4.3. Кроме того, выполнение первой сформулированной выше задачи часто оказывается более сложным, чем построение оптимальной системы. Дело заключается в том, что оптимальная система для имеющихся исходных данных всегда может быть построена и трудности нахождения оптимальной передаточной функции $H(p)$ относятся к чисто математическим. Использование в настоящее время ЭВМ в значительной степени снимает эти трудности. Поэтому задача оптимизации системы управления, например, по минимуму дисперсии ошибки в некоторых случаях приобретает сейчас тривиальный характер.

В то же время задача построения системы с требуемой точностью при имеющихся исходных данных может и не

иметь решения. Если же решить эту задачу все же необходимо, то возможно, что придется решать попутно целый комплекс сложнейших проблем, связанных с переходом к более совершенным элементам системы управления, получением дополнительной информации о входных сигналах системы, например, по первой, второй и более высоким производным задающего воздействия, переходом к более совершенным средствам переработки информации и т. п.

Поэтому первая сформулированная выше задача не теряет своей актуальности, несмотря на развитие теории

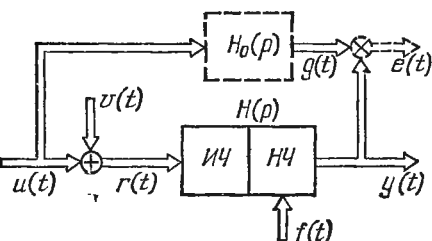


Рис. 4.4. Реальный многомерный фильтр.

изображена на рис. 4.4. На схеме показаны матрицы-столбцы полезных входных воздействий $u(t)$, помех $v(t)$, задающих воздействий $g(t)$, возмущающих воздействий $f(t)$, управляемых величин $y(t)$ и ошибки $e(t)$, а также матрицы передаточных функций $H(p)$ и $H_0(p)$.

Все приведенные выше соображения по построению непрерывных систем управления на основе использования реальных фильтров практически сохраняют свое значение и для цифровых систем управления с учетом их особенностей — квантования по времени и квантования по уровню.

§ 4.3. Основы теории фильтров Винера

Как уже отмечалось, задача построения оптимального фильтра Винера (рис. 4.1) относится к категории вариационных задач в открытой области. Уравнение Винера — Хопфа, определяющее оптимальное значение весовой функции замкнутой системы $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)]$, может быть

оптимальных систем, и, более того, она оказывает сейчас наиболее активное влияние на развитие техники автоматического управления.

При переходе к многомерным системам управления задача построения реальных фильтров сохраняет свое значение. Структурная схема для этого случая

представлено в следующей форме:

$$\begin{aligned} K_{gr}(\tau) &= \int_0^{\infty} h(\eta) K_r(\tau - \eta) d\eta = \\ &= \int_0^{\infty} h(\tau - \eta) K_r(\eta) d\eta, \quad 0 < \tau < \infty, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где корреляционная функция суммарного входного сигнала $r(t) = u(t) + v(t)$ может быть записана в виде

$$\begin{aligned} K_r(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T r(t + \tau) r(t) dt = \\ &= K_u(\tau) + K_v(\tau) + K_{vu}(\tau) + K_{uv}(\tau). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Взаимная корреляционная функция желаемого выходного сигнала, т. е. задающего воздействия $g(t)$, изображение которого определяется изображением полезного входного сигнала $u(t)$ в виде $G(p) = H_0(p)U(p)$, и суммарного входного сигнала $r(t)$ здесь принята в виде

$$K_{gr}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(t + \tau) r(t) dt = K_{gu}(\tau) + K_{gv}(\tau). \quad (4.25)$$

В формуле (4.24) использованы корреляционные функции полезного входного сигнала $K_u(\tau)$, помехи $K_v(\tau)$ и взаимные корреляционные функции полезного сигнала и помехи $K_{uv}(\tau)$ и $K_{vu}(\tau)$. Этим функциям соответствуют спектральные плотности $S_u(\omega)$, $S_v(\omega)$, $S_{uv}(\omega)$ и $S_{vu}(\omega)$, связанные с ними преобразованиями Фурье.

В формуле (4.25) использованы взаимные корреляционные функции полезного сигнала и желаемого значения управляемой величины $K_{gu}(\tau)$, а также помехи и желаемого значения управляемой величины $K_{gv}(\tau)$. Им соответствуют спектральные плотности $S_{gu}(\omega)$ и $S_{gv}(\omega)$. На основании рис. 4.1 можно записать следующие равенства:

$$S_{gu}(\omega) = H_0(j\omega) S_u(\omega), \quad (4.26)$$

$$S_{gv}(\omega) = 0. \quad (4.27)$$

В частном случае, когда рассматривается задача оптимальной фильтрации, $H_0(p) = 1$. Тогда $S_{gu}(\omega) = S_u(\omega) =$

$= S_g(\omega)$. В задаче предсказания $H_0(p) = e^{p\tau_0}$ и $H_0(j\omega) = e^{j\omega\tau_0}$, где τ_0 — время предсказания. Тогда $S_{gu}(\omega) = S_u(\omega) \exp(j\omega\tau_0)$.

Перейдем к решению уравнения Винера — Хопфа (4.23). Если корреляционная функция $K_r(\tau)$ соответствовала бы идеальному белому шуму, т. е. выполнялось бы условие $K_r(\tau) = \delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ — единичная дельта-функция, то решение (4.23) было бы элементарным:

$$h(\tau) = \begin{cases} K_{gr}(\tau), & \tau \geq 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

Корреляционной функции $\delta(\tau)$ соответствует (см. таблицу 3.1) спектральная плотность $S(\omega) = 1$. Необходи-

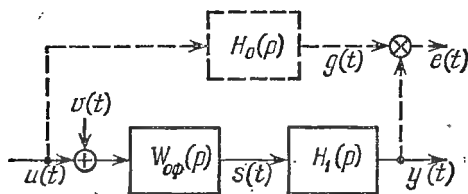


Рис. 4.5. Схема использования отбеливающего фильтра.

димое условие можно выполнить, пропустив смесь $r(t) = u(t) + v(t)$ через отбеливающий (декоррелирующий) фильтр (рис. 4.5), выбранный так, чтобы для его передаточной функции выполнялось условие

$$|W_{\text{оф}}(j\omega)|^2 S_r(\omega) = 1. \quad (4.29)$$

Представим спектральную плотность $S_r(\omega)$ в виде произведения сопряженных комплексных величин:

$$S_r(\omega) = \Psi(j\omega) \Psi(-j\omega). \quad (4.30)$$

Из формул (4.29) и (4.30) может быть найдена передаточная функция отбеливающего фильтра

$$W_{\text{оф}}(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)}. \quad (4.31)$$

Полюсы и нули сомножителя $\Psi(j\omega)$ полезно выбрать так, чтобы они лежали в верхней полуплоскости вели-

чины ω (в левой полуплоскости величины $p = j\omega$), т. е. положить $\Psi(j\omega) = [S_r(\omega)]^+$, где индекс «плюс» указывает на такой выбор полюсов и нулей $\Psi(j\omega)$. Тогда получим, что полюсы и нули второго сомножителя будут находиться в нижней полуплоскости (или, соответственно, в правой полуплоскости величины $p = j\omega$), т. е. $\Psi^*(j\omega) = \Psi(-j\omega) = [S_r(\omega)]^-$. Отбеливающий фильтр с передаточной функцией (4.31) будет при этом наиболее просто реализуемым и он будет соответствовать устойчивому звену.

Пусть, например, спектральная плотность имеет вид

$$S_r(\omega) = \frac{A(1 + \omega^2 T_1^2)}{(1 + \omega^2 T_2^2)(1 + \omega^2 T_3^2)}.$$

Представим ее в виде произведения комплексно-сопряженных величин:

$$S_r(\omega) = \frac{\sqrt{A}(1 + j\omega T_1)}{(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)} \frac{\sqrt{A}(1 - j\omega T_1)}{(1 - j\omega T_2)(1 - j\omega T_3)} = \Psi(j\omega) \Psi(-j\omega).$$

Отсюда следует, что

$$\Psi(j\omega) = \frac{\sqrt{A}(1 + j\omega T_1)}{(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)}.$$

Передаточная функция отбеливающего фильтра

$$W_{\text{оф}}(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)} = \frac{(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)}{\sqrt{A}(1 + j\omega T_1)}.$$

Так как мы рассматриваем теперь суммарный сигнал $s(t)$ на выходе отбеливающего фильтра вместо смеси $r(t)$, то уравнение Винера — Хопфа (4.23) должно быть записано в другом виде (рис. 4.5):

$$K_{gs}(\tau) = \int_0^{\infty} h_1(\eta) \delta(\tau - \eta) d\eta, \quad (4.32)$$

где весовая функция

$$h_1(\tau) = \begin{cases} K_{gs}(\tau), & 0 < \tau < \infty, \\ 0, & \tau < 0, \end{cases} \quad (4.33)$$

соответствует оптимальной передаточной функции $H_1(p)$.

Корреляционной функции $K_{gs}(\tau)$ соответствует спектральная плотность, которая может быть найдена на осно-

вании формулы, определяющей взаимную корреляционную функцию входной и выходной величин динамического звена с известной передаточной функцией:

$$S_{gs}(\omega) = W_{\text{оф}}(-j\omega) S_{gr}(\omega) = \frac{S_{gr}(\omega)}{\Psi(-j\omega)}. \quad (4.34)$$

Для получения оптимальной передаточной функции $H_1(j\omega)$, которая связана с весовой функцией $h_1(\tau)$ преобразованием Фурье:

$$H_1(j\omega) = \int_0^{\infty} h_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (4.35)$$

следует представить спектральную плотность (4.34), являющуюся преобразованием Фурье соответствующей корреляционной функции

$$S_{gs}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{gs}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (4.36)$$

в виде суммы

$$S_{gs}(\omega) = [S_{gs}(\omega)]_+ + [S_{gs}(\omega)]_-. \quad (4.37)$$

Здесь первое слагаемое соответствует полюсам спектральной плотности, лежащим в верхней полуплоскости аргумента ω (или в левой полуплоскости аргумента $p = j\omega$), второе — в нижней полуплоскости аргумента ω (правой полуплоскости аргумента $p = j\omega$). Первое слагаемое соответствует реализуемой части системы, т. е. процессу для положительного времени (выполнению условия физической реализуемости). Таким образом, частотная передаточная функция физически реализуемого фильтра

$$H_1(j\omega) = [S_{gs}(\omega)]_+. \quad (4.38)$$

Для того чтобы найти оптимальную передаточную функцию системы для схемы, изображенной на рис. 4.1, следует умножить определяемую формулой (4.38) передаточную функцию на передаточную функцию отбеливающего фильтра (рис. 4.5). В результате имеем искомую частотную передаточную функцию

$$H(j\omega) = \frac{[S_{gs}(\omega)]_+}{\Psi(j\omega)} = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \left[\frac{S_{gr}(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]_+ = \frac{B(j\omega)}{\Psi(j\omega)}. \quad (4.39)$$

Функция $B(j\omega)$ определяется следующим образом. Если $S_{gr}(\omega)$ есть отношение двух полиномов по степеням $j\omega$, то можно записать

$$\frac{S_{gr}(\omega)}{\Psi(-j\omega)} = F(j\omega) + \sum_{i=1}^q \frac{a_i}{j\omega + \alpha_i} + \sum_{i=1}^q \frac{b_i}{-j\omega + \beta_i}, \quad (4.40)$$

где $F(j\omega)$ — некоторый полином. Первая сумма содержит все члены, соответствующие левой половине p -плоскости (включая ось $j\omega$), а вторая сумма — все члены, соответствующие полюсам в правой половине p -плоскости. В этом разложении реализуемая часть определяется суммой

$$B(j\omega) = F(j\omega) + \sum_{i=1}^q \frac{a_i}{j\omega + \alpha_i}. \quad (4.41)$$

Формулы (4.39) — (4.41) позволяют определить оптимальную частотную передаточную функцию замкнутой системы $H(j\omega)$, от которой можно перейти к оптимальной передаточной функции $H(p)$ подстановкой $j\omega = p$.

Системы с белым шумом на входе. Во многих практических случаях помеха на входе представляется в виде белого шума со спектральной плотностью $S_v(\omega) = N$ при отсутствии корреляции с полезным сигналом, т. е. при $S_{vu}(\omega) = S_{uv}(\omega) = 0$.

Тогда спектральная плотность смеси $r(t) = u(t) + v(t)$

$$S_r(\omega) = S_u(\omega) + N. \quad (4.42)$$

Отсюда

$$\frac{1}{W_{\text{оф}}(j\omega)} = \Psi(j\omega) = [S_u(\omega) + N]^+. \quad (4.43)$$

Примем, кроме того, что $H_0(p) = 1$ и $g(t) = u(t)$. Тогда оптимальная передаточная функция

$$H(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \left[\frac{S_g(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]_+ = \frac{1}{[S_g(\omega) + N]^+} \left\{ \frac{S_g(\omega)}{[S_g(\omega) + N]^-} \right\}_+, \quad (4.44)$$

или

$$H(j\omega) = \frac{1}{[S_g(\omega) + N]^+} \left\{ \frac{S_g(\omega) + N}{[S_g(\omega) + N]^-} - \frac{N}{[S_g(\omega) + N]^-} \right\}_+. \quad (4.45)$$

Первый член в скобках есть $[S_g(\omega) + N]^+$. Поэтому

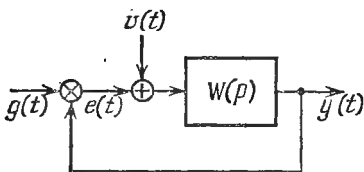
$$\begin{aligned} H(j\omega) &= 1 - \frac{1}{[S_g(\omega) + N]^+} \left\{ \frac{N}{[S_g(\omega) + N]^+} \right\}_+ = \\ &= 1 - \frac{\sqrt{N}}{[S_g(\omega) + N]^+} \left\{ \frac{\sqrt{N}}{[S_g(\omega) + N]^+} \right\}_+. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Далее можно показать, что член в фигурных скобках (4.46) равен единице [16]. Поэтому в результате имеем

$$H(j\omega) = 1 - \frac{\sqrt{N}}{[S_g(\omega) + N]^+}. \quad (4.47)$$

Последняя формула может применяться для нахождения оптимальной передаточной функции в рассматриваемом случае.

Передаточная функция разомкнутой системы. Так как в системах управления при $H_0(p) = 1$, как правило, используется единичная главная обратная связь, то структурная схема, изображенная на рис. 4.1, может быть приведена к виду, показанному на рис. 4.6. Передаточная функция разомкнутой системы



$$W(p) = \frac{H(p)}{1 - H(p)} \quad (4.48)$$

или

$$W(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{1 - H(j\omega)}. \quad (4.49)$$

Рис. 4.6. Оптимальный фильтр с единичной главной обратной связью.

Для случая, когда помеха представляет собой белый шум, из (4.47) имеем

$$W(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \{ [S_g(\omega) + N]^+ - \sqrt{N} \}. \quad (4.50)$$

Из последней формулы видно, что $W(j\omega)$ имеет полюсы, совпадающие с полюсами $\Psi(j\omega)$, и, следовательно, является устойчивым реализуемым фильтром. Эти полюсы суть полюсы спектра полезного сигнала, расположенные в левой полуплоскости (в том числе полюсы, лежащие на оси $j\omega$). Таким образом, если спектр полезного сообщения может быть представлен в виде

$$S_g(\omega) = c \left| \frac{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2 + \dots + b_{n-1} (j\omega)^{n-1}}{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 + \dots + a_n (j\omega)^n} \right|^2, \quad (4.51)$$

то схема оптимальной системы с единичной обратной связью будет иметь вид, изображенный на рис. 4.7. Эта схема носит название канонической. Передаточная функция разомкнутой системы при этом

$$W(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{c_0 + c_1 j\omega + c_2 (j\omega)^2 + \dots + c_{n-1} (j\omega)^{n-1}}{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 + \dots + a_n (j\omega)^n}. \quad (4.52)$$

Нетрудно показать, что степень числителя (4.52) всегда на единицу меньше степени знаменателя вне зависимости от присутствия соответствующей степени $j\omega$ в числителе (4.51).

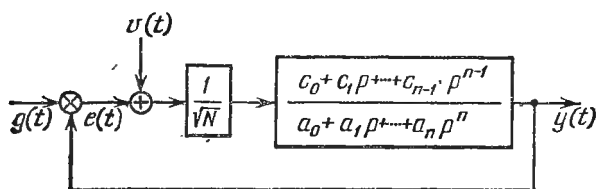


Рис. 4.7. Каноническая схема оптимального фильтра.

Задача нахождения оптимальной передаточной функции в этом случае сводится к нахождению числителя (4.52), что, однако, не уменьшает требуемого объема вычислений.

Пример 4.1. Рассмотрим нахождение оптимальной передаточной функции в системе с единичной главной обратной связью при $H_0(p) = 1$ для случая, когда полезный сигнал представляет собой типовой входной процесс следящей системы со спектральной плотностью

$$S_u(\omega) = \dot{S}_g(\omega) = \frac{2D_1 T_1}{\omega^2 (1 + \omega^2 T_1^2)},$$

где D_1 — дисперсия входной скорости, а помеха — белый шум со спектральной плотностью $S_v(\omega) = N$. Взаимная корреляция между сигналами отсутствует. Для этого случая имеем

$$\begin{aligned} S_r(\omega) &= S_g(\omega) + S_v(\omega) = \frac{2D_1 T_1 + N\omega^2 + NT_1^2 \omega^4}{\omega^2 (1 + \omega^2 T_1^2)} = \\ &= 2D_1 T_1 \frac{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)(1 - j\omega\tau_1)(1 - j\omega\tau_2)}{j\omega(1 + j\omega T_1)(-j\omega)(1 - j\omega T_1)}, \end{aligned}$$

где

$$\tau_1 \tau_2 = \sqrt{\frac{NT_1}{2D_1}}, \quad \tau_1 + \tau_2 = \sqrt{\frac{N}{2D_1 T_1} + 2} \sqrt{\frac{NT_1}{2D_1}}.$$

Выделим множитель

$$\Psi(j\omega) = [S_g(\omega) + N]^+ = \frac{\sqrt{2D_1 T_1} (1 + j\omega\tau_1) (1 + j\omega\tau_2)}{j\omega (1 + j\omega T_1)}.$$

В соответствии с формулой (4.47) передаточная функция замкнутой системы

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= 1 - \frac{\sqrt{N}}{[S_g(j\omega) + N]^+} = 1 - \frac{j\omega (1 + j\omega T_1) \sqrt{N}}{(1 + j\omega\tau_1) (1 + j\omega\tau_2) \sqrt{2D_1 T_1}} = \\ &= \frac{1 + j\omega \left(\tau_1 + \tau_2 - \sqrt{\frac{N}{2D_1 T_1}} \right)}{(1 + j\omega\tau_1) (1 + j\omega\tau_2)} = \frac{1 + j\omega\tau_3}{(1 + j\omega\tau_1) (1 + j\omega\tau_2)}, \end{aligned}$$

где

$$\tau_3 = T_1 (\sqrt{a^2 + 2a} - a), \quad a = \sqrt{\frac{N}{2D_1 T_1^3}}.$$

Далее можно найти передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{1 - H(j\omega)} = \frac{K (1 + j\omega\tau_3)}{j\omega (1 + j\omega T_1)},$$

где общий коэффициент усиления разомкнутой системы

$$K = \frac{1}{T_1 a} = \sqrt{\frac{2D_1 T_1}{N}}.$$

Анализ последней зависимости раскрывает физическую сущность выбора общего коэффициента усиления, который должен быть тем больше, чем больше дисперсия скорости входного сигнала и чем меньше уровень белого шума. При этом величина общего коэффициента усиления пропорциональна корню квадратному из их отношения.

Ошибки в оптимальных системах. Для исходной схемы (рис. 4.1) можно записать дисперсию ошибки в виде

$$\begin{aligned} \bar{e}_{\min}^2 &= M[e^2(t)] = M\{[g(t) - y(t)]^2\} = \\ &= M\left\{\left[g(t) - \int_0^t h(t - \tau) r(\tau) d\tau\right]^2\right\}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Если в последней формуле использовать равенство (4.23), то получим для стационарного случая

$$M[e^2(t)] = K_g(0) - \int_0^{\infty} h(\tau) K_{gr}(\tau) d\tau. \quad (4.54)$$

Так как при $\tau < 0$ весовая функция $h(\tau) = 0$, то нижний предел интегрирования в (4.54) можно заменить на $-\infty$. Кроме того, для оптимальной частотной передаточной функции замкнутой системы можно записать

$$H(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \int_0^{\infty} K_{gs}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (4.55)$$

где

$$K_{gs}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{gr}(\omega)}{\Psi(-j\omega)} e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (4.56)$$

Подстановка обратного преобразования (4.55) в формулу (4.54) дает

$$\begin{aligned} \overline{e^2}_{\min} &= K_g(0) - \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} K_{gr}(\tau) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega \frac{1}{\Psi(j\omega)} \int_0^{\infty} K_{gs}(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau = \\ &= K_g(0) - \int_0^{\infty} K_{gs}(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} d\omega \frac{1}{\Psi(j\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} K_{gr}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \right] dt. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Выражение в квадратных скобках равно $K_{gs}(t)$. Поэтому дисперсия ошибки может быть представлена в виде

$$\overline{e^2}_{\min} = K_g(0) - \int_0^{\infty} K_{gs}^2(\tau) d\tau = D_g - \int_0^{\infty} K_{gs}^2(\tau) d\tau, \quad (4.58)$$

где D_g — дисперсия задающего воздействия $g(t)$.

Формула (4.58) может быть представлена в другом виде, если использовать спектральные плотности сигналов. Первое слагаемое в формуле (4.58)

$$D_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) d\omega. \quad (4.59)$$

Второе слагаемое

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} K_{gs}^2(\tau) d\tau &= \int_0^{\infty} K_{gs}(\tau) d\tau \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{gr}(\omega)}{\Psi(-j\omega)} e^{j\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{gr}(\omega)}{\Psi(-j\omega)} d\omega \int_0^{\infty} K_{gs}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_r(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (4.60)$$

где

$$S_r(\omega) = S_u(\omega) + S_v(\omega) + S_{uv}(\omega) + S_{vu}(\omega).$$

Таким образом, расчетная формула для определения дисперсии ошибки по спектральным плотностям приобретает вид

$$\overline{e^2}_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_r(\omega) d\omega. \quad (4.61)$$

При учете формулы (4.39), из которой следует зависимость

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{|B(j\omega)|^2}{|\Psi(j\omega)|^2} = \frac{|B(j\omega)|^2}{S_r(\omega)},$$

выражение (4.61) можно привести к виду

$$\overline{e^2}_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |B(j\omega)|^2 d\omega. \quad (4.62)$$

Однако формулы (4.58) и (4.61) оказываются мало-пригодными в тех случаях, когда задающее воздействие $g(t)$ соответствует нестационарному процессу с неограниченно возрастающей дисперсией. Это может быть, например, при рассмотрении задающего воздействия, представляющего собой типовой входной сигнал следящей системы [8]. При этом наличие в следящей системе астатизма приводит к стационарности и конечности дисперсии ошибки системы. Преобразуем для этого случая формулу (4.61), ограничиваясь условием $H_0(p) = 1$, а также отсутствием

корреляционных связей между полезным сигналом $g(t) = u(t)$ и помехой $v(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{e}^2_{\min} = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - |H(j\omega)|^2] S_g(\omega) d\omega - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_v(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Выражение в квадратных скобках в соответствии с изложенным выше должно содержать множитель ω^{2l} , совпадающий с таким же делителем, содержащимся в спектральной плотности $S_g(\omega)$. Поэтому интегрирование выражения, находящегося под знаком первого интеграла (4.63), не дает расходящегося результата, что соответствует конечности дисперсии ошибки системы.

Формулу (4.63) можно записать в другом виде. На основании § 3.6 при отсутствии корреляции между полезным сигналом и помехой дисперсия ошибки определяется выражением

$$\begin{aligned} \bar{e}^2_{\min} = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |1 - H(j\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_v(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Формулы (4.63) и (4.64) являются адекватными и могут одинаково использоваться.

Пример 4.2. Определим минимальное значение дисперсии ошибки системы управления для условий примера 4.1. Воспользуемся формулой расчета ошибки (4.64). Предварительно определим квадраты модулей, входящие в подынтегральные выражения:

$$\begin{aligned} |1 - H(j\omega)|^2 &= \left| \frac{1}{1 + W(j\omega)} \right|^2 = \frac{\omega^2 (1 + \omega^2 T_1^2)}{K^2 (1 + \omega^2 \tau_1^2) (1 + \omega^2 \tau_2^2)}, \\ |H(j\omega)|^2 &= \left| \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} \right|^2 = \frac{1 + \omega^2 \tau_2^2}{(1 + \omega^2 \tau_1^2) (1 + \omega^2 \tau_2^2)}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в формуле (4.64)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |1 - H(j\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2D_1 T_1 d\omega}{K^2 (1 + \omega^2 \tau_1^2) (1 + \omega^2 \tau_2^2)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2D_1 T_1 d\omega}{K^2 |\tau_1 \tau_2 (j\omega)^2 + (\tau_1 + \tau_2) j\omega + 1|^2} = \frac{D_1 T_1}{K^2 (\tau_1 + \tau_2)}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_v(\omega) d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N (1 + \omega^2 \tau_3^2) d\omega}{(1 + \omega^2 \tau_1^2) (1 + \omega^2 \tau_2^2)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N (1 + \omega^2 \tau_3^2) d\omega}{|\tau_1 \tau_2 (j\omega)^2 + (\tau_1 + \tau_2) j\omega + 1|^2} = \frac{N (\tau_3^2 + \tau_1 \tau_2)}{2\tau_1 \tau_2 (\tau_1 + \tau_2)}. \end{aligned}$$

Суммарная дисперсия ошибки оптимальной системы

$$\begin{aligned} \bar{e}_{\min}^2 &= \frac{D_1 T_1}{K^2 (\tau_1 + \tau_2)} + \frac{N (\tau_3^2 + \tau_1 \tau_2)}{2\tau_1 \tau_2 (\tau_1 + \tau_2)} = \\ &= \frac{N}{T_1} \left[\sqrt{1 + \sqrt{\frac{8D_1 T_1^3}{N}}} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Дисперсия может быть сделана равной нулю при $D_1 \rightarrow 0$ (неподвижное положение), при $T_1 \rightarrow 0$ (бесконечно малые перемещения на входе) и при $N \rightarrow 0$ (отсутствие помех).

Прогнозирование. В тех случаях, когда требуется воспроизведение полезного сигнала $u(t)$ с упреждением, т. е. при $g(t) = u(t + \tau_0)$, оператор преобразования (рис. 4.1) будет $H_0(p) = e^{p\tau_0}$. Тогда формула (4.39) для оптимальной передаточной функции может быть представлена в виде

$$H(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \left[\frac{S_{gr}(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]_+ = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \left\{ \frac{S_u(\omega) e^{j\omega\tau_0}}{\Psi(-j\omega)} \right\}_+, \quad (4.65)$$

где $\Psi(j\omega)$ определяется равенством (4.30). Для отыскания реализуемой части выражения в фигурных скобках (4.65) следует воспользоваться обратным преобразованием Фурье

$$h_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{S_u(\omega) e^{j\omega(t + \tau_0)}}{\Psi(-j\omega)} \right\}_+ d\omega. \quad (4.66)$$

Если $h_{1n}(t)$ есть искомое обратное преобразование Фурье при отсутствии предсказания ($\tau_0 = 0$), то на основании теоремы сдвига

$$h_1(t) = h_{1n}(t + \tau_0). \quad (4.67)$$

Аналогичным образом для весовой функции оптимального фильтра можно записать при наличии предсказания

$$h(t) = h_n(t + \tau_0), \quad (4.68)$$

где $h_n(t)$ — весовая функция при отсутствии предсказания.

На основании теории дифференциальных уравнений значения переменных состояния стационарного фильтра $x(t + \tau_0) = \|x_1(t + \tau_0) \ x_2(t + \tau_0) \ \dots \ x_n(t + \tau_0)\|'$ в момент времени $t + \tau_0$ можно вычислить через переменные состояния $x(t) = \|x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)\|'$ в момент времени t и фундаментальную матрицу $\Phi(\tau_0)$, называемую также переходной матрицей, в виде $x(t + \tau_0) = \Phi(\tau_0) x(t)$, где

$$\Phi(\tau_0) = \begin{vmatrix} \Phi_{11}(\tau_0) & \Phi_{12}(\tau_0) & \dots & \Phi_{1n}(\tau_0) \\ \Phi_{21}(\tau_0) & \Phi_{22}(\tau_0) & \dots & \Phi_{2n}(\tau_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{n1}(\tau_0) & \Phi_{n2}(\tau_0) & \dots & \Phi_{nn}(\tau_0) \end{vmatrix}. \quad (4.69)$$

Фундаментальная матрица описывается тем же уравнением, что и рассматриваемый фильтр, но без правой части, при единичных начальных условиях. Операторный метод нахождения ее приведен ниже, в § 4.5.

В общем случае отыскания R выходных величин фильтра $y(t + \tau_0) = \|y_1(t + \tau_0) \ \dots \ y_R(t + \tau_0)\|'$ матричное уравнение, определяющее эти величины, будет иметь вид

$$y(t + \tau_0) = C\Phi(\tau_0) x(t), \quad (4.70)$$

где $C = \|c_{ij}\|$ — прямоугольная матрица коэффициентов размером $R \times n$. Характеристическое уравнение для фундаментальной матрицы в соответствии с (4.39) и (4.40) должно иметь вид

$$\prod_{i=1}^{q_1} (p + \alpha_i) \cdot \prod_{k=1}^{q_2} (p + \gamma_k) = 0,$$

где α_i ($i = 1, 2, \dots, q_1$) — полюсы функции $B(p)$, а γ_k ($k = 1, 2, \dots, q_2$) — нули функции $\Psi(p)$.

Схема прогнозирующего устройства может быть изображена так, как показано на рис. 4.8. В результате прохождения смеси $r(t)$ через фильтр с весовой функцией $h_n(t)$, которой соответствует передаточная функция $H_n(j\omega)$, вырабатывается совокупность переменных состояния $x(t)$. Далее прохождение этой совокупности через фильтр, образованный фундаментальной матрицей, дает прогнозируемую совокупность переменных состояния $x(t + \tau_0)$. После умножения последней на матрицу коэффициентов $C = \|c_{ij}\|$ вырабатываются прогнозируемые значения выходных величин $y(t + \tau_0)$. Может прогнозироваться одна величина. Тогда матрица коэффициентов C будет иметь размер $1 \times n$.

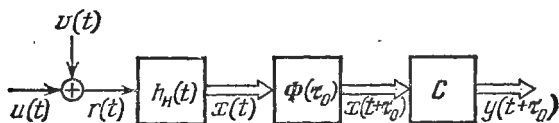


Рис. 4.8. Оптимальный фильтр с прогнозированием.

В частном случае, когда помехи отсутствуют, оптимальная передаточная функция

$$H_n(j\omega) = \frac{\Psi(j\omega)}{\Psi(j\omega)} = \frac{\Psi_1(j\omega)}{\Psi_2(j\omega)} \frac{\Psi_2(j\omega)}{\Psi_1(j\omega)} = 1. \quad (4.71)$$

Здесь принято, что $\Psi(j\omega) = \Psi_1(j\omega) \Psi_2^{-1}(j\omega)$. Весовая функция оптимального фильтра для этого случая $h_n(t) = \delta(t)$.

Фундаментальной матрице соответствует характеристическое уравнение (4.70), куда входят нули и полюсы функции $\Psi(p)$. Поэтому оно может быть записано здесь в виде

$$\Psi_1(p) \Psi_2(p) = 0. \quad (4.72)$$

В качестве переменных состояния удобно принять входной сигнал $x(t)$ и его производные, число которых определяется порядком характеристического уравнения (4.72).

Если прогнозирование производится на фиксированное время τ_0 , то фундаментальная матрица (4.69) представляет собой совокупность постоянных коэффициентов. Если необходимо произвести в быстром темпе просмотр будущих значений прогнозируемой величины, то фундамен-

тальная матрица реализуется в виде фильтра, протекание процессов в котором после выставки начальных условий $x(0) = \|x_i(0)\|_{n \times 1}$ должно определяться фундаментальной матрицей $\Phi(m\tau_0)$, где $m > 1$ — масштаб времени. Этот фильтр должен соответствовать дифференциальному уравнению $\Psi_1\left(\frac{p}{m}\right)\Psi_2\left(\frac{p}{m}\right) = 0$ с возможностью введения начальных условий.

Ошибка прогнозирования может быть получена из (4.58). Так как имеет место равенство $K_{gs}(\tau) = h_1(\tau)$, то для случая прогнозирования формула (4.58) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \bar{e}_{\min}^2 &= K_g(0) - \int_0^{\infty} [h_{1n}(\tau - \tau_0)]^2 d\tau = \\ &= K_g(0) - \int_{\tau_0}^{\infty} [h_{1n}(\tau)]^2 d\tau. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Формулу (4.73) можно привести к относительному виду

$$\bar{\eta}_{\min}^2 = \frac{\bar{e}_{\min}^2}{K_g(0)} = 1 - \frac{1}{K_g(0)} \int_{\tau_0}^{\infty} [h_{1n}(\tau)]^2 d\tau. \quad (4.74)$$

Ошибка оказывается минимальной при $\tau_0 = 0$. При $\tau_0 \rightarrow \infty$ относительная ошибка будет стремиться к единице. При отсутствии помех

$$\bar{\eta}_{\min}^2 = 1 - \frac{1}{K_g(0)} \int_{\tau_0}^{\infty} [\psi(\tau)]^2 d\tau, \quad (4.75)$$

где $\psi(\tau)$ — обратное изображение Фурье передаточной функции $\Psi(j\omega) = [S_g(\omega)]^+$.

Пример 4.3. Рассмотрим задачу прогнозирования углового движения объекта на морском волнении. Корреляционная функция для угла наклона α определяется выражением

$$K(\tau) = D e^{-\mu|\tau|} \left(\cos \beta \tau + \frac{\mu}{\beta} \sin \beta |\tau| \right),$$

где D — дисперсия угла наклона, β — преобладающая частота, а $\mu \ll \beta$ — коэффициент нерегулярности. Этой

корреляционной функции соответствует спектральная плотность

$$S(\omega) = \frac{2aD}{|1 + aj\omega + b(j\omega)^2|^2},$$

где $a = 2\mu(\mu^2 + \beta^2)^{-1}$, $b = (\mu^2 + \beta^2)^{-1}$.

Пусть требуется по результатам измерения угла и скорости наклона объекта в момент времени t дать оптимальную оценку угла наклона в момент времени $(t + \tau_0)$. Помехи в определении текущих значений угла и скорости в текущий момент времени t отсутствуют. В соответствии с формулами (4.65) и (4.38) сомножитель оптимальной передаточной функции

$$\Psi(j\omega) = [S_g(\omega)]^+ = \frac{\sqrt{2aD}}{1 + aj\omega + b(j\omega)^2}.$$

Ему соответствует обратное преобразование Фурье

$$\psi(t) = \frac{2\sqrt{\mu D}(\mu^2 + \beta^2)}{\beta} e^{-\mu t} \sin \beta t \cdot 1(t).$$

Составим теперь дифференциальное уравнение, решению которого определит фундаментальную матрицу $\Phi(\tau_0)$:

$$\Psi^{-1}(p)\alpha = bp^2\alpha + ap\alpha + \alpha = 0.$$

Выберем в качестве переменных состояния (угол наклона объекта $\alpha = x_1$ и его первую производную $\dot{\alpha} = x_2$). Тогда для переменных состояния можно записать

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 0 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{1}{b}x_1 - \frac{a}{b}x_2. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение этой системы $bp^2 + ap + 1 = 0$ совпадает с уравнением $\Psi^{-1}(p) = 0$. Запишем общее решение системы дифференциальных уравнений для первой переменной состояния:

$$\alpha = x_1 = e^{-\mu t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Для второй переменной состояния имеем

$$\dot{\alpha} = x_2 = \dot{x}_1 = e^{-\mu t} [(\beta C_2 - \mu C_1) \cos \beta t - (\mu C_2 + \beta C_1) \sin \beta t].$$

Введем отсчет времени от начала прогнозирования (текущее время t) в виде времени прогнозирования τ_0 . Для $\tau_0 = 0$ примем начальные условия $x_1 = \alpha_0$ и $x_2 = \dot{\alpha}_0$. Подстановка начальных условий в общие выражения для α и $\dot{\alpha}$ дает значения произвольных постоянных $C_1 = \alpha_0$ и $C_2 = (\mu\alpha_0 + \dot{\alpha}_0)\beta^{-1}$. В результате имеем

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 e^{-\mu\tau_0} \left(\cos \beta\tau_0 + \frac{\mu}{\beta} \sin \beta\tau_0 \right) + \frac{\dot{\alpha}_0}{\beta} e^{-\mu\tau_0} \sin \beta\tau_0 = \\ &= \alpha_0 \Phi_{11}(\tau_0) + \dot{\alpha}_0 \Phi_{12}(\tau_0), \\ \dot{\alpha} &= -\alpha_0 \beta \left(1 + \frac{\mu^2}{\beta^2} \right) e^{-\mu\tau_0} \sin \beta\tau_0 + \dot{\alpha}_0 e^{-\mu\tau_0} \left(\cos \beta\tau_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu}{\beta} \sin \beta\tau_0 \right) = \alpha_0 \Phi_{21}(\tau_0) + \dot{\alpha}_0 \Phi_{22}(\tau_0), \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

где Φ_{11} , Φ_{12} , Φ_{21} и Φ_{22} — элементы фундаментальной матрицы.

Полученный результат можно записать в матричной форме:

$$\alpha(\tau_0) = C\Phi(\tau_0)x(0).$$

Здесь $\Phi(\tau_0)$ — фундаментальная матрица 2×2 , $x(0) = \|x_1(0) \ x_2(0)\|'$ — матрица-столбец начальных значений $x(t)$ при $\tau_0 = 0$, а $C = \|1, 0\|$ — матрица-строка коэффициентов.

Схема прогнозируемого устройства для фиксированного интервала времени $\tau_0 = \text{const}$ изображена на рис. 4.9. Текущие значения переменных состояния $x_1(t) = \alpha(t)$ и $x_2(t) = \dot{\alpha}(t)$, соответствующие времени $\tau_0 = 0$, поступают на безынерционные звенья с фиксированными коэффициентами передачи $k_{11} = \Phi_{11}(\tau_0)$ и $k_{12} = \Phi_{12}(\tau_0)$, а затем складываются, в результате чего получается упрежденное значение угла $\alpha(t + \tau_0) = k_{11}\alpha(t) + k_{12}\dot{\alpha}(t)$.

Для нахождения схемы прогнозирующего устройства, просматривающего поведение угла α на всем интервале прогнозирования, найдем преобразование Лапласа для

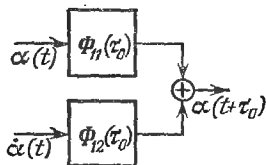


Рис. 4.9. Фильтр к примеру 4.3. с прогнозированием на постоянное время.

выражения (*):

$$A(p) = \frac{\alpha_0(p+2\mu)}{(p+\mu)^2 + \beta^2} + \frac{\dot{\alpha}_0}{(p+\mu)^2 + \beta^2}.$$

Последнее выражение можно представить в виде

$$(p^2 + 2\mu p + \mu^2 + \beta^2) A(p) = \alpha_0(p+2\mu) + \dot{\alpha}_0.$$

Ему соответствует дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\mu \frac{d\alpha}{dt} + (\mu^2 + \beta^2) \alpha = 0 \quad (**)$$

с начальными условиями $\alpha(0) = \alpha_0$ и $\dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_0$.

Дифференциальное уравнение (**) может решаться на любой вычислительной машине. Если ввести ускоренный

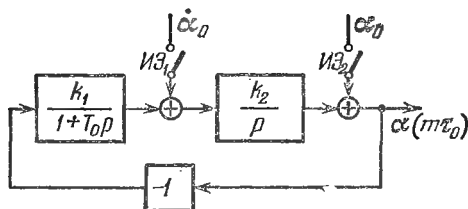


Рис. 4.10. Фильтр к примеру 4.3 с прогнозированием на интервал времени.

темп решения, то машинное время $t_m = mt$, где $m > 1$. Тогда уравнение (**) должно быть записано в виде

$$\frac{d^2\alpha}{dt_m^2} + 2\mu m \frac{d\alpha}{dt_m} + m^2(\mu^2 + \beta^2) \alpha = 0.$$

На рис. 4.10 показана структурная схема прогнозирующего фильтра, которая может быть реализована как на цифровой, так и на аналоговой ЭВМ. Импульсные элементы ИЭ₁ и ИЭ₂ замыкаются синхронно на короткое время для введения начальных условий α_0 и $\dot{\alpha}_0$. Затем импульсные элементы размыкаются и устройство производит вычисление прогнозируемой величины $\alpha(m\tau_0)$ в ускоренном темпе. Процесс может периодически повторяться с необходимым интервалом дискретности.

Характеристическое уравнение системы, изображенной на рис. 4.10:

$$p^2 + \frac{1}{T_0} p + \frac{k_1 k_2}{T_0} = 0.$$

Для того чтобы оно совпало с моделируемым уравнением, необходимо выполнить условия $T_0^{-1} = 2\mu m$ и $k_1 k_2 T_0^{-1} = m^2 (\mu^2 + \beta^2)$.

Найдем теперь ошибку прогноза в рассматриваемой системе. В соответствии с формулой (4.75) относительная дисперсия ошибки

$$\begin{aligned} \eta_{\min}^2 &= 1 - \frac{1}{D} \int_{\tau_0}^{\infty} [\psi(\tau)]^2 d\tau = 1 - \frac{4\mu(\mu^2 + \beta^2)}{\beta^2} \int_{\tau_0}^{\infty} e^{-2\mu\tau} \sin^2 \beta\tau d\tau = \\ &= 1 - e^{-2\mu\tau_0} \left(\frac{\mu^2 + \beta^2}{\beta^2} - \frac{\mu^2}{\beta^2} \cos 2\beta\tau_0 + \frac{\mu\beta}{\beta^2} \sin 2\beta\tau_0 \right) \approx 1 - e^{-2\mu\tau_0}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\tau_0 \rightarrow 0$ дисперсия ошибки прогноза равна нулю, а при $\tau_0 \rightarrow \infty$ относительная дисперсия ошибки стремится к единице, т. е. к 100%. Заметим, что при $\tau_0 \rightarrow \infty$ прогнозируемое значение угла α стремится к нулю, т. е. к математическому ожиданию этой величины.

§ 4.4. Использование фильтров Винера в цифровых системах

При реализации фильтров Винера в цифровых системах возникает задача учета явлений квантования по времени и квантования по уровню. Остановимся вначале на квантовании по времени.

Импульсный характер работы цифровых систем будет оказывать заметное влияние на работу системы и должен учитываться при расчете в тех случаях, когда период дискретности не может считаться малым. Понятие малости связано с видом полезного сигнала, который поступает на вход системы, а точнее — с его спектральной плотностью.

В предыдущем параграфе было показано, что частотная передаточная функция разомкнутой системы, реализующей оптимальную частотную передаточную функцию $H(j\omega)$ при действии помехи типа белого шума, имеет полюсы, совпадающие с полюсами спектральной плотности полезного сигнала $S_u(\omega)$, лежащими в верхней полуплоскости.

Частотная передаточная функция линеаризованной цифровой системы практически совпадает с частотной передаточной функцией непрерывной системы, если будет выполняться условие

$$|\alpha_{\max}| \leq \frac{2}{T}, \quad (4.76)$$

где $\alpha_{\max}$ — наибольший по модулю чисто мнимый полюс частотной передаточной функции (он соответствует наибольшему по модулю вещественному полюсу в p -плоскости передаточной функции), T — период дискретности. Для комплексных корней в p -плоскости ($p_{1,2} = -\gamma \pm j\lambda$) аналогичное условие имеет вид

$$\lambda_{\max} \leq \frac{2}{T}, \quad (4.77)$$

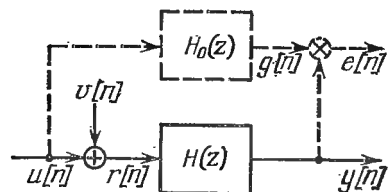


Рис. 4.11. Дискретный вариант фильтра Винера.

где $\lambda_{\max}$ — наибольшее значение мнимой части комплексного корня. При выполнении условий (4.76) и (4.77) применительно к полюсам спектральной плотности полезного сигнала учет квантования по времени оказывается ненужным и система может рассчитываться как непрерывная с последующим использованием ЦВМ. При действии коррелированной помехи $v(t)$ сформулированное условие сохраняет свою силу, если при выбранном периоде дискретности время корреляции помехи меньше периода дискретности и она может рассматриваться как дискретный белый шум.

При невыполнении условий (4.76) и (4.77), точнее, при невозможности выполнить эти условия соответствующим выбором периода дискретности, необходимо перейти к рассмотрению дискретных фильтров Винера. Дискретный вариант фильтра изображен на рис. 4.11. Полезный сигнал и помеха представлены в виде решетчатых функций $u[n]$ и $v[n]$. Передаточной функции оптимального фильтра $H(z)$ соответствует приведенная весовая функция $h[n]$, связанная с передаточной функцией z -преобразованием. В качестве критерия качества рассматривается дисперсия

решетчатой функции ошибки $e[n] = g[n] - y[n]$ в виде

$$\overline{e^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N e^2[n]. \quad (4.78)$$

Как и ранее, изображение задающего воздействия $G(z)$ связано с изображением полезного сигнала $U(z)$ зависимостью

$$G(z) = H_0(z) U(z). \quad (4.79)$$

Дискретизация уравнения Винера — Хопфа (4.23) дает основное уравнение для определения приведенной весовой функции оптимального фильтра:

$$K_{gr}[m] = \sum_{\eta=0}^{\infty} h[\eta] K_r[m-\eta], \quad 0 < m < \infty, \quad (4.80)$$

где корреляционная функция суммарного решетчатого входного сигнала $r[n] = u[n] + v[n]$

$$\begin{aligned} K_r[m] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N r[n+m] r[n] = \\ &= K_u[m] + K_v[m] + K_{uv}[m] + K_{vu}[m], \end{aligned} \quad (4.81)$$

а взаимная корреляционная функция определяется здесь выражением

$$\begin{aligned} K_{gr}[m] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N g[n+m] r[n] = \\ &= K_{gu}[m] + K_{gv}[m]. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Приведенная весовая функция $h[n]$ представляет собой реакцию фильтра на единичную решетчатую импульсную функцию $\delta_0[n]$.

В формуле (4.81) использованы корреляционные функции полезного сигнала $K_u[m]$, помехи $K_v[m]$ и взаимные корреляционные функции полезного сигнала и помехи $K_{uv}[m]$ и $K_{vu}[m]$. Этим функциям соответствуют спектральные плотности, которые могут быть записаны в зависимости от псевдочастоты: $S_u^*(\lambda)$, $S_v^*(\lambda)$, $S_{uv}^*(\lambda)$ и $S_{vu}^*(\lambda)$.

В формуле (4.82) использованы взаимные корреляционные функции полезного сигнала и желаемого значения

управляемой величины $K_{gu}[m]$, а также помехи и желаемого значения управляемой величины $K_{gv}[m]$. Им соответствуют спектральные плотности $S_{gu}^*(\lambda)$ и $S_{gv}^*(\lambda)$.

На основании рис. 4.11 можно записать следующие равенства:

$$S_{gu}^*(\lambda) = H_0^*(j\lambda) S_u^*(\lambda), \quad (4.83)$$

$$S_{gv}^*(\lambda) = 0. \quad (4.84)$$

В частном случае, когда рассматривается задача оптимальной фильтрации, $H_0(z) = 1$. Тогда $S_{gu}^*(\lambda) = S_u^*(\lambda) = S_g^*(\lambda)$.

В задаче предсказания $H_0(z) = z^l$, где l — число тактов, на которое осуществляется предсказание, а время предсказания $\tau_0 = lT$, где T — период дискретности. Тогда

$$H_0^*(j\lambda) = \left(\frac{1 + j\lambda \frac{T}{2}}{1 - j\lambda \frac{T}{2}} \right)^l. \quad (4.85)$$

Рассмотрим решение дискретного уравнения Винера — Хопфа на основе изложенного в § 4.3. Если корреляционная функция $K_r[m]$ соответствовала бы дискретному белому шуму, т. е. имело бы место равенство $K_r[m] = \delta_0[m]$, то решение (4.80) было бы

$$h[m] = \begin{cases} K_{gr}[m], & m \geq 0, \\ 0, & m < 0. \end{cases} \quad (4.86)$$

Корреляционной функции $\delta_0[m]$ соответствует спектральная плотность

$$S^*(\lambda) = 1. \quad (4.87)$$

Передающую функцию отбеливающего (декоррелирующего) фильтра можно получить из условия

$$|W_{\text{оф}}^*(j\lambda)|^2 S_r^*(\lambda) = 1. \quad (4.88)$$

Представив спектральную плотность $S_r^*(\lambda)$ в виде

$$S_r^*(\lambda) = \Psi^*(j\lambda) \Psi^*(-j\lambda), \quad (4.89)$$

где $\Psi^*(j\lambda) = [S_r^*(\lambda)]^+$ и $\Psi^*(-j\lambda) = [S_r^*(\lambda)]^-$, получим частотную передающую функцию отбеливающего фильтра

$$W_{\text{оф}}^*(j\lambda) = \frac{1}{\Psi^*(j\lambda)}. \quad (4.90)$$

Пусть, например, спектральная плотность имеет вид (3.59):

$$S_r^*(\lambda) = \frac{2DT_{\Phi} \left(1 + \lambda^2 \frac{T^2}{4}\right)}{T(1 + \lambda^2 T_{\Phi}^2)}.$$

Представим ее как произведение комплексно-сопряженных величин:

$$\begin{aligned} S_r^*(\lambda) &= \sqrt{\frac{2DT_{\Phi}}{T} \frac{1 + j\lambda \frac{T}{2}}{1 + j\lambda T_{\Phi}}} \sqrt{\frac{2DT_{\Phi}}{T} \frac{1 - j\lambda \frac{T}{2}}{1 - j\lambda T_{\Phi}}} = \\ &= \Psi^*(j\lambda) \Psi^*(-j\lambda). \end{aligned}$$

Отсюда определяется искомая передаточная функция отбеливающего фильтра (4.90):

$$W_{\text{оф}}^*(j\lambda) = \sqrt{\frac{T}{2DT_{\Phi}}} \frac{1 + j\lambda T_{\Phi}}{1 + j\lambda T/2}.$$

Рассматривая теперь оптимальный фильтр с выделенной отбеливающей частью (рис. 4.12), формирующей сиг-

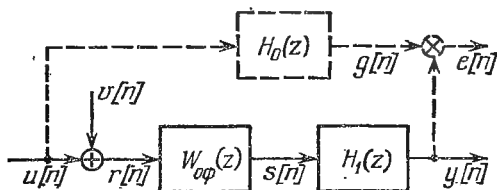


Рис. 4.12. Оптимальный дискретный фильтр с выделенной отбеливающей частью.

нал $s[n]$ из смеси $r[n]$, можем записать уравнение (4.80) в виде

$$K_{gs}[m] = \sum_{n=0}^{\infty} h_1[n] \delta_0[m-n], \quad (4.91)$$

где приведенной весовой функции

$$h_1[m] = \begin{cases} K_{gs}[m], & 0 \leq m < \infty, \\ 0, & m < 0, \end{cases} \quad (4.92)$$

соответствует оптимальная передаточная функция $H_1(z)$. Корреляционной функции $K_{gs}[m]$ соответствует спектраль-

ная плотность

$$S_{gs}^*(\lambda) = W_{\text{оф}}^*(-j\lambda) S_{gr}^*(\lambda) = \frac{S_{gr}^{\text{н}}(\lambda)}{\Psi^*(-j\lambda)}. \quad (4.93)$$

Подобно изложенному в § 4.3, можно показать, что частотная передаточная функция оптимального фильтра должна определяться в соответствии с выражением, аналогичным (4.39). При этом надо учесть, что приведенная весовая функция связана с реализуемой частью передаточной функции соотношением

$$h_1[m] = \mathcal{Z}^{-1} \{ [S_{gs}^*(j\lambda)]_+ \}, \quad j\lambda = \frac{z-1}{z+1} \frac{2}{T}. \quad (4.94)$$

В результате для оптимальной частотной передаточной функции $H^*(j\lambda) = W_{\text{оф}}^*(j\lambda) H_1^*(j\lambda)$ имеем

$$H^*(j\lambda) = \frac{1}{\Psi^*(j\lambda)} [S_{gs}^*(j\lambda)]_+ = \frac{1}{\Psi^*(j\lambda)} \left[\frac{S_{gr}^*(j\lambda)}{\Psi^*(-j\lambda)} \right]_+ = \frac{B^*(j\lambda)}{\Psi^*(j\lambda)}, \quad (4.95)$$

где

$$B^*(j\lambda) = \left[\frac{S_{gr}^*(\lambda)}{\Psi^*(-j\lambda)} \right]_+ = \left\{ \frac{S_u^*(\lambda) H_0^*(j\lambda)}{\Psi^*(-j\lambda)} \right\}_+. \quad (4.96)$$

Формула (4.95) совпадает с (4.39) при замене $j\omega$ на $j\lambda$. Таким образом, процедура нахождения оптимальной частотной передаточной функции в дискретных системах оказывается аналогичной непрерывным системам, если вместо обычной круговой частоты использовать псевдочастоту.

Определение минимальной дисперсии ошибки (4.78) в соответствии с изложенным в главе 3 может быть сделано по формулам (4.61), (4.62) и (4.63) при замене круговой частоты ω на псевдочастоту λ и учете дополнительного множителя $T(1+0,25\lambda^2 T^2)^{-1}$. В результате имеем

$$\begin{aligned} \bar{e}_{\min}^2 &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_g^*(\lambda) d\lambda}{|1+j\lambda T/2|^2} - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H^*(j\lambda)|^2 S_r^*(\lambda) d\lambda}{|1+j\lambda T/2|^2} = \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_g^*(\lambda) d\lambda}{|1+j\lambda T/2|^2} - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|B^*(j\lambda)|^2 d\lambda}{|1+j\lambda T/2|^2}. \end{aligned} \quad (4.97)$$

В другом виде формула для минимальной дисперсии ошибки, аналогично (4.63), будет иметь вид

$$\bar{e}_{\min}^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[1 - |H^*(j\lambda)|^2] S_g(\lambda) d\lambda}{|1 + j\lambda T/2|^2} - \\ - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H^*(j\lambda)|^2 S_v^*(\lambda) d\lambda}{|1 + j\lambda T/2|^2}. \quad (4.98)$$

Переход от частотной передаточной функции оптимального фильтра $H^*(j\lambda)$ к дискретной передаточной функции $H(z)$ может быть сделан в результате подстановок $j\lambda = \omega = 2\omega T^{-1}$, а затем $\omega = (z-1)(z+1)^{-1}$. Таким образом, оптимальная дискретная передаточная функция замкнутой системы

$$H(z) = H^*\left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}\right). \quad (4.99)$$

Эта функция и должна реализовываться в цифровой системе управления.

Системы с белым шумом на входе. Рассмотрим случай действия на входе цифровой системы помехи типа дискретного белого шума со спектральной плотностью

$$S_v^*(\lambda) = D_v, \quad (4.100)$$

где D_v — дисперсия шума. Аналогично непрерывному случаю примем, что преобразующий оператор $H_0(z) = 1$. Спектральная плотность входной смеси полезного сигнала и помехи

$$S_r^*(\lambda) = S_g^*(\lambda) + D_v. \quad (4.101)$$

Передаточная функция отбеливающего фильтра определяется из выражения

$$\frac{1}{W_{\text{оф}}^*(j\lambda)} = \Psi^*(j\lambda) = [S_g^*(\lambda) + D_v]^+. \quad (4.102)$$

Оптимальная частотная передаточная функция замкнутой системы

$$H^*(j\lambda) = \frac{1}{\Psi^*(j\lambda)} \left\{ \frac{S_g^*(\lambda)}{[S_g^*(\lambda) + D_v]^+} \right\}_+. \quad (4.103)$$

Введем предположение, что спектральная плотность полезного сигнала может быть представлена дробно-рациональной функцией:

$$S_g^*(\lambda) = \frac{S_1^*(\lambda)}{S_2^*(\lambda)} = \frac{\Psi_1^*(j\lambda) \Psi_1^*(-j\lambda)}{\Psi_2^*(j\lambda) \Psi_2^*(-j\lambda)}. \quad (4.104)$$

Тогда формула (4.102) может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi^*(j\lambda) &= \left[\frac{S_1^*(\lambda)}{S_2^*(\lambda)} + D_v \right]^+ = \\ &= \left[\frac{S_1^*(\lambda) + D_v S_2^*(\lambda)}{S_2^*(\lambda)} \right]^+ = \frac{\Psi_3^*(j\lambda)}{\Psi_2^*(j\lambda)}. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Знаменатель в фигурных скобках (4.103) может быть представлен в виде

$$\Psi^*(-j\lambda) = [S_g^*(\lambda) + D_v]^- = \frac{\Psi_3^*(-j\lambda)}{\Psi_2^*(-j\lambda)}. \quad (4.106)$$

При этом должно выполняться условие

$$\Psi_3^*(j\lambda) \Psi_3^*(-j\lambda) = S_1^*(\lambda) + D_v S_2^*(\lambda).$$

Рассмотрим выражение в фигурных скобках (4.103). Оно может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{S_g^*(\lambda)}{[S_g^*(\lambda) + D_v]} \right\}_+ &= [S_g^*(\lambda) + D_v]^+ - \left\{ \frac{D_v \Psi_2^*(-j\lambda)}{\Psi_3^*(-j\lambda)} \right\}_+ = \\ &= \Psi^*(j\lambda) - C. \end{aligned} \quad (4.107)$$

В формуле (4.107) неизвестен и подлежит определению постоянный коэффициент C . На основании формулы разложения на простые дроби для свободного члена можно записать

$$C = \frac{D_v \Psi_2^*(\infty)}{\Psi_3^*(\infty)} = \sqrt{\frac{D_v^2 S_2^*(\infty)}{S_1^*(\infty) + D_v S_2^*(\infty)}} = \frac{D_v}{\sqrt{S_g^*(\infty) + D_v}}. \quad (4.108)$$

Здесь возможны два случая. Если степень полинома $S_1^*(\lambda)$ меньше степени полинома $S_2^*(\lambda)$, то $C = \sqrt{D_v}$. Если степени равны, то коэффициент C должен рассчитываться по формуле (4.108), причем $C < \sqrt{D_v}$.

Теперь можно записать формулу для оптимальной частотной передаточной функции в окончательном виде:

$$H^*(j\lambda) = \frac{1}{\Psi^*(j\lambda)} [\Psi^*(j\lambda) - C] = 1 - \frac{C}{\Psi^*(j\lambda)}. \quad (4.109)$$

В системах с единичной главной обратной связью можно определить частотную передаточную функцию разомкнутой системы

$$W^*(j\lambda) = \frac{H^*(j\lambda)}{1 - H^*(j\lambda)} = \frac{\Psi^*(j\lambda)}{C} - 1 = \frac{\Psi_{\Sigma}^*(j\lambda)}{C\Psi_{\Sigma}^*(j\lambda)} - 1. \quad (4.110)$$

Из последнего выражения видно, что, аналогично непрерывному случаю, полюсы передаточной функции разомкнутой системы совпадают с полюсами спектральной плотности полезного сигнала $S_g^*(\lambda)$, лежащими в верхней полуплоскости.

Известный вид частотной передаточной функции разомкнутой системы $W^*(j\lambda)$ позволяет найти дискретную передаточную функцию $W(z)$ подстановкой $j\lambda = 2\omega T^{-1}$, а затем $\omega = (z - 1)(z + 1)^{-1}$. Далее в случае необходимости может быть найдена приведенная весовая функция разомкнутой системы $w_n(t)$ как обратное z -преобразование от передаточной функции $W(z)$.

В задачах управления каким-либо объектом от ЦВМ при известных его передаточных функциях $W_0(z)$ или $W_0^*(j\lambda)$ может быть найдена требуемая корректирующая программа ЦВМ по требуемой ее передаточной функции $D(z)$ или $D^*(j\lambda)$ на основании зависимостей

$$\left. \begin{aligned} D(z) &= \frac{W(z)}{W_0(z)}, \\ D(j\lambda) &= \frac{W^*(j\lambda)}{W_0^*(j\lambda)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.111)$$

Естественно, что вследствие ограничений, накладываемых на реализуемые программы ЦВМ, точного осуществления оптимального построения системы можно и не достичь. В этих случаях оптимальный фильтр будет реализовываться в ЦАС приближенно. Более подробно — см. § 5.5.

Пример 4.4. Рассмотрим случай оптимального сглаживания по условиям примера 4.1, но в дискретном варианте. Типовой входной сигнал следящей системы характеризуется спектральной плотностью скорости его изменения (3.59):

$$S_i^*(\lambda) = \frac{2D_1T_s \left(1 + \frac{\lambda^2 T_s^2}{4}\right)}{T(1 + \lambda^2 T_s^2)},$$

где D_1 — дисперсия скорости, а эквивалентная постоянная времени

$$T_{\text{в}} = \frac{T}{2} \frac{1+d}{1-d} = \frac{T}{2} \operatorname{cth} \frac{T}{2T_1}.$$

Помеха представляет собой дискретный белый шум со спектральной плотностью $S_v^*(\lambda) = D_v$. Это могут быть, например, шумы квантования во входном преобразователе.

Для нахождения спектральной плотности входного сигнала можно использовать передаточную функцию какого-либо сумматора, являющегося аналогом интегратора в непрерывном случае. Примем, например, что суммирование осуществляет интегрирование по методу трапеций. Передаточная функция подобного дискретного интегратора [29]

$$W_{\text{и}}(z) = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}.$$

Частотная передаточная функция

$$W_{\text{и}}^*(j\lambda) = \frac{T}{2} \frac{1}{\omega} \Big|_{\omega=j\lambda} \frac{T}{2} = \frac{1}{j\lambda}.$$

Спектральная плотность полезного входного сигнала

$$S_u^*(\lambda) = |W_{\text{и}}^*(j\lambda)|^2 S_1^*(\lambda) = \frac{2D_1 T_{\text{в}} \left(1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4}\right)}{T\lambda^2 (1 + \lambda^2 T_{\text{в}}^2)}.$$

Спектральная плотность суммы полезного сигнала и помехи

$$\begin{aligned} S_r^*(\lambda) = S_u^*(\lambda) + S_v^*(\lambda) &= A_0 \frac{1 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda^4}{\lambda^2 (1 + \lambda^2 T_{\text{в}}^2)} = \\ &= A_0 \frac{(1 + \lambda^2 \tau_1^2)(1 + \lambda^2 \tau_2^2)}{\lambda^2 (1 + \lambda^2 T_{\text{в}}^2)}, \end{aligned}$$

где

$$A_0 = 2D_1 \frac{T_{\text{в}}}{T},$$

$$A_1 = \frac{T^2}{4} + \frac{D_v T}{2D_1 T_{\text{в}}} = \tau_1^2 + \tau_2^2,$$

$$A_2 = \frac{D_v T_{\text{в}} T}{2D_1} = \tau_1^2 \tau_2^2.$$

Далее находим функцию

$$\Psi^*(j\lambda) = \sqrt{\frac{2D_1 T_3}{T}} \frac{(1 + j\lambda\tau_1)(1 + j\lambda\tau_2)}{j\lambda(1 + j\lambda T_3)}.$$

По формуле (4.108) определяем коэффициент

$$C = \frac{D_v}{\sqrt{S_g^*(\infty) + D_v}} = \sqrt{D_v}.$$

В соответствии с (4.111) частотная передаточная функция разомкнутой оптимальной системы

$$W^*(j\lambda) = \frac{\Psi^*(j\lambda)}{C} - 1 = \sqrt{\frac{2D_1 T_3}{D_v T}} \frac{(1 + j\lambda\tau_1)(1 + j\lambda\tau_2)}{j\lambda(1 + j\lambda T_3)} - 1.$$

Здесь общий коэффициент усиления разомкнутой системы —

$$K = \sqrt{\frac{2D_1 T_3}{D_v T}}.$$

Подстановка $j\lambda = 2\omega T^{-1}$ и $\omega = (z-1)(z+1)^{-1}$ дает дискретную передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(z) \approx \frac{K [T(z+1) + 2\tau_1(z-1)] [T(z+1) + 2\tau_2(z-1)]}{2(z-1) [T(z+1) + 2T_3(z-1)]} - 1,$$

которая должна быть реализована в оптимальной ЦАС.

Прогнозирование. Расчет оптимального прогнозирующего фильтра в дискретном варианте совпадает, в основном, с тем, что было изложено в § 4.3 для непрерывных систем. Для нахождения передаточной функции оптимального фильтра здесь удобно вернуться от частотных функций к функциям аргумента z . Это делается подстановкой $j\lambda = 2\omega T^{-1}$, а затем $\omega = (z-1)(z+1)^{-1}$. В результате из общей формулы (4.95) получим формулу, аналогичную (4.65):

$$H(z) = \frac{1}{\Psi(z)} \left\{ \frac{S_g(z) z^l}{\Psi(z^{-1})} \right\}_+, \quad (4.112)$$

где l — число тактов, на которое осуществляется прогноз, $\Psi(z) = [S_g(z) + S_v(z)]^+$ — сомножитель спектральной плотности входной смеси, которому соответствуют корни, лежащие внутри круга единичного радиуса. Знак плюс у фигурных скобок означает операцию выделения реализуемой части передаточной функции, которой соответствуют полюсы внутри круга единичного радиуса.

В частном случае отсутствия помех $S_g(z) = \Psi(z) \Psi(z^{-1})$. Поэтому формула (4.112) приобретает вид

$$H(z) = \frac{1}{\Psi(z)} \{\Psi(z) z^l\}_+. \quad (4.113)$$

Для отыскания реализуемой части выражения в фигурных скобках (4.112) можно воспользоваться обратным z -преобразованием:

$$h_1[n] = \mathbb{Z}^{-1} \left[\left\{ \frac{S_g(z) z^l}{\Psi(z^{-1})} \right\}_+ \right] = \mathbb{Z}^{-1} [H_1(z)]. \quad (4.114)$$

Здесь $H_1(z)$ — передаточная функция, соответствующая реализуемой части выражения в фигурных скобках (4.112). Если $h_{1n}[n]$ есть искомое обратное преобразование при отсутствии предсказания ($l=0$), то на основании теоремы сдвига $h_1[n] = h_{1n}[n+l]$. Тогда передаточная функция $H_{1n}(z)$ будет соответствовать реализуемой части выражения в фигурных скобках (4.112) при отсутствии предсказания. Аналогичным образом для приведенной весовой функции оптимального фильтра можно записать при наличии предсказания $h[n] = h_n[n+l]$.

Значение выходной величины фильтра в момент времени $t = (n+l)T$ можно вычислить через переменные состояния, которые представим в виде матрицы-столбца $x_0[n] = \|x[n] x[n-1] \dots x[n-N+1]\|'$, где N — порядок разностного уравнения, описывающего фильтр, и фундаментальную матрицу $\Phi[l]$, аналогичную матрице (4.69).

Таким образом, для выходной величины фильтра можно записать формулу, аналогичную формуле (4.70):

$$y[n+l] = C\Phi[l]x_0[n], \quad (4.115)$$

где $C = \|c_{ij}\|$ — прямоугольная матрица коэффициентов размером $R \times N$. Здесь R — число отыскиваемых выходных величин фильтра. В одномерной задаче $R=1$.

Как и ранее, характеристическое уравнение для фундаментальной матрицы должно иметь вид

$$\prod_{i=1}^{q_1} (z + z_i) \prod_{j=1}^{q_2} (z + z_j) = 0, \quad (4.116)$$

где z_i ($i=1, 2, \dots, q_1$) — полюсы функции, определяемой вторым сомножителем в формуле (4.112), а z_j — нули функции $\Psi(z)$. Схема прогнозирующего устройства сов-

падает с изображенной на рис. 4.8 при замене непрерывных входных и выходных функций времени на решетчатые функции и замене $\Phi(\tau)$ на $\Phi[l]$.

В частном случае, когда помехи отсутствуют, оптимальная передаточная функция без предсказания

$$H_n(z) = \frac{\Psi(z)}{\Psi(z)} = \frac{\Psi_1(z) \Psi_2(z)}{\Psi_2(z) \Psi_1(z)} = 1. \quad (4.117)$$

Здесь, как и ранее, принято, что $\Psi(z) = \Psi_1(z) \Psi_2^{-1}(z)$. Приведенная весовая функция для этого фильтра $h_n[n] = \delta_0[n]$ совпадает с единичной решетчатой импульсной функцией. Характеристическое уравнение, определяющее фундаментальную матрицу в этом случае: $\Psi_1(z) \Psi_2(z) = 0$.

Если прогнозирование производится на фиксированное число тактов $l = \text{const}$, то фундаментальная матрица представляет собой совокупность постоянных коэффициентов. Если необходимо произвести в быстром темпе просмотр будущих значений прогнозируемой величины, то фундаментальная матрица реализуется в виде дискретного фильтра, протекание процессов в котором после выставки начальных условий

$$x_0[0] = \|x[0] \ x[0-1] \ x[0-2] \dots x[0-N+1]\|'$$

должно определяться периодом дискретности $T_0 = T/m$, где $m > 1$ — масштаб времени. Этот фильтр должен соответствовать дифференциальному уравнению $\Psi_1(z) \times \times \Psi_2(z) = 0$ с возможностью введения начальных условий.

Ошибка прогнозирования может быть получена из формулы (4.73), если заменить процесс интегрирования суммированием:

$$e^2_{\min} = K_g[0] - \sum_{n=l}^{\infty} h_{1n}^2[n], \quad (4.118)$$

где $K_g[0] = D_g$ — дисперсия полезного входного сигнала, а $h_1[n]$ определяется формулой (4.114). Формула (4.118) может быть представлена в безразмерной форме:

$$\bar{\eta}_{\min}^2 = \frac{\sigma_{\min}^2}{D_g} = 1 - \frac{1}{D_g} \sum_{n=l}^{\infty} h_{1n}^2[n]. \quad (4.119)$$

Для вычисления бесконечной суммы в (4.118) и (4.119) можно использовать приемы, рассмотренные в главе 2.

В соответствии с формулой (2.113)

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{1n}^2[n] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H_{1n}^*(j\lambda)|^2 d\lambda}{|1 + j\lambda T/2|^2}. \quad (4.120)$$

Поэтому формула (4.118) может быть записана в виде

$$\bar{e}_{\min}^2 = K_g[0] - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H_{1n}^*(j\lambda)|^2 d\lambda}{|1 + j\lambda T/2|^2} + \sum_{n=0}^{l-1} h_{1n}^2[n]. \quad (4.121)$$

В безразмерной форме дисперсия ошибки

$$\bar{\eta}_{\min}^2 = 1 - \frac{1}{D_g} \left(\frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H_{1n}^*(j\lambda)|^2 d\lambda}{|1 + j\lambda T/2|^2} - \sum_{n=0}^{l-1} h_{1n}^2[n] \right). \quad (4.122)$$

При отсутствии помех числитель подынтегрального выражения в формулах (4.121) и (4.122) совпадает со спектральной плотностью входного сигнала. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}_{\min}^2 &= \sum_{n=0}^{l-1} h_{1n}^2[n], \\ \bar{\eta}_{\min}^2 &= \frac{1}{K_g[0]} \sum_{n=0}^{l-1} h_{1n}^2[n]. \end{aligned} \right\} \quad (4.123)$$

Для прогнозирования на один такт вперед $l=1$ и $\bar{e}_{\min}^2 = h_{1n}^2[0]$.

Пример 4.5. Рассмотрим прогнозирование случайного процесса со спектральной плотностью вида (3.59):

$$S_g^*(\lambda) = \frac{2D_g T_g \left(1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4}\right)}{T (1 + \lambda^2 T_g^2)},$$

где эквивалентная постоянная времени

$$T_g = \frac{T}{2} \frac{1+d}{1-d} = \frac{T}{2} \operatorname{cth} \frac{T}{2T_1}, \quad d = e^{-T/T_1},$$

а T_1 — постоянная времени спектральной плотности исходного непрерывного процесса. Пусть требуется прогнозировать значение входной величины $g[n]$ на l тактов впе-

ред по результатам текущего измерения этой величины при отсутствии помех.

Представим спектральную плотность в виде $S_g^*(\lambda) = \Psi^*(j\lambda) \Psi^*(-j\lambda)$, где

$$\Psi^*(j\lambda) = [S_g^*(j\lambda)]^+ = \sqrt{\frac{2D_g T_g}{T}} \frac{1 + j\lambda T/2}{1 + j\lambda T_g/2}.$$

Перейдем к аргументу $z = (1 + j\lambda T/2)(1 - j\lambda T/2)^{-1}$:

$$\Psi(z) = \sqrt{\frac{2D_g T_g}{T}} \frac{(1-d)z}{z-d} = \sqrt{D_g(1-d^2)} \frac{z}{z-d}.$$

Характеристическое уравнение, определяющее фундаментальную матрицу, $z(z-d)=0$, имеет два корня: $z_1=d$ и $z_2=0$. Фундаментальная матрица состоит из одного элемента $\Phi_{11}[l]=d^l$. В данном случае матрица $C=1$, а передаточная функция оптимального фильтра без предсказания $H_n(z)=1$. Поэтому формула (4.115) приобретает вид

$$y[n+l] = g[n]d^l.$$

Таким образом, прогнозирующее устройство в данном случае представляет собой безынерционное звено (аттенюатор), коэффициент передачи которого уменьшается с ростом числа тактов, на которое осуществляется предсказание.

Для нахождения ошибки прогноза определим из (4.114) приведенную весовую функцию при $l=0$:

$$h_{1u}[n] = \mathbb{Z}^{-1}[\Psi(z)] = \mathbb{Z}^{-1}\left[\sqrt{D_g(1-d^2)} \frac{z}{z-d}\right] = \sqrt{D_g(1-d^2)} d^n.$$

Относительная ошибка прогнозирования в соответствии с формулой (4.123)

$$\overline{\eta}_{\text{min}}^2 = \frac{1}{D_g} \sum_{n=0}^{l-1} h_{1u}^2[n] = (1-d^2) \sum_{n=0}^{l-1} d^{2n} = 1 - d^{2l} = 1 - e^{-2lT/T_g}.$$

Из полученного выражения видно, что при $l=0$ (отсутствие предсказания) дисперсия ошибки равна нулю. При $l \rightarrow \infty$ относительная дисперсия ошибки стремится к единице.

§ 4.5. Основы теории фильтров Калмана

Фильтры Калмана находят сейчас применение при решении различных задач оптимальной фильтрации [106, 147]. Эти фильтры были обоснованы также работами Р. Бьюси [148]. Поэтому они иногда называются фильтрами Калмана — Бьюси.

В отличие от задачи Винера, здесь для задания случайного полезного входного сигнала (задающего воздействия системы управления) используется формирующий фильтр, возбуждаемый белым шумом.

Модель источника полезного сигнала определяется матричным нестационарным дифференциальным уравнением, отражающим динамику системы-аналога, и уравнением наблюдения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ g_0(t) &= C(t)x(t) + v(t) = g(t) + v(t), \end{aligned} \right\} \quad (4.124)$$

где $x(t) = \|x_1(t) \ x_2(t) \dots x_n(t)\|'$ — матрица-столбец переменных состояния системы, $u(t) = \|u_1(t) \ u_2(t) \dots u_r(t)\|'$ — матрица-столбец сигналов белого шума на входе системы-аналога, $g(t) = \|g_1(t) \ g_2(t) \dots g_l(t)\|'$ — матрица-столбец задающих воздействий, $g_0(t) = g(t) + v(t)$ — матрица-столбец задающих воздействий, искаженных ошибками измерений, т. е. матрица-столбец выходных сигналов системы-аналога, $v(t)$ — матрица-столбец ошибок измерений, $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ — матрицы размеров $n \times n$, $n \times r$ и $l \times n$ соответственно.

Матрица состояния $A(t)$ отражает динамику свободной системы, матрица помех $B(t)$ характеризует влияние входного сигнала, а матрица наблюдения $C(t)$ — связь переменных состояния $x(t)$ с выходным сигналом $g_0(t)$, который поступает далее на вход системы управления. Так как в общем случае элементы матриц A , B и C могут изменяться в функции времени, то уравнения (4.124) характеризуют нестационарную систему-аналог входных воздействий. Если элементы матриц A , B и C не зависят от времени, то система-аналог становится стационарной. При равенстве нулю $B(t)$ и $v(t)$ система становится свободной.

Входной сигнал $u(t)$ представляет многомерный случайный процесс типа белого шума с математическим ожиданием всех компонент, равным нулю.

В начальный момент времени $t = t_0$ матрица-столбец $x(t_0)$ характеризует начальное состояние системы и соответствует многомерной случайной величине с нормальным распределением. Это означает, что величины $x(t)$ и $g_0(t)$ соответствуют многомерным нормальным процессам.

Матричная структурная схема, соответствующая уравнениям (4.124), изображена на рис. 4.13. Эта схема

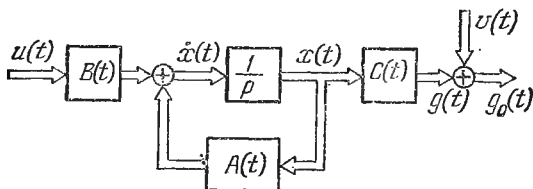


Рис. 4.13. Матричная структурная схема непрерывного формирующего фильтра.

в части, соответствующей первому уравнению (4.124), и является формирующим фильтром для входного процесса системы управления. Схема содержит n интеграторов. Звено $A(t)$ показывает связи в системе. Эта матрица имеет вид

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.125)$$

Коэффициент $a_{ij}(t)$ есть коэффициент передачи по обратной связи с выхода j -го интегратора на вход i -го интегратора. Подобным же образом могут быть записаны матрицы B и C .

В соответствии с теорией линейных дифференциальных уравнений все их решения могут быть выражены через фундаментальную матрицу $\Phi(t, t_0)$, являющуюся переходной матрицей для системы уравнений. Эта матрица оказывается невырожденной, и она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A(t) \Phi(t, t_0) \quad (4.126)$$

с начальными условиями $\Phi(t_0, t_0) = I$, где I — единичная матрица размером $n \times n$.

В стационарных системах $A(t) = \text{const}$ и $\Phi(t, t_0) = \Phi(\tau_0)$, где $\tau_0 = t - t_0$. Тогда уравнение (4.126) легко решается переходом к изображениям Лапласа

$$p\Phi_{\lambda}(p) - I = A\Phi_{\lambda}(p),$$

откуда изображение фундаментальной матрицы

$$\Phi_{\lambda}(p) = [pI - A]^{-1}.$$

Далее можно перейти к оригиналу

$$\Phi(\tau_0) = \mathcal{L}^{-1} \{ [pI - A]^{-1} \}.$$

Для рассмотренного выше примера 4.3 матрицы коэффициентов имели вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{b} & -\frac{a}{b} \end{bmatrix}, \quad pI - A = \begin{bmatrix} p & -1 \\ \frac{1}{b} & p + \frac{a}{b} \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица

$$[pI - A]^{-1} = \frac{1}{bp^2 + ap + 1} \begin{bmatrix} p + \frac{a}{b} & 1 \\ -\frac{1}{b} & p \end{bmatrix}.$$

Переход к оригиналам дает здесь

$$\Phi(\tau_0) = e^{-\mu\tau_0} \times \begin{bmatrix} \cos \beta\tau_0 + \frac{\mu}{\beta} \sin \beta\tau_0 & \frac{1}{\beta} \sin \beta\tau_0 \\ -\beta \left(1 + \frac{\mu^2}{\beta^2}\right) \sin \beta\tau_0 & \cos \beta\tau_0 - \frac{\mu}{\beta} \sin \beta\tau_0 \end{bmatrix},$$

где $\mu = 0,5a/b$, а $\beta = \sqrt{b^{-1} - \mu^2}$. Этот результат совпадает с тем, что было получено в примере 4.3.

В соответствии с (4.124) можно записать уравнение движения свободной системы-аналога:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t). \quad (4.127)$$

Тогда решение для $x(t)$

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0). \quad (4.128)$$

Таким образом, матрица $\Phi(t, t_0)$ соответствует линейному преобразованию, которое отображает состояние

системы $x(t_0)$ в состояние $x(t)$. Поэтому она носит название *переходной матрицы*. Для переходной матрицы имеет место следующая зависимость:

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0), \quad (4.129)$$

из которой вытекает равенство

$$\Phi^{-1}(t_1, t_0) = \Phi(t_0, t_1). \quad (4.130)$$

Для первого уравнения (4.124) можно записать решение через переходную матрицу:

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau. \quad (4.131)$$

Однако подобная запись решения имеет скорее методическое, чем практическое значение ввиду больших трудностей, связанных с использованием формулы (4.131).

Входной сигнал системы-аналога представляет собой многомерный случайный гауссов процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной (ковариационной) матрицей

$$\text{cov}[u(t); u(t+\tau)] = M[u(t) u'(t+\tau)] = Q(t) \delta(\tau). \quad (4.132)$$

Здесь $Q(t)$ — симметричная положительно-определенная матрица размером $r \times r$, а $\delta(\tau)$ — единичная дельта-функция. Начальное состояние системы-аналога характеризуется матрицей-столбцом $x(t_0)$, который определяет многомерную случайную величину с гауссовым распределением, имеющую заданное математическое ожидание $M[x(t_0)] = x_0$ и корреляционную матрицу

$$P(t_0) = \text{cov}[x(t_0), x(t_0)] = M\{[x(t_0) - x_0][x(t_0) - x_0]'\}. \quad (4.133)$$

Здесь $P(t_0)$ — симметричная матрица размером $n \times n$. Она может быть, в частности, диагональной, элементы которой суть дисперсии компонент матрицы-столбца переменных состояния.

Измерительное устройство, которое используется для получения информации о наблюдаемых величинах системы-аналога, т. е. компонентах матрицы-столбца $C(t)x(t)$, содержит всегда источник помех (ошибок измерения). Поэтому наблюдаемый сигнал записывается в виде

$$g_0(t) = C(t)x(t) + v(t), \quad (4.134)$$

где $v(t)$ соответствует многомерному случайному гауссову процессу с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей

$$\text{cov}[v(t); v(t+\tau)] = M[v(t) v(t+\tau)] = R(t) \delta(\tau). \quad (4.135)$$

Здесь $R(t)$ — симметричная положительно-определенная неособенная матрица размером $m \times m$. Предполагается, что переменные $u(t)$, $v(t)$ и $x(t_0)$ взаимно некоррелированы.

Типовые формирующие фильтры будут рассмотрены более подробно ниже.

Для дискретного случая модель процесса может быть описана разностным уравнением. В качестве переменных состояния могут приниматься значения некоторой решетчатой функции $x[k]$, т. е. дискреты, для n моментов времени. Эти дискреты будут компонентами матрицы-столбца переменных состояния. В рассматриваемом случае матрицу-столбец можно отождествить с некоторым вектором.

Линейная нестационарная дискретная модель процесса для входных воздействий может быть, по аналогии с (4.124), записана в виде матричного (векторного) уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x[k+1] &= \Phi[k+1, k] x[k] + B[k] u[k], \\ g[k] &= C[k] x[k]. \end{aligned} \right\} \quad (4.136)$$

Здесь $x[k]$ — матрица-столбец (вектор), содержащая n компонент, $u[k]$ — матрица-столбец (вектор) сигналов на входе системы с r компонентами, $g[k]$ — матрица-столбец (вектор) задающих воздействий, $g_0[k]$ — матрица-столбец (вектор) наблюдаемых величин, содержащая l компонент, $\Phi[k+1, k]$ — матрица перехода состояний размером $n \times n$, $B[k]$ — матрица входных сигналов размером $l \times n$. В отличие от непрерывного случая здесь отсутствуют помехи измерения.

Матричная структурная схема модели процесса для дискретных входных величин в общем случае наличия помех измерения изображена на рис. 4.14. Вместо интеграторов (рис. 4.2) здесь использованы n линий задержки, а элементы $f_{ij}[k+1, k]$ квадратной матрицы

$$\Phi[k+1, k] = \begin{bmatrix} f_{11}[k+1, k] & \dots & f_{1n}[k+1, k] \\ f_{21}[k+1, k] & \dots & f_{2n}[k+1, k] \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}[k+1, k] & \dots & f_{nn}[k+1, k] \end{bmatrix} \quad (4.137)$$

соответствуют коэффициентам передачи с выхода j -й линии задержки на период дискретности T на вход i -й линии задержки.

Входной сигнал $u[k]$ представляет собой многомерную случайную гауссову решетчатую последовательность типа дискретного белого шума с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей

$$\begin{aligned} \text{cov} \{u[k]; u[k+m]\} &= \\ &= M \{u[k] u'[k+m]\} = Q[k] \delta_0[m], \end{aligned} \quad (4.138)$$

где $Q[k]$ — симметричная положительно-определенная матрица размером $r \times r$, а $\delta_0[m]$ — единичная импульсная функция.

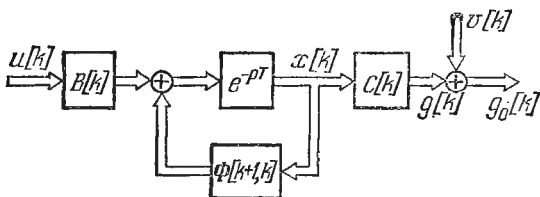


Рис. 4.14. Матричная структурная схема дискретного формирующего фильтра.

В более поздних работах Р. Калмана рассматривается наличие помех измерения. В этом случае вместо (4.136) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} x[k+1] &= \Phi[k+1, k] x[k] + B[k] u[k], \\ g_0[k] &= C[k] x[k] + v[k] = g[k] + v[k], \end{aligned} \right\} \quad (4.139)$$

где ошибка измерения выходного сигнала $v[k]$ представляет собой многомерную случайную величину типа дискретного белого шума с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей

$$\text{cov} \{v[k]; v[k+m]\} = M \{v[k] v'[k+m]\} = R[k] \delta_0[m],$$

где $R[k]$ — симметричная положительно-определенная матрица размером $l \times l$.

В отличие от сформулированной выше задачи, здесь предполагается отыскание оптимальной оценки в момент времени $t = kT$ по результатам предыдущих измерений,

включая и момент времени $t = kT$, но при наличии помех измерения. В начальный момент t_0 состояние системы характеризуется матрицей-столбцом (вектором) $x[0]$ с гауссовым распределением и заданными математическим ожиданием и корреляционной матрицей (4.133). Как и ранее, здесь предполагается отсутствие корреляционной связи между $x[0]$, $u[k]$ и $v[k]$. Матрица $\Phi[k+1, k]$ является переходной для разностных уравнений (4.136) и (4.139). Она определяет переход из состояния, соответствующего времени kT , в состояние, соответствующее времени $(k+1)T$. Поэтому $\Phi[k, k]$ превращается в единичную матрицу E размером $n \times n$.

Уравнения (4.136) могут быть записаны также в другой форме, если ввести матрицу $\Phi[k, k-1]$, определяющую переход системы из состояния в момент времени $(k-1)T$ в состояние, соответствующее времени kT . Тогда вместо (4.139) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} x[k] &= \Phi[k, k-1]x[k-1] + B_1[k]u_1[k], \\ g_0[k] &= C[k]x[k] + v[k] = g[k] + v[k], \end{aligned} \right\} \quad (4.140)$$

где $B_1[k]u_1[k] = B[k-1]u[k-1]$. Следует заметить, что дискретная модель процесса (рис. 4.14) соответствует непрерывной динамической системе, в которой все переменные рассматриваются только в дискретные моменты времени $t = kT$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Поэтому переходная матрица может быть определена из дифференциального уравнения непрерывной системы

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\Phi(t), \quad t_{k-1} \leq t < t_k,$$

при начальном условии $\Phi(t) = \Phi[k, k] = E$ для $t = (k-1)T$ и при $\Phi(t) = \Phi[k, k-1]$ для $t = kT$.

Задачей калмановской оптимальной фильтрации является нахождение наилучшей оценки $\hat{x}(t)$ переменных состояния системы-аналога, описываемой уравнениями (4.124), на основании измерения наблюдаемого сигнала $g(t)$ на интервале (t_0, t) . Динамическая система, определяющая оценку $\hat{x}(t)$, называется *фильтром*. Выходным сигналом фильтра и будет оценка

$$\hat{x}(t) = \|\hat{x}_1(t) \hat{x}_2(t) \dots \hat{x}_n(t)\|'.$$

Разность $\varepsilon(t) = \|\varepsilon_1(t) \ \varepsilon_2(t) \dots \varepsilon_n(t)\|'$ между требуемым $x(t)$ и действительным $\hat{x}(t)$ значениями переменных состояния представляет матрицу-столбец ошибок оценки

$$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t). \quad (4.141)$$

Здесь принимается условие (4.9) несмещенности оценки $\hat{x}(t)$, которое может быть записано также в виде

$$M[\varepsilon(t)] = 0. \quad (4.142)$$

При этом оценка $\hat{x}(t)$ должна минимизировать функционал качества (4.11), представляющий собой квадратичную форму. Матрица Γ размером $n \times n$ определяет весовые коэффициенты и является любой положительно-определенной матрицей.

Матрица-столбец ошибок (4.141) может быть записана в иной форме:

$$\varepsilon(t_1/t) = x(t_1) - \hat{x}(t_1/t), \quad (4.143)$$

которая означает, что рассматриваемая оценка $\hat{x}(t_1/t)$ в некоторый момент времени t_1 по данным наблюдений на интервале (t_0, t) .

Минимизация функционала качества (4.11) означает, что оценка $\hat{x}(t_1/t)$ полезного сигнала $x(t_1)$ удовлетворяет условию минимума дисперсии для каждой компоненты матрицы-столбца ошибки (4.143).

При $t_1 < t$ получается задача сглаживания, при $t_1 = t$ — задача фильтрации и при $t_1 > t$ — задача оптимального упреждения (прогнозирования).

Алгоритм фильтра Калмана для непрерывных систем. Как следует из изложенного выше, в методе оптимальной фильтрации Калмана приняты два предположения. Первое предположение заключается в том, что модель формирования входного сигнала (система-аналог) представляет собой линейную, в общем случае нестационарную динамическую систему, возбуждаемую белым шумом. К этому следует добавить, что структура модели сигнала должна быть известна точно. Если модель точно не известна, то все последующие расчеты могут оказаться несостоятельными.

Второе предположение состоит в том, что наблюдаемый сигнал содержит в качестве аддитивной составляющей

помеху типа белого шума. Принятие гипотезы белого шума не является обязательным. Возможно расширение метода на случай окрашенного (коррелированного) шума, что приводит к некоторому усложнению модели входного сигнала [106].

Алгоритм оптимальной фильтрации Калмана включает в себя следующие составные части:

1) дифференциальное уравнение оптимального фильтра (оптимальной системы автоматического управления), на вход которого поступает наблюдаемый сигнал с выхода системы-аналога и который вырабатывает наилучшую оценку переменных состояния системы-аналога (наилучшее воспроизведение управляемой величины или величин на выходе системы управления);

2) дифференциальное уравнение для ошибок оптимальной линейной оценки (ошибок воспроизведения управляемой величины);

3) выражение для матричного коэффициента усиления оптимального фильтра через корреляционную матрицу ошибок оценки;

4) нелинейное дифференциальное уравнение для корреляционной матрицы ошибок оптимальной линейной оценки (корреляционное уравнение);

5) формулу предсказания при решении задачи упреждения.

Рассмотрим без вывода основные формулы, определяющие алгоритм калмановской фильтрации.

Дифференциальное уравнение оптимального фильтра, наилучшим образом определяющего оценку $\hat{x}(t/t)$, записывается в матричной форме следующим образом:

$$\frac{d\hat{x}(t, t)}{dt} = A(t) \hat{x}(t, t) + K(t) [g_0(t) - C(t) \hat{x}(t/t)]. \quad (4.144)$$

Введем обозначение

$$e_0(t/t) = C(t) [x(t) - \hat{x}(t/t)] = g_0(t) - y(t/t). \quad (4.145)$$

Здесь $y(t/t)$ — совокупность выходных величин системы управления (в частном случае одна выходная величина), связанных матрицей $C(t)$ линейным образом с совокупностью переменных $\hat{x}(t/t)$. Тогда дифференциальное урав-

нение оптимального фильтра можно привести к виду

$$\frac{d\hat{x}(t/t)}{dt} = A(t) \hat{x}(t/t) + K(t) e_0(t/t). \quad (4.146)$$

Матрицы $A(t)$ и $C(t)$ совпадают с аналогичными матрицами формирующего фильтра. Матрица $K(t)$ представляет собой матричный коэффициент усиления оптимального фильтра.

Структурная схема оптимального фильтра, соответствующая дифференциальным уравнениям (4.144) и (4.146), изображена на рис. 4.15. Из рис. 4.15 следует, что оптимальный фильтр содержит модель формирования полезного

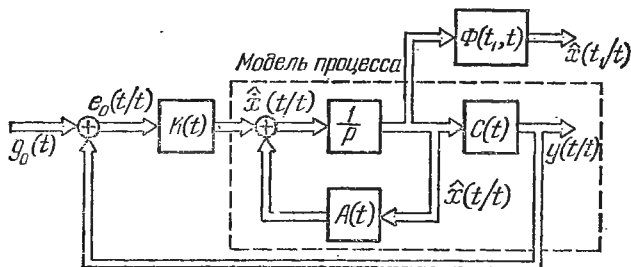


Рис. 4.15. Матричная структурная схема непрерывного оптимального фильтра.

сигнала, осуществляющую слежение за входным сигналом $g_0(t)$. Сигнал $g_0(t)$ в общем случае является многомерным, но может быть и одномерным.

Так как все параметры формирующего фильтра предполагаются известными, то процесс расчета оптимального фильтра сводится к определению матричного коэффициента усиления $K(t)$. Для случая оптимального предсказания Р. Калман получил следующее равенство:

$$\hat{x}(t_1/t) = \Phi(t_1, t) \hat{x}(t/t) \quad (t_1 \geq t). \quad (4.147)$$

Этот результат совпадает со случаем использования винеровской фильтрации (см. § 4.3).

Ошибка оценки переменных состояния может быть записана в виде

$$e(t/t) = x(t) - \hat{x}(t/t), \quad (4.148)$$

Подстановка этого выражения в (4.144) дает дифференциальное уравнение, определяющее ошибку оценки:

$$\frac{d\varepsilon(t/t)}{dt} = A(t)\varepsilon(t/t) + B(t)u(t) - K(t)[v(t) + C(t)\varepsilon(t/t)]. \quad (4.149)$$

Матричная структурная схема, соответствующая (4.149), приведена на рис. 4.16. Введем корреляционную матрицу ошибок оценки переменных состояния оптимальной оценки:

$$P(t) = M[\varepsilon(t/t)\varepsilon'(t/t)] = \\ = M\{[x(t) - \hat{x}(t/t)][x(t) - \hat{x}(t/t)]'\}. \quad (4.150)$$

Начальное значение этой матрицы представляет собой диагональную матрицу

$$P(t_0) = M\{[x(t_0) - \bar{x}_0][x(t_0) - \bar{x}_0]'\} \quad (4.151)$$

и предполагается известным. Совокупность начальных значений переменных состояния $x(t_0)$ характеризуется

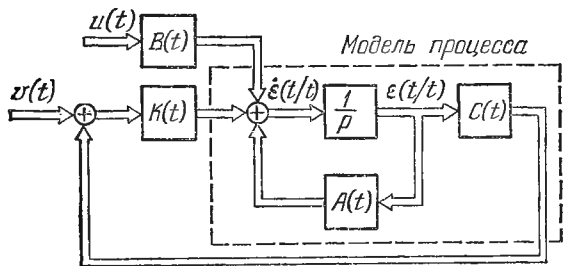


Рис. 4.16. Матричная структурная схема выработки ошибки оценки переменных состояния.

гауссовым распределением и не зависит от $u(t)$. Математическое ожидание для этой совокупности

$$M[x(t_0)] = \bar{x}_0. \quad (4.152)$$

Матричный коэффициент усиления может быть выражен через корреляционную матрицу ошибок

$$K(t) = P(t)C'(t)R^{-1}(t). \quad (4.153)$$

Здесь $R^{-1}(t)$ — матрица, обратная матрице $R(t)$, входящей в (4.135). Корреляционная матрица $P(t)$ может быть

найдена в результате решения матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dP(t)}{dt} = A(t)P(t) + P(t)A'(t) - \\ - P(t)C'(t)R^{-1}(t)C(t)P(t) + B(t)Q(t)B'(t). \quad (4.154)$$

Корреляционное (дисперсионное) уравнение (4.154) является нелинейным дифференциальным уравнением и представляет собой совокупность $0,5n(n+1)$ уравнений типа Риккати. Подобные уравнения встречаются в вариационном исчислении, и они связаны с дифференциальными уравнениями Гамильтона. Решение корреляционного уравнения можно представить в виде

$$P(t) = \Pi(t, P_0, t_0). \quad (4.155)$$

Здесь предполагается, что заданы начальный момент времени t_0 и положительно-определенная матрица $P_0 = P(t_0)$. Найденное значение $P(t)$ позволяет определить оптимальный коэффициент усиления $K(t)$ по формуле (4.153).

Для определения ошибки $e = g - y$ отработки задающего воздействия $g(t) = g_0(t) - v(t)$ введем корреляционную матрицу ошибок (4.145):

$$P_e(t/t) = M\{e(t/t)e'(t/t)\} = \\ = M\{\tilde{C}(t)e(t/t)e'(t/t)\tilde{C}'(t)\} = C(t)P(t/t)C'(t). \quad (4.156)$$

Формула (4.156) позволяет по известной матрице $P(t/t)$ определить корреляционную матрицу $P_e(t/t)$. Таким образом, алгоритм калмановской фильтрации в непрерывном случае образован совокупностью уравнений (4.144), (4.153) и (4.154).

В стационарном случае матрицы $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ не зависят от времени. Корреляционная матрица ошибок $P(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к совокупности постоянных величин. Это значит, что в установившемся состоянии и матрица коэффициентов усиления $K(t)$ также будет совокупностью постоянных величин, т. е. фильтр оказывается стационарным. Его уравнение:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = [A - KC]\hat{x}(t) + Kg_0(t). \quad (4.157)$$

Это уравнение определяет фильтр, совпадающий с фильтром Винера.

Алгоритм фильтра Калмана для дискретных систем. В дискретных системах устройство для получения оптимальной оценки можно рассматривать как линейный фильтр, на вход которого поступает последовательность наблюдаемых величин $g_0(t_0)$, $g_0(t_1)$, ..., $g_0(t_k)$. Вычисление оценки в случае отсутствия помех представляет собой процесс, в котором используется прежняя оценка и последние значения наблюдаемых величин в какой-либо единственный момент времени. Если предположить, что к моменту поступления k -го наблюдения была вычислена оценка на основании $(k-1)$ -го (предыдущего) наблюдения, то доказывается, что оценка к моменту поступления $(k+1)$ -го наблюдения по результатам k наблюдений должна представлять собой линейное выражение вида

$$\hat{x}[k+1/k] = \Phi^*[k+1, k] \hat{x}[k/k-1] + K[k]g[k], \quad (4.158)$$

где

$$\Phi^*[k+1, k] = \Phi[k+1, k] - K[k]C[k]. \quad (4.159)$$

Здесь $\Phi[k+1, k]$ — переходная матрица, $\Phi^*[k+1, k]$ — переходная матрица линейной динамической системы, дающей ошибку оценки, $K[k]$ — матричный коэффициент усиления. После подстановки имеем

$$\begin{aligned} \hat{x}[k+1/k] = & \Phi[k+1, k] \hat{x}[k/k-1] + \\ & + K[k] \{g_0[k] - C[k] \hat{x}[k/k-1]\}. \end{aligned} \quad (4.160)$$

Произведение $\Phi[k+1, k] \hat{x}[k/k-1]$ — оценка функции $x[k+1, k]$, полученная на основе первых $k-1$ наблюдений, т. е. оценка прогноза. Выражение в фигурных скобках (4.160) есть разность между результатом k -го наблюдения входной величины и оценкой его прогноза на основании наблюдений на момент времени $(k-1)$. Матрица $K[k]$ играет роль весовой. При этом произведение $K[k]$ на величину разности в фигурных скобках образует приращение к оценке.

Обозначим ошибку обработки задающего воздействия в виде

$$e[k/k-1] = g[k] - C[k] \hat{x}[k/k-1] = g[k] - y[k/k-1]. \quad (4.161)$$

В соответствии с формулами (4.160) и (4.161) может быть построена структурная схема оптимального фильтра

так, как это изображено на рис. 4.17. Фильтр содержит линейную динамическую систему того же вида, что и исходная система формирования случайного процесса. При этом в каждый данный момент kT на выходе фильтра имеется оценка $y[k/k-1]$, полученная по данным на момент времени $(k-1)T$, а на входе — последнее измерение $g_0[k]$ наблюдаемой величины.

Реализация фильтра требует знания модели случайного процесса и воспроизведения матричного коэффициента усиления $K[k]$.

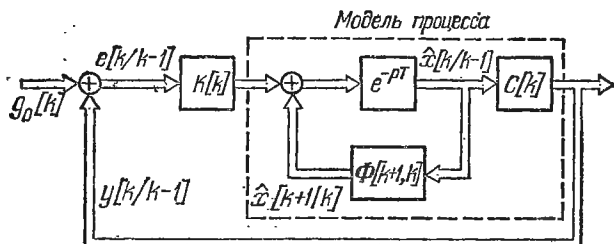


Рис. 4.17. Матричная структурная схема дискретного оптимального фильтра.

Как и в непрерывных системах, ошибка оценки переменных состояния также определяется линейной динамической системой в соответствии с уравнением

$$\begin{aligned} \varepsilon[k+1/k] &= x[k+1] - \hat{x}[k+1/k] = \Phi[k+1, k] \hat{x}[k] + u[k] - \\ &\quad - \Phi^*[k+1, k] \hat{x}[k/k-1] - K[k] C[k] x[k] = \\ &= \Phi^*[k+1, k] \varepsilon[k/k-1] + u[k], \end{aligned} \quad (4.162)$$

где $\Phi^*[k+1, k]$ — переходная матрица для ошибки. Из последнего выражения можно получить рекуррентное соотношение для корреляционной матрицы $P[k]$ ошибок оценки $\varepsilon[k/k-1]$. Так как матрица-столбец $u[k]$ не зависит от матрицы-столбца ошибок $\varepsilon[k/k-1]$, то

$$\begin{aligned} P[k+1] &= M\{\varepsilon[k+1, k] \varepsilon'[k+1, k]\} = \\ &= \Phi[k+1, k] P[k] \Phi'^*[k+1, k] + Q[k], \end{aligned} \quad (4.163)$$

причем в соответствии с (4.138)

$$M\{u[k] u'[k+l]\} = Q[k] \delta_0[l],$$

где $Q[k]$ — симметричная положительно-определенная матрица $n \times n$. Матричный коэффициент усиления определяется выражением

$$K[k] = \Phi[k+1, k] P[k] C' [k] \{C[k] P[k] C' [k]\}^{-1}. \quad (4.164)$$

Подставив (4.159) в формулу (4.163) и используя также выражение для матричного коэффициента усиления, можно получить рекуррентные соотношения для корреляционной матрицы в двух видах:

$$\left. \begin{aligned} P[k+1] &= \{ \Phi[k+1, k] - \\ &\quad - K[k] C[k] \} P[k] \{ \Phi[k+1, k] - \\ &\quad - K[k] C[k] \}' + Q[k], \\ P[k+1] &= \Phi[k+1, k] \{ P[k] - P[k] C' [k] \times \\ &\quad \times (C[k] P[k] C' [k])^{-1} P[k] C[k] \} \times \\ &\quad \times \Phi' [k+1, k] + Q[k]. \end{aligned} \right\} \quad (4.165)$$

Второе равенство (4.165) представляет собой нелинейное рекуррентное уравнение для корреляционной матрицы, которое и может быть использовано для ее нахождения.

Как и в непрерывном случае, для решения задачи должны быть заданы начальные значения переменных состояния $x_0 = x[0]$ и начальные значения корреляционной матрицы $P[0]$. Предполагая, что эта матрица положительно-определенная, можно найти $K[k]$ из (4.165), $\Phi^*[k+1, k]$ — из (4.159) и $P[k+1]$ — из (4.164). Если матрица $Q[k]$ положительно-определенная, то все значения $P[k]$ будут также положительно-определенными и требования для получения $K[k]$ согласно (4.165) будут выполняться на каждом шаге.

Оценка точности обработки задающего воздействия может быть получена из (4.161):

$$\begin{aligned} e[k+1/k] &= g[k+1] - y[k+1/k] = \\ &= C[k+1] \{ x[k+1] - \hat{x}[k+1/k] \} = \\ &= C[k+1] \varepsilon[k+1/k]. \end{aligned} \quad (4.166)$$

Это дает корреляционную матрицу ошибок обработки задающего воздействия

$$\begin{aligned} P_e[k+1/k] &= M \{ e[k+1/k] e' [k+1/k] \} = \\ &= M \{ C[k+1] \varepsilon[k+1/k] \varepsilon' [k+1/k] C' [k+1] \} = \\ &= C[k+1] P[k+1/k] C' [k+1], \end{aligned} \quad (4.167)$$

которая может быть определена из корреляционной матрицы для оценки переменных состояния (4.164).

В рассмотренном оптимальном фильтре оценка в момент времени $t = kT$ получается по результатам предыдущих измерений, т. е. до момента времени $t = (k-1)T$ включительно. Такая постановка характерна, например, для тех случаев, когда оптимальный фильтр включает в себя некоторый непрерывный объект управления. Тогда вследствие того, что в реальных объектах управления начальное значение его переходной функции равно нулю, выходная величина объекта (управляемая величина) не может измениться в момент времени $t = kT$ под действием сигнала, поступившего на вход системы в этот же момент времени.

Однако если оптимальный фильтр представляет собой только счетно-решающую схему на дискретных элементах, предназначенную для выработки оценки какой-либо величины (или величин), например, в задачах сглаживания и упреждения, то такого ограничения нет и входная величина в момент времени $t = kT$ может быть использована для выработки выходной величины в этот же момент времени. Тогда для оптимальной фильтрации с учетом помех измерения получают следующие алгоритмы.

Уравнение оптимального фильтра:

$$\hat{x}[k/k-1] = \Phi[k, k-1] \hat{x}[k-1/k-1] + K[k] \{g_0[k] - C[k] \Phi[k, k-1] \hat{x}[k-1/k-1]\}. \quad (4.168)$$

Уравнение для матричного коэффициента усиления:

$$K[k] = P[k/k-1] C' [k] \times \{C[k] P[k/k-1] C' [k] + R[k]\}^{-1}. \quad (4.169)$$

Дисперсионные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} P[k/k-1] &= \Phi[k/k-1] P[k-1/k-1] \times \\ &\quad \times \Phi' [k, k-1] + B[k] Q[k] B' [k], \\ P[k/k] &= (I - K[k] C[k]) P[k/k-1] = \\ &= [I - P[k/k-1] C' [k] \{C[k] P[k/k-1] \times \\ &\quad \times C' [k] + R[k]\}^{-1}] P[k/k-1]. \end{aligned} \right\} \quad (4.170)$$

Два последних уравнения можно свести к одному, исключив при этом двойной аргумент в корреляционной матрице:

$$P[k] = [I - (\Phi[k, k-1]P[k-1]\Phi'[k, k-1] + B[k]Q[k]B'[k])C'[k]\{C[k](\Phi[k, k-1]P[k-1] \times \\ \times \Phi'[k, k-1] + B[k]Q[k]B'[k])C'[k] + R[k]\}^{-1} \times \\ \times (\Phi[k, k-1]P[k-1]\Phi'[k] + B[k]Q[k]B'[k])]. \quad (4.171)$$

Решение этого нелинейного разностного уравнения и определяет корреляционную матрицу $P[k]$.

В соответствии с уравнениями (4.168)–(4.171) на рис. 4.18 изображена структурная схема оптимального фильтра совместно с моделью процесса и блоком выработки коэффициентов усиления (весовых коэффициентов). Как и ранее, корреляционная матрица ошибок может быть определена на основании формулы, аналогичной (4.167):

$$P_e[k/k] = C[k]P[k/k]C'[k]. \quad (4.172)$$

Эта матрица может быть использована для оценки ошибок обработки задающих воздействий. Как уже отмечалось выше, в реальных системах управления невозможно получить мгновенную реакцию в момент времени $t = kT$ на входной сигнал, поступавший в тот же момент времени. Поэтому схема на рис. 4.18 является идеализированной. В реальных системах управления приходится отступать от этой схемы и использовать субоптимальные системы.

В заключение отметим некоторые обобщения метода оптимальной фильтрации Калмана. В изложенных выше основах предполагалось, что помеха представляет собой белый шум. Возможна постановка вопроса оптимальной фильтрации и в тех случаях, когда эта помеха представляет собой «окрашенный» шум [106].

Требование того, чтобы дисперсии входных случайных процессов были заранее известны, может быть снято. В работе [119] принят метод, согласно которому законы распределения случайных процессов считаются нормальными, но с неизвестными дисперсиями. В результате предлагается оптимальный фильтр, который, наряду с оценкой переменных состояния процесса, позволяет дать оценку

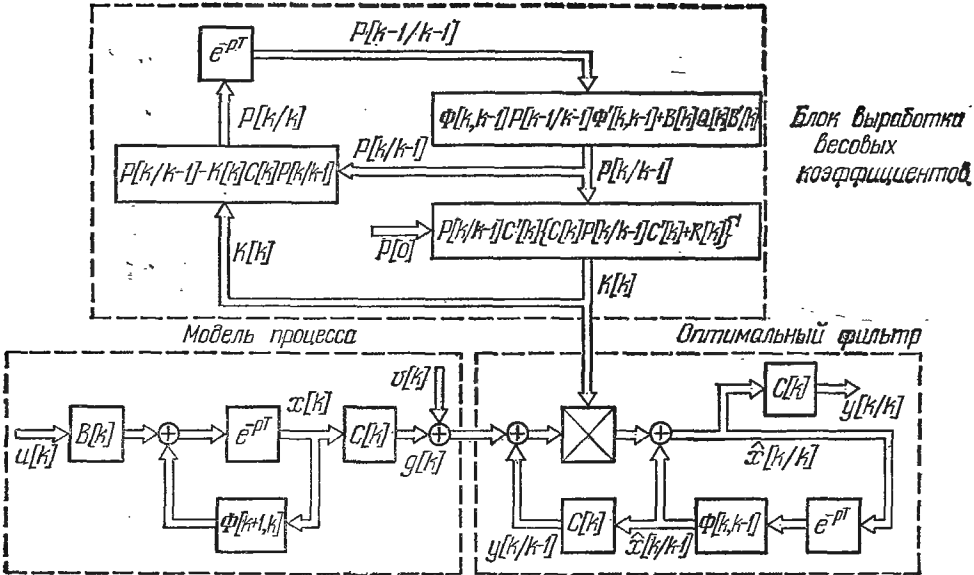


Рис. 4.18. Матричная схема оптимального фильтра при наличии помех измерения,

также и неизвестным дисперсиям. Этот фильтр, по сути дела, оказывается расширенным фильтром Калмана.

В статье [18] дается обзор методов решения задач построения дискретных фильтров Калмана—Бьюси при неизвестных корреляционных матрицах шумов. Для целей анализа эта проблема включает в себя проверку обоснованности модели, используемой в задаче фильтрации Калмана—Бьюси, путем исследования остаточных ошибок фильтрации и оценку ухудшения характеристик системы (анализ ошибок) при неточном моделировании системы.

Для целей синтеза рассматривается проектирование оптимального фильтра, ограничивающего в допустимых пределах ошибки оценки, вызванные отсутствием информации о модели системы, и оценивающего одновременно корреляционные матрицы неизвестных шумов и состояние системы.

Оценке влияния неточного знания априорной информации и возможностям адаптации посвящены работы [81, 86].

§ 4.6. Формирующие фильтры

В одномерных задачах управления при задании непрерывного формирующего фильтра в соответствии с матричным уравнением (4.124) достаточно рассматривать одномерный белый шум ($r=1$). Если пока ограничиться случаем, когда матрица-столбец задающих воздействий сводится к единственной величине $g(t)$, то дополнительно получим условие $l=1$. Тогда помеха наблюдения также сводится к единственной величине $v(t)$.

Дифференциальное уравнение системы, моделирующей полезный сигнал $g(t)$, представим в виде

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} g(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 g(t) = b_0 u(t). \quad (4.172')$$

Здесь $u(t)$ — белый шум, а коэффициенты в левой и правой частях (4.172') в общем случае суть функции времени. Выберем в качестве переменных состояния задающее воздействие $g(t)$ и его первые $n-1$ производных.

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= g(t), \\ x_2(t) &= \dot{g}(t) = \dot{x}_1(t), \\ &\dots \dots \dots \\ x_n(t) &= g^{(n-1)}(t) = \dot{x}_{n-1}(t), \\ \dot{x}_n(t) &= g^{(n)}(t) = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k g^{(k)}(t) + b_0 u(t) = \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{k+1}(t) + b_0 u(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.173)$$
$$\left. \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t), \\ g(t) &= Cx(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.174)$$
$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{vmatrix}, \quad (4.175)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.177)$$

Изображенный на рис. 4.19, а фильтр позволяет вырабатывать кроме самого задающего воздействия $g(t)$ и его первую производную $\dot{g}(t)$, а в случае необходимости и производные более высокого порядка до $g^{(r-1)}(t)$, где $r \leq n$. В этом случае матрица, формирующая выходные величины в формуле (4.174), должна быть записана

В виде

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}. \quad (4.178)$$

Число строк в этой матрице равно r .

Вторая каноническая схема реализации формирующего фильтра изображена на рис. 4.19, б. Она содержит те же

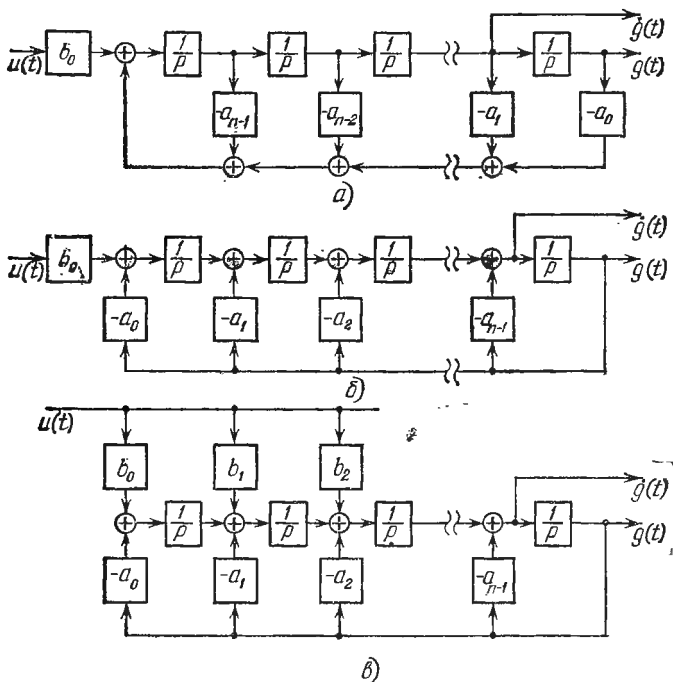


Рис. 4.19. Канонические схемы непрерывных формирующих фильтров.

блоки, но отличается связями между ними. Вторая схема менее удобна при необходимости вырабатывать производные от задающего воздействия и позволяет просто выработать только первую производную. Однако вторая схема несколько удобнее при рассмотрении более общего вида дифференциального уравнения, определяющего

задающее воздействие. Оно может быть записано в виде

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} g(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 g(t) = \\ = b_0 u(t) + b_1 \frac{du(t)}{dt} + \dots + b_s \frac{d^s u(t)}{dt^s}. \quad (4.179)$$

Коэффициенты в левой и правой частях уравнения могут быть в общем случае функциями времени. Дифференцирование белого шума, что вытекает из вида правой части (4.179), в действительности можно избежать, если использовать структурную схему, изображенную на рис. 4.19, в. При выполнении условия $s < n$ дифференцирования в ней не будет.

Схема, изображенная на рис. 4.19, в, описывается тем же матричным уравнением (4.174). Ему будут соответствовать матрица (4.175), а также матрица

$$B = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_s \\ b_{s-2} - a_{n-s+1}b_{s-1} - a_{n-s}b_s \\ \dots \\ b_0 - a_{n-1}b_1 - a_{n-2}b_2 - a_{n-3}b_3 \dots \end{array} \right) \quad (4.180)$$

Схемы на рис. 4.19 содержат идеальные интеграторы с передаточной функцией $W_n(p) = p^{-1}$. Поэтому при моделировании формирующего фильтра посредством использования счетно-решающего устройства на интеграторах его структурная схема должна быть преобразована с целью использования реальных интеграторов с передаточной функцией k_n/p , где k_n — коэффициент передачи, имеющий в большинстве случаев физическую размерность, обратную размерности времени.

В некоторых случаях удобно иметь единичный коэффициент перед переменной в левой части дифференциальных уравнений (4.172') и (4.179). Это можно сделать при постоянстве коэффициента a_0 . Тогда, поделив все

члены уравнений на a_0 , вместо уравнения (4.179) получим

$$A_n \frac{d^n g(t)}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} g(t)}{dt^{n-1}} + \dots + g(t) = \\ = B_0 u(t) + B_1 \frac{du(t)}{dt} + \dots + B_s \frac{d^s u(t)}{dt^s}. \quad (4.181)$$

Здесь $A_i = a_i a_0^{-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и $B_j = b_j a_0^{-1}$ ($j = 0, 1, 2, \dots, s$). При таком изменении матрицы A и B в первом уравнении (4.174) сохраняют свой вид, но коэффициенты a_i и b_j должны быть заменены, соответственно,

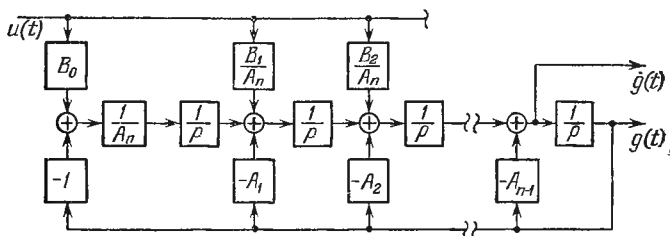


Рис. 4.20. Схема формирующего фильтра с единичной обратной связью.

на коэффициенты A_i и B_j . Структурная схема подобного фильтра с единичной главной обратной связью изображена на рис. 4.20.

Стационарные процессы. Пусть задана спектральная плотность полезного входного сигнала

$$S_g(\omega) = Q \frac{S_1(\omega)}{S_2(\omega)} = Q \frac{\Psi_1(j\omega) \Psi_1(-j\omega)}{\Psi_2(j\omega) \Psi_2(-j\omega)}, \quad (4.182)$$

где $S_1(\omega)$ и $S_2(\omega)$ — некоторые полиномы от ω^2 . Эту спектральную плотность можно трактовать как спектральную плотность сигнала на выходе формирующего фильтра с частотной передаточной функцией

$$H_\Phi(j\omega) = \frac{\Psi_1(j\omega)}{\Psi_2(j\omega)} = \frac{[S_1(\omega)]^+}{[S_2(\omega)]^+} \quad (4.183)$$

при действии на его входе сигнала $u(t)$ типа белого шума со спектральной плотностью $S_u(\omega) = Q$. Передаточная функция (4.182) однозначно определяет дифференциальное уравнение формирующего фильтра вида (4.172) или (4.179).

Для получения уравнения типа (4.181) для случая $B_0 = 0$ полиномы $S_1(\omega)$ и $S_2(\omega)$ должны обладать свойством $S_1(0) = S_2(0) = 1$. Так, например, пусть задана корреляционная функция входного сигнала

$$K_g(\tau) = D_g e^{-\mu|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\mu}{\beta} \sin \beta|\tau| \right),$$

которой соответствует спектральная плотность

$$S_g(\omega) = \frac{2aD_g}{1 + (a^2 - 2b)\omega^2 + b^2\omega^4} = \frac{2aD_g}{|1 + aj\omega + b(j\omega)^2|^2} = Q|H_\Phi(j\omega)|^2, \quad (4.184)$$

где $a = 2\mu(\mu^2 + \beta^2)^{-1}$ и $b = (\mu^2 + \beta^2)^{-1}$. Из последнего выражения следует, что $Q = 2aD_g$, а передаточная функция формирующего фильтра

$$H_\Phi(j\omega) = \frac{1}{1 + aj\omega + b(j\omega)^2}. \quad (4.185)$$

Этой передаточной функции соответствует дифференциальное уравнение вида (4.181) с постоянными коэффициентами

$$b \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + a \frac{dg(t)}{dt} + g(t) = u(t). \quad (4.186)$$

Заметим, что подобная методика нахождения передаточной функции формирующего фильтра и дифференциального уравнения формирующего фильтра может применяться и для нестационарных процессов, если нестационарность явилась следствием прохождения стационарного процесса через интегрирующий элемент (или интегрирующие элементы). Тогда спектральная плотность будет иметь в знаменателе множитель ω^{2r} , где r — число интеграторов. Так как оптимальный фильтр должен иметь степень астатизма r -го порядка, то сигнал ошибки системы управления будет стационарен, а сам оптимальный фильтр — содержать, кроме интеграторов, блоки постоянных коэффициентов.

Типовые стационарные процессы. Рассмотрим некоторые простейшие типовые процессы и им соответствующие формирующие фильтры.

1. Корреляционная функция экспоненциального вида. Корреляционной функции $K_g(\tau) = D_g e^{-\mu|\tau|}$ соответствует

спектральная плотность

$$S_g(\omega) = \frac{2\mu D_g}{\mu^2 + \omega^2} = \frac{2T_1 D_g}{1 + \omega^2 T_1^2} = \frac{2T_1 D_g}{|1 + j\omega T_1|^2}. \quad (4.187)$$

Формирующий фильтр изображен на рис. 4.21. Ему соответствует передаточная функция

$$H_\Phi(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_1} \quad (4.188)$$

и спектральная плотность $S_u = 2T_1 D_g$.

2. Корреляционная функция, содержащая две экспоненты. Корреляционной функции

$$K_g(\tau) = D_g \left(\frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-|\tau|/T_1} - \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-|\tau|/T_2} \right)$$

соответствует спектральная плотность

$$S_g(\omega) = \frac{2(T_1 + T_2) D_g}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)} = \frac{2(T_1 + T_2) D_g}{|(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)|^2}. \quad (4.189)$$

Частотная передаточная функция формирующего фильтра

$$H_\Phi(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}, \quad (4.190)$$

а спектральная плотность шума $S_u(\omega) = 2(T_1 + T_2) D_g$. Формирующий фильтр изображен на рис. 4.22.

3. Нестационарный процесс первого порядка. Если на входе интегратора с передаточной функцией $H_\Phi(j\omega) = (j\omega)^{-1}$ действует белый шум со спектральной плотностью $S_u(\omega) = Q$, то спектральная плотность на выходе интегратора

$$S_g(\omega) = \frac{Q}{\omega^2} \quad (4.191)$$

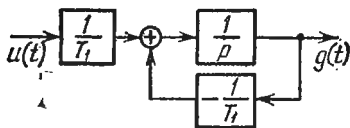


Рис. 4.21. Формирующий фильтр для сигнала с экспоненциальной корреляционной функцией.

будет соответствовать нестационарному процессу. Формирующий фильтр здесь сводится к идеальному интегратору.

4. Типовой входной сигнал следящей системы. Этот процесс может быть получен, если пропустить сигнал с корреляционной функцией $K_g(\tau) = D_1 e^{-\mu|\tau|}$ через интег-

ратор. Спектральная плотность сигнала на входе интегратора

$$S_1(\omega) = S_{\dot{g}}(\omega) = \frac{2\mu D_1}{\mu^2 + \omega^2} = \frac{2T_1 D_1}{1 + \omega^2 T_1^2}. \quad (4.192)$$

Спектральная плотность на выходе интегратора

$$S_g(\omega) = \frac{2T_1 D_1}{\omega^2 (1 + \omega^2 T_1^2)}. \quad (4.193)$$

Формирующий фильтр изображен на рис. 4.23. Частотная передаточная функция формирующего фильтра

$$H_\Phi(j\omega) = \frac{1}{j\omega (1 + j\omega T_1)}. \quad (4.194)$$

Спектральная плотность белого шума на входе $S_u(\omega) = = 2T_1 D_1$, где D_1 — дисперсия скорости изменения задающего воздействия.

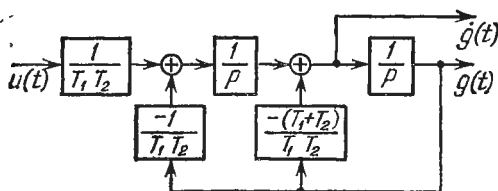


Рис. 4.22. Формирующий фильтр для случая двух экспонент в корреляционной функции.

5. Сигнал типа нерегулярной качки. Спектральная плотность такого сигнала была приведена выше. Она определяется формулой (4.184), а передаточная функция формирующего фильтра — формулой (4.185). Формирующий фильтр изображен на рис. 4.24. Он выполнен по второй канонической схеме (рис. 4.19, б).

Дискретные формирующие фильтры. Для случая выработки в фильтре одномерного задающего воздействия $g[k]$ разностное уравнение может быть записано в виде

$$g[k] + a_{n-1}g[k-1] + \dots + a_0g[k-n] = b_0u[k], \quad (4.195)$$

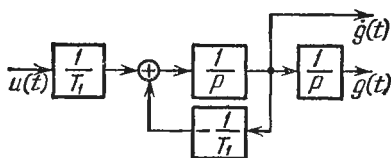


Рис. 4.23. Формирующий фильтр для типового входного сигнала следящей системы.

где n — порядок разностного уравнения, а коэффициенты уравнения в общем случае могут зависеть от времени. Уравнение (4.195) соответствует случаю, когда используются слагаемые с запаздывающим аргументом $g[k-i]$, где $i=1, 2, \dots, n$. Подобные уравнения ближе отвечают действительности по сравнению с уравнениями, содержащими члены вида $g[k+i]$, так как предполагают наличие хранящихся в ячейках памяти дискрет задающего воздействия в предыдущие, а не в будущие моменты времени. Для машинизации этих уравнений требуется наличие элементов задержки.

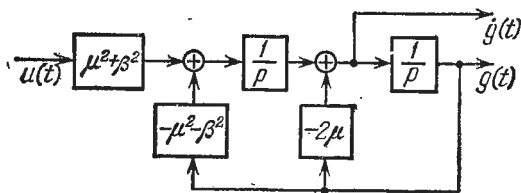


Рис. 4.24. Формирующий фильтр для сигнала типа нерегулярной качки.

Выберем в качестве первой переменной состояния $x_1[k] = g[k]$, а остальные — из условия $x_{i+1}[k] = x_i[k-1]$, где $i=1, 2, \dots, n-1$. Тогда разностное уравнение (4.195) приводится к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} g[k] = x_1[k] &= - \sum_{i=1}^n a_{n-i} x_{i+1}[k] + b_0 u_1[k], \\ x_{i+1}[k] &= x_i[k-1], \quad i=1, 2, \dots, (n-1). \end{aligned} \right\} \quad (4.196)$$

Введем матрицу-столбец переменных состояния $x[k] = \|x_1[k] \dots x_n[k]\|'$ и $x[k-1] = \|x_1[k-1] \dots x_n[k-1]\|'$, а также матрицу-столбец сигналов белого шума $u_1[k] = \|0 \ 0 \dots u[k]\|'$, содержащие n компонент каждая. Тогда система уравнений (4.196) сводится к матричным уравнениям, аналогичным в части выработки задающего воздействия $g[k]$ формуле (4.140):

$$\left. \begin{aligned} x[k] &= \Phi x[k-1] + B u_1[k], \\ g[k] &= C x[k]. \end{aligned} \right\} \quad (4.197)$$

Здесь использованы матрицы-столбцы коэффициентов размером $n \times n$, $n \times 1$ и $1 \times n$:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (4.198)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 \end{bmatrix}', \quad (4.199)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.200)$$

Первый вариант канонической схемы формирующего фильтра, соответствующего разностному уравнению (4.195),

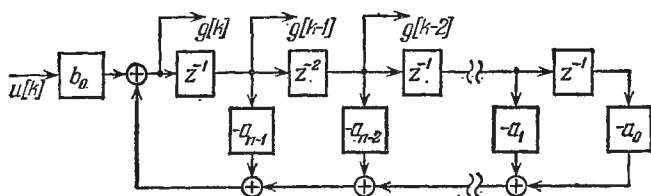


Рис. 4.25. Первый вариант канонической схемы дискретного формирующего фильтра.

изображен на рис. 4.25. Схема содержит n элементов задержки на один такт и блоки в общем случае переменных во времени [коэффициентов. На этой схеме и на последующих для упрощения опущены импульсные элементы.

Изображенный на схеме 4.25 формирующий фильтр позволяет вырабатывать кроме самого задающего воздействия $g[k]$ и его предыдущие значения до $g[k-n]$. В этом случае матрица, формирующая выходные величины в формуле (4.197), будет иметь r строк, где r — число используемых дискрет выходного сигнала:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}. \quad (4.201)$$

Второй вариант канонической схемы формирующего фильтра изображен на рис. 4.26. Здесь входные величины

элементов задержки уже не будут соответствовать значениям $g[k-i]$. Только при $i=0$ и $i=1$ это будет справедливым, что дает возможность достаточно просто вырабатывать две величины — $g[k]$ и $g[k-1]$. Однако второй вариант схемы фильтра более удобен в случае перехода к схеме с отрицательной единичной главной обратной связью, аналогичной изображенной на рис. 4.20.

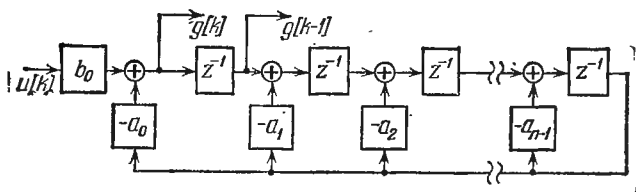


Рис. 4.26. Второй вариант канонической схемы дискретного формирующего фильтра.

В общем случае разностное уравнение, вырабатывающее задающие воздействия, может быть записано в виде неоднородного уравнения

$$g[k] + a_{n-1}g[k-1] + \dots + a_0g[k-n] = b_nu_1[k] + b_{n-1}u_1[k-1] + \dots + b_1u_1[k-n+1]. \quad (4.202)$$

Здесь коэффициенты в левой и правой частях уравнения могут меняться в функции времени. Структурная схема, соответствующая уравнению (4.202), изображена на рис. 4.27. Так как решетчатая функция в правой части (4.202) представляет собой дискретный белый шум, то все значения ее можно считать независимыми величинами. Обозначив $u_1[k-i+1] = u_i[k]$, имеем

$$g[k] + a_{n-1}g[k-1] + \dots + a_0g[k-n] = b_nu_1[k] + b_{n-1}u_2[k] + \dots + b_1u_n[k]. \quad (4.203)$$

Здесь величины $u_1[k], \dots, u_n[k]$ представляют собой белые шумы с одинаковыми дисперсиями. Далее можно заменить действие n -мерного дискретного белого шума эквивалентным одномерным белым шумом с той же дисперсией. В результате вместо (4.203) получим

$$g[k] + a_{n-1}g[k-1] + \dots + a_0g[k-n] = b_0u[k], \quad (4.204)$$

где коэффициент в правой части

$$b_0 = \sqrt{b_n^2 + b_{n-1}^2 + \dots + b_1^2}. \quad (4.205)$$

Структурная схема для уравнения (4.204) сводится к изображенным на рис. 4.25 и рис. 4.26 схемам. Если

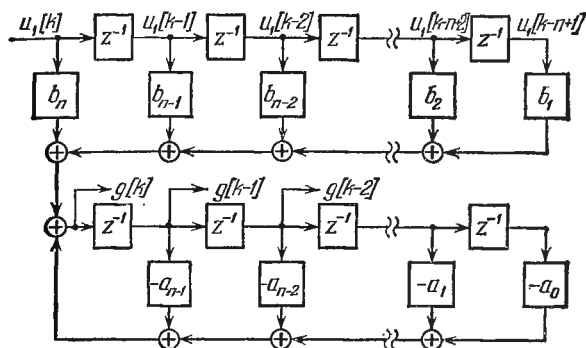


Рис. 4.27. Структурная схема дискретного формирующего фильтра для случая неоднородного разностного уравнения.

коэффициенты разностного уравнения (4.202) суть постоянные числа, то, перейдя в нем к изображениям, можно найти передаточную функцию формирующего фильтра

$$\begin{aligned} H_\Phi(z) &= \frac{G(z)}{U_1(z)} = \frac{b_n + b_{n-1}z^{-1} + \dots + b_1z^{-n+1}}{1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-n}} = \\ &= \frac{b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1 z}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0}. \end{aligned} \quad (4.206)$$

При использовании эквивалентного разностного уравнения (4.204) передаточная функция формирующего фильтра (4.206) упрощается и приобретает вид

$$H_\Phi(z) = \frac{G(z)}{U(z)} = \frac{b_0}{1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-n}}, \quad (4.207)$$

где b_0 определяется формулой (4.205). Пусть задана спектральная плотность стационарного процесса

$$S_g^*(\lambda) = Q \frac{S_1^*(\lambda)}{S_2^*(\lambda)} = Q \frac{\Psi_1^*(j\lambda) \Psi_1^*(-j\lambda)}{\Psi_2^*(j\lambda) \Psi_2^*(-j\lambda)}, \quad (4.208)$$

где $S_1^*(\lambda)$ и $S_2^*(\lambda)$ — некоторые полиномы от λ^2 , а $\Psi_1^*(j\lambda) = [S_1^*(\lambda)]^+$ и $\Psi_2^*(j\lambda) = [S_2^*(\lambda)]^+$. Ее можно представить как спектральную плотность на выходе формирующего фильтра с частотной передаточной функцией

$$H_\Phi^*(j\lambda) = \frac{\Psi_1^*(j\lambda)}{\Psi_2^*(j\lambda)} = \frac{1}{V_Q} [S_g^*(\lambda)]^+, \quad (4.209)$$

если дисперсия входного дискретного белого шума равна Q . Из частотной передаточной функции (4.209) можно получить дискретную передаточную функцию формирующего фильтра $H_\Phi(z)$ подстановкой $j\lambda = 2\omega T^{-1}$, а затем $\omega = (z-1)(z+1)^{-1}$.

Эта передаточная функция может соответствовать выражению (4.206). Тогда целесообразно перейти к передаточной функции (4.207) и ей соответствующему разностному уравнению (4.204). Для них может быть использована структурная схема на рис. 4.25 или 4.26.

Полезно обратить внимание на следующее свойство спектральной плотности (4.208):

$$S_g^*(\lambda) = S_g^*(\lambda) \left| \frac{1 - j\lambda \frac{T}{2}}{1 + j\lambda \frac{T}{2}} \right|^{2q}, \quad (4.210)$$

где q — произвольное целое число. Это дает возможность выбрать частотную передаточную функцию формирующего фильтра в виде

$$H_\Phi^*(j\lambda) = \frac{1}{V_Q} [S_g^*(\lambda)]^+ \left[\frac{1 - j\lambda \frac{T}{2}}{1 + j\lambda \frac{T}{2}} \right]^q, \quad (4.211)$$

что соответствует умножению дискретной передаточной функции фильтра $H_\Phi(z)$ на z^{-q} . Свобода в выборе произвольного числа q дает возможность получить передаточную функцию формирующего фильтра в наиболее удобном виде.

При учете сказанного передаточная функция (4.207) может быть записана в следующем общем виде:

$$H_\Phi(z) = \frac{b_0 z^{-q}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}}. \quad (4.212)$$

Следует, однако, иметь в виду, что вводить запаздывание z^{-q} можно только в формирующем фильтре. При воспроизведении модели процесса в оптимальном фильтре (рис. 4.17 и рис. 4.18) дополнительное запаздывание может исказить результат. Поэтому для модели процесса следует принимать либо схему на рис. 4.17, которая предполагает использование в момент $t = kT$ только предыдущих значений входного сигнала до $t = (k-1)T$, либо схему на рис. 4.18, в которой используется входной сигнал, поступивший в момент $t = kT$.

Типовые дискретные стационарные процессы. Рассмотрим простейшие случаи формирования входных сигналов в дискретных фильтрах.

1. Корреляционная функция экспоненциального вида. Для корреляционной функции $K_g[m] = D_g \exp(-\mu |m| T)$, где $\mu = T_1^{-1}$, спектральная плотность имеет вид (3.59):

$$S_g^*(\lambda) = \frac{2T_3 D_g \left(1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4}\right)}{T (1 + \lambda^2 T_3^2)},$$

где $T_3 = \frac{T}{2} \frac{1+d}{1-d} = \frac{T}{2} \operatorname{cth}\left(\frac{T}{2T_1}\right)$, $d = e^{-T/T_1}$.

Частотная передаточная функция формирующего фильтра

$$H_\Phi^*(j\lambda) = \frac{1 + j\lambda \frac{T}{2}}{1 + j\lambda T_3} \left[\frac{1 - j\lambda \frac{T}{2}}{1 + j\lambda \frac{T}{2}} \right]^q, \quad (4.213)$$

где q — произвольное целое число.

Дискретная передаточная функция

$$H_\Phi(z) = \frac{(1-d)z}{z-d} z^{-q} = \frac{1-d}{1-dz^{-1}} z^{-q}. \quad (4.214)$$

Структурная схема формирующего фильтра для случая $q=0$ и $q=1$ изображена на рис. 4.28. Дисперсия дискрет-

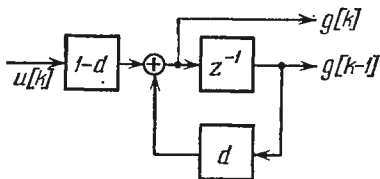


Рис. 4.28. Дискретный формирующий фильтр для сигнала с экспоненциальной корреляционной функцией

ного белого шума $u[k]$ должна быть при этом $Q = 2T_s T^{-1} D_g$. При $q=0$ должен использоваться сигнал $g[k]$. При $q=1$ — сигнал $g[k-1]$. Спектральная плотность каждого из них одинакова и определяется формулой (3.59).

2. Корреляционная функция, содержащая две экспоненты. Корреляционной функции

$$K_g[m] = D_g \left(\frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-|m|T/T_1} - \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-|m|T/T_2} \right) \quad (4.215)$$

соответствует спектральная плотность

$$S_g^*(\lambda) = \frac{2D_g}{T} \left[\frac{T_1 T_{g1}}{T_1 - T_2} \frac{1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4}}{1 + \lambda^2 T_{g1}^2} - \frac{T_2 T_{g2}}{T_1 - T_2} \frac{1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4}}{1 + \lambda^2 T_{g2}^2} \right], \quad (4.216)$$

где

$$T_{g1} = \frac{T}{2} \frac{1 + d_1}{1 - d_1}, \quad T_{g2} = \frac{T}{2} \frac{1 + d_2}{1 - d_2}, \quad d_1 = e^{-T/T_1}, \quad d_2 = e^{-T/T_2}.$$

При выполнении условий $T_1 \gg T$ и $T_2 \gg T$ можно положить $T_{g1} \approx T_1$ и $T_{g2} \approx T_2$. Спектральная плотность (4.216) может быть приведена к виду

$$S_g^*(\lambda) = \frac{2T_s D_g (1 + \lambda^2 \tau_g^2) \left(1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4} \right)}{T (1 + \lambda^2 T_{g1}^2) (1 + \lambda^2 T_{g2}^2)}, \quad (4.217)$$

где

$$T_g = \frac{T_1 T_{g1} - T_2 T_{g2}}{T_1 - T_2} \approx T_1 + T_2,$$

$$\tau_g = \frac{T_{g1} T_{g2} (T_1 T_{g2} - T_2 T_{g1})}{T_1 - T_2} \approx 0.$$

Частотная передаточная функция формирующего фильтра при $q=0$

$$H_\Phi^*(j\lambda) = \left[\frac{T}{2T_s D_g} S_g^*(\lambda) \right]^+ \approx \frac{1 + j\lambda \frac{T}{2}}{(1 + j\lambda T_{g1}) (1 + j\lambda T_{g2})}. \quad (4.218)$$

Дискретная передаточная функция формирующего фильтра для произвольного числа q , полученная из (4.218), может быть представлена в виде

$$H_\Phi(z) = \frac{(1 - d_1)(1 - d_2)z^{-(q+1)}}{(1 - d_1 z^{-1})(1 - d_2 z^{-1})} = \frac{(1 - d_1)(1 - d_2)z^{-(q+1)}}{1 - (d_1 + d_2)z^{-1} + d_1 d_2 z^{-2}}. \quad (4.219)$$

Структурная схема для случаев $q+1=0$ и $q+1=1$ изображена на рис. 4.29. При $q+1=0$ должны использоваться сигналы $g[k]$ и $g[k-1]$, а при $q+1=1$ — сигналы $g_1[k]=g[k-1]$ и $g_1[k-1]=g[k-2]$.

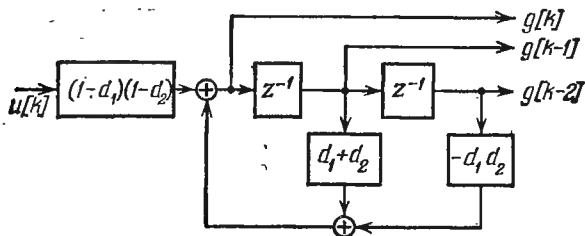


Рис. 4.29. Дискретный формирующий фильтр для случая двух экспонент в корреляционной функции.

3. Нестационарный процесс первого порядка. Если на входе сумматора с передаточными функциями

$$\left. \begin{aligned} H_{\Phi}(z) &= \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \\ H_{\Phi}^*(j\lambda) &= \frac{1+j\lambda T/2}{j\lambda T} \end{aligned} \right\} \quad (4.220)$$

действует белый шум с дисперсией Q , то спектральная плотность сигнала на выходе подобного формирующего фильтра будет

$$S_g^*(\lambda) = Q |H_{\Phi}^*(j\lambda)|^2 = \frac{Q \left(1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4}\right)}{\lambda^2 T^2} = \frac{D_1 \left(1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4}\right)}{\lambda^2}, \quad (4.221)$$

где $Q = D_1 T^2$. В этом случае $D_1 = QT^{-2}$ представляет собой дисперсию скорости изменения входного сигнала. Структурная схема формирующего фильтра содержит элемент запаздывания в цепи единичной положительной обратной связи.

4. Типовой входной сигнал следящей системы. Если скорость изменения входного сигнала не представляет собой белого шума, как в предыдущем случае, а имеет корреляционную функцию экспоненциального вида, то

спектральная плотность ее в соответствии с (3.59) будет

$$S_1^*(\lambda) = \frac{2T_s D_1 \left(1 + \frac{\lambda^2 T_s^2}{4}\right)}{T (1 + \lambda^2 T_s^2)}, \quad (4.222)$$

где D_1 — дисперсия скорости изменения входного сигнала. Частотную передаточную функцию фильтра, формирующего

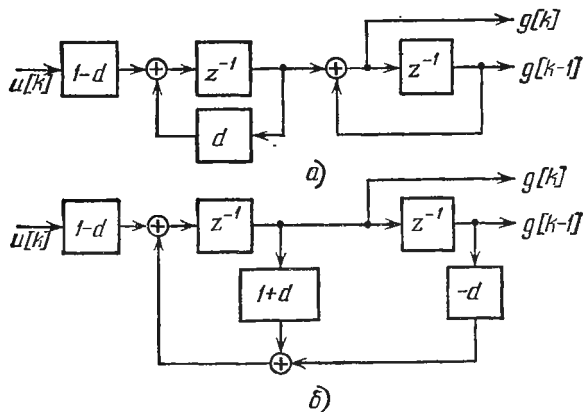


Рис. 4.30. Дискретные формирующие фильтры для типового входного сигнала следящей системы.

полезный сигнал, можно представить как произведение частотных передаточных функций (4.213) и (4.220):

$$H_\Phi^*(j\lambda) = \frac{1 + j\lambda T/2}{1 + j\lambda T_s} \frac{1 + j\lambda T/2}{j\lambda T} \left[\frac{1 - j\lambda T/2}{1 + j\lambda T/2} \right]^q. \quad (4.223)$$

Аналогичным образом для дискретной передаточной функции имеем

$$H_\Phi(z) = \frac{1-d}{1-dz^{-1}} \frac{1}{1-z^{-1}} z^{-q} = \frac{(1-d)z^{-q}}{1-(1+d)z^{-1}+dz^{-2}}. \quad (4.224)$$

Структурная схема формирующего фильтра для $q=1$ показана в двух вариантах на рис. 4.30. На рис. 4.30, а структурная схема модулирует первую форму представления передаточной функции (4.224), т. е. в виде произведения двух передаточных функций. Рис. 4.30, б дает каноническую структуру формирующего фильтра. В обоих случаях дисперсия белого шума на входе $Q = 2T_s T^{-1} D_1$.

При реализации в канонической структуре фильтра (рис. 4.30, б) случая $q=0$ следует перенести точки съема данных влево на входах первого и второго элементов задержки.

Рассмотренные простейшие виды типовых полезных сигналов не исчерпывают, конечно, всех возможных случаев. Однако построение структурных схем для спектральных плотностей иного вида может быть сделано достаточно просто в соответствии с изложенной методикой.

§ 4.7. Использование оптимальных фильтров Калмана в системах управления

При использовании оптимальной калмановской фильтрации в цифровых системах управления возможны два подхода.

Если нет особых ограничений на период дискретности, используемой в системе ЦВМ в части его минимального значения, то представляется возможным выбрать период дискретности настолько малым, что вся система может рассматриваться как непрерывная. В этом случае можно использовать непрерывный вариант оптимального фильтра, который и должен быть реализован в цифровой автоматической системе. Условия, определяющие возможность такого подхода, были сформулированы в начале § 4.4.

Если период дискретности не может быть принят достаточно малым и приходится учитывать его влияние, то должен рассматриваться дискретный вариант оптимального фильтра с его последующей реализацией в цифровой автоматической системе. Заметим, что в этом случае результаты могут быть получены хуже, чем в первом случае. Качество дискретного фильтра иногда можно улучшить, если освободиться от ограничения, накладываемого на число удерживаемых в памяти ЦВМ дискрет входного сигнала. Это число определяется в фильтрах Калмана порядком уравнения, описывающего формирующий фильтр. При увеличении этого числа возможно введение дополнительной обработки входных сигналов, приближающей свойства дискретного фильтра к свойствам непрерывного, но без уменьшения периода дискретности.

При использовании непрерывных фильтров следует иметь в виду, что схема, изображенная на рис. 4.15,

лишь определяет уравнения оптимального фильтра. Практически она не может быть реализована, так как содержит нереальные интеграторы с передаточной функцией $W_{\text{и}}(p) = = p^{-1}$.

В реальных интеграторах непрерывного или дискретного действия передаточная функция может быть записана в виде

$$W_{\text{и}}(p) = \frac{k_{\text{и}}}{p}, \quad (4.225)$$

где $k_{\text{и}}$ — некоторый коэффициент передачи, который не может быть равен безразмерной величине. Так, если входная и выходная величины интегратора имеют одинаковую физическую размерность (напряжения, токи, цифровые коды и т. п.), то передаточная функция интегратора

$$W_{\text{и}}(p) = \frac{1}{\tau p}, \quad (4.226)$$

где τ — некоторая величина, имеющая размерность времени (постоянная времени интегратора). Поэтому схема на рис. 4.15 должна рассматриваться только как исходная. При реализации она должна быть трансформирована к виду, поддающемуся практическому осуществлению и являющемуся эквивалентным исходной схеме. Правила преобразования схемы остаются здесь обычными. Само преобразование имеет целью приблизиться к структуре используемых в системе управления блоков и элементов.

Так, например, если оптимальный фильтр строится как счетно-решающая схема, выполняющая функции выработки информации о задающем воздействии и не содержащая объекта управления, то в ней могут быть использованы одностипные интеграторы. Реализуемая схема такого оптимального фильтра изображена на рис. 4.31. В схеме предусмотрены следующие изменения, которые целесообразно ввести в реальную систему:

1. В схеме предусматривается использование реальных интеграторов с передаточными функциями (4.226).

2. Ошибки измерения учитываются после элемента сравнения, что приводит к обычному виду замкнутой системы.

3. В схему введены чувствительные элементы, измеряющие совокупность ошибок обработки задающего воздей-

ствия $e = g - y$. На выходе чувствительных элементов будет существовать совокупность сигналов ошибок

$$\eta = k_1 e_0 = k_1 e + k_1 v, \quad (4.227)$$

где $k_1 = \|k_{ij}\|$ — диагональная матрица коэффициентов передачи чувствительных элементов размером $l \times l$.

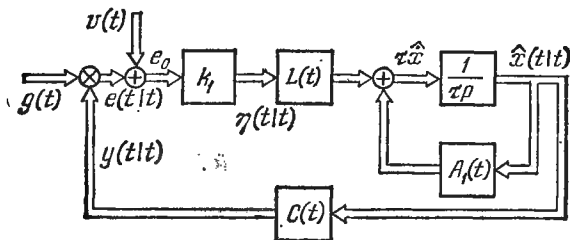


Рис. 4.31. Реализуемая схема непрерывного оптимального фильтра.

Введение реальных интеграторов и чувствительных элементов изменяет другие матрицы. Матрица коэффициентов передачи в обратной связи $A_1 = \tau A$ и матрица коэффициентов усиления $L = k_1^{-1} \tau K$. Уравнение оптимального фильтра (4.146) можно привести здесь к виду

$$\tau \frac{d\hat{x}(t|t)}{dt} = A_1(t) \hat{x}(t|t) + k_1 L e_0(t|t). \quad (4.228)$$

Уравнение (4.228) полностью адекватно уравнению (4.146) и может использоваться наравне с ним. Это же относится и к схеме, изображенной на рис. 4.31, которая отличается от схемы на рис. 4.15 только реализацией, но описывается одинаковыми уравнениями. Элементы матрицы A_1 представляют собой безразмерные числа. Соответствующим выбором переменных состояния во многих случаях можно сделать элементы матрицы $C(t)$ безразмерными числами (в стационарных системах — безразмерными единицами). Тогда будут безразмерными элементы матрицы произведения $k_1 L$. При этом элементы матрицы коэффициентов усиления системы с разомкнутой главной и местной обратными связями, представляющей собой произведение $\tau^{-1} k_1 L$, будут иметь размерность, обратную размерности времени.

Стационарные системы. В стационарных системах матрицы A и C не зависят от времени. Это дает возможность определить передаточные функции разомкнутых систем в виде произведения не зависящей от времени части и изменяющегося во времени коэффициента усиления.

Как следует из рис. 4.15 и 4.31, при размыкании главной обратной связи (точнее, связей) и при равенстве нулю помех можно записать следующее матричное равенство:

$$(pI - A) X(p) = \mathcal{L}\{Ke(t)\} = E_0(p). \quad (4.229)$$

Здесь $E_0(p)$ — матрица изображений Лапласа произведений коэффициентов усиления на ошибку (рассогласование) размером $n \times n$, а I — единичная матрица размером $n \times n$. Отсюда можно найти

$$X(p) = (pI - A)^{-1} E_0(p). \quad (4.230)$$

Далее, для совокупности выходных величин матричное уравнение имеет вид

$$Y(p) = CX(p) = C(pI - A)^{-1} E_0(p). \quad (4.231)$$

Матрица передаточных функций стационарной части системы, соответствующей модели процесса (рис. 4.15), из (4.231)

$$W_c(p) = Y(p) E_0^{-1}(p) = C(pI - A)^{-1}. \quad (4.232)$$

Эта же матрица передаточных функций относится к помехе на входе системы. Полученная формула позволяет пользоваться при реализации оптимальных фильтров хорошо развитым аппаратом передаточных функций. Так, если известна желаемая передаточная функция стационарной части одномерной системы $W_c(p)$ и известна передаточная функция объекта управления $W_0(p)$, то можно определить передаточную функцию последовательного корректирующего звена

$$W_{пз}(p) = \frac{W_c(p)}{W_0(p)}, \quad (4.233)$$

которое требуется ввести в канал управления.

В многомерных системах разница будет заключаться в том, что будет найдена матрица желаемых передаточных

функций разомкнутой системы $W_c(p) = \|W_{ij}(p)\|$, которые должны быть реализованы введением в каждый канал своих корректирующих звеньев.

В силу ограниченности корректирующих средств не всякая оптимальная передаточная функция может быть точно реализована, что может привести к возможности лишь приближенной реализации оптимальной системы.

В дискретном варианте оптимального фильтра также необходимо ввести блок измерителей (рис. 4.32) с диагональной матрицей коэффициентов передачи $k_1 = \|k_{ij}\|_{l \times l}$. Тогда матрица коэффициентов усиления $L = Kk_1^{-1}$.

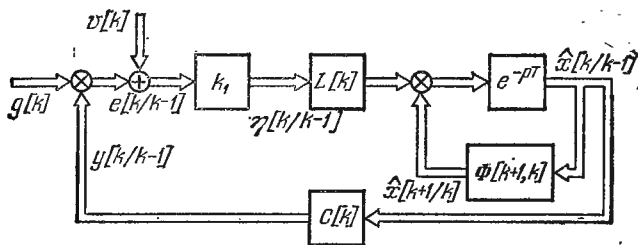


Рис. 4.32. Реализуемая схема дискретного оптимального фильтра.

В стационарных фильтрах можно определить передаточные функции. Аналогично непрерывному фильтру можно записать следующее соотношение для изображений в разомкнутой системе:

$$X(z) = (z^{-1}I - \Phi) \mathcal{Z} \{K[k]e[k]\} = (z^{-1}I - \Phi) E_0(z), \quad (4.234)$$

где $E_0(z)$ — матрица изображений решетчатых функций на входе стационарной части системы, а I — единичная матрица размером $n \times n$. Из (4.234) может быть определена матрица передаточных функций стационарной части системы

$$W_c(z) = Y(z) E_0^{-1}(z) = CX(z) E_0^{-1}(z) = C(z^{-1}I - \Phi). \quad (4.235)$$

Эта же матрица передаточных функций справедлива для помехи во входном сигнале.

Аналогично непрерывному случаю, если известна желаемая передаточная функция стационарной части $W_c(z)$ одномерной системы и известна передаточная функция

объекта управления $W_0(z)$, то можно определить передаточную функцию ЦВМ (корректирующую программу)

$$D(z) = \frac{W_c(z)}{W_0(z)}. \quad (4.236)$$

В многомерном случае эта операция должна быть сделана для всех каналов управления.

В силу ограниченности возможностей программирования, так как можно ориентироваться только на практически реализуемые программы, не всякий оптимальный фильтр может быть точно реализован в ЦАС, что приводит к необходимости использования субоптимальных систем.

Пример 4.6. Рассмотрим задачу построения оптимального фильтра, если спектральная плотность полезного сообщения имеет вид (4.187):

$$S_g(\omega) = \frac{2\mu\Gamma_g}{\mu^2 + \omega^2} = \frac{2T_1 D_g}{1 + \omega^2 T_1^2},$$

что соответствует порядку уравнения формирующего фильтра $n=1$. Спектральная плотность возбуждающего белого шума $Q=2T_1 D_g$. Спектральная плотность помехи измерения $S_v(\omega)=N$.

Примем, что объект управления соответствует аperiодическому звену первого порядка с коэффициентом передачи k_0 и постоянной времени T_0 . Формирующий фильтр изображен на рис. 4.21. Его передаточная функция

$$H_\Phi(p) = \frac{1}{1 + T_1 p}. \quad (4.237)$$

Из структуры формирующего фильтра следует, что $A = -\mu = -T_1^{-1}$, $B = \mu = T_1^{-1}$ и $C = 1$. Подставив эти величины в (4.144), получим дифференциальное уравнение для оптимальной оценки $y = \hat{x}_1$:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\mu y(t) + K(t)[g(t) + v(t) - y(t)]. \quad (4.238)$$

Структурная схема оптимального фильтра, соответствующая уравнению (4.238), изображена на рис. 4.33. Дисперсионное уравнение (4.154) приобретает здесь вид

$$\frac{dP(t)}{dt} = -2\mu P(t) - \frac{P^2(t)}{N} + 2\mu D_g. \quad (4.239)$$

Коэффициент усиления определяется формулой (4.153) через дисперсию ошибки:

$$K(t) = \frac{P(t)}{N}. \quad (4.240)$$

Найдем сначала установившееся решение нелинейного дифференциального уравнения (4.239). Если положить

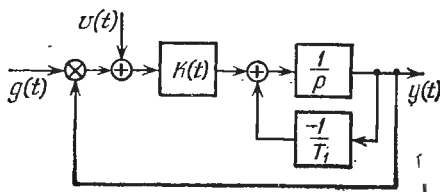


Рис. 4.33. Оптимальный фильтр к примеру 4.6.

левую его часть равной нулю, то получим два решения, одно из которых будет положительно, что требуется для дисперсии ошибки:

$$P(\infty) = \mu N \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2Dg}{\mu N}} \right). \quad (4.241)$$

Использование $P(\infty)$ дает установившееся значение коэффициента усиления из (4.240):

$$K(\infty) = \mu \left(-1 + \sqrt{\frac{2Dg}{\mu N}} \right). \quad (4.242)$$

Если использовать это значение коэффициента в оптимальном фильтре, изображенном на рис. 4.33, то получим случай, определяемый решением уравнения Винера-Хопфа.

Решение дисперсионного уравнения (4.154) может быть получено на ЭВМ или численными методами. На рис. 4.34 изображен аналоговый вычислитель, решающий дисперсионное уравнение (4.239) для рассматриваемого примера. Однако уравнение (4.239) имеет и аналитическое решение. Для начального условия

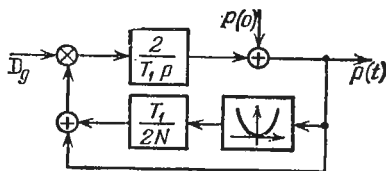


Рис. 4.34. Вычислитель для решения дисперсионного уравнения к примеру 4.6.

$P(0) = D_g$ имеем

$$P(t) = 2\mu D_g \left[\frac{(\gamma + \mu) e^{\gamma t} + (\gamma - \mu) e^{-\gamma t}}{(\gamma + \mu)^2 e^{\gamma t} - (\gamma - \mu)^2 e^{-\gamma t}} \right] =$$

$$= \frac{2\mu D_g}{\gamma + \mu} \left[\frac{1 + \left(\frac{\gamma - \mu}{\gamma + \mu} \right) e^{-2\gamma t}}{1 - \left(\frac{\gamma - \mu}{\gamma + \mu} \right)^2 e^{-2\gamma t}} \right]. \quad (4.243)$$

Здесь использовано обозначение

$$\gamma = \mu \sqrt{1 + \frac{2D_g}{\mu N}}. \quad (4.244)$$

Нормированные кривые процесса изменения дисперсии ошибки при различных значениях величины $2D_g \mu^{-1} N^{-1}$ приведены на рис. 4.35. Числа, поставленные справа

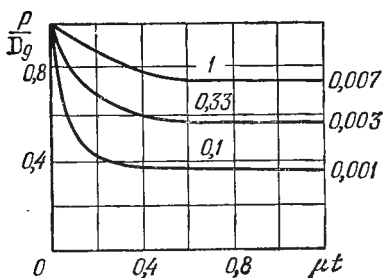


Рис. 4.35. Кривые переходных процессов для дисперсии к примеру 4.6.

у кривых, показывают разность между дисперсией в момент относительного времени $\mu t = 1, 2$ и установившимся значением дисперсии. Передаточная функция стационарной части канала управления в соответствии со схемой на рис. 4.33 и формулой (4.232)

$$W_c(p) = \frac{1}{p + \mu} = \frac{T_1}{1 + T_1 p}. \quad (4.245)$$

Однако реализовать такую передаточную функцию оказывается невозможным. Необходимо преобразовать ее в соответствии с рис. 4.31, чтобы избавиться от множителя T_1 в числителе (4.245). Кроме того, следует учесть, что реальный объект имеет другую передаточную функцию. Это требует введения корректирующих средств с передаточной функцией, определяемой формулой (4.243):

$$\frac{W_c(p)}{W_0(p)} = \frac{1}{k_0} \frac{1 + T_0 p}{1 + T_1 p}. \quad (4.246)$$

Передаточная функция (4.246) может быть реализована посредством введения в канал уравнения пассивного

звена [8]. Полная схема реализуемого оптимального фильтра, т. е. системы автоматического управления, изображена на рис. 4.36. На ней обозначено: ОУ — объект управления, КЗ — корректирующее звено, У — усилитель, ЧЗ — чувствительный элемент.

При переходе к цифровой системе управления в качестве чувствительного элемента будет использоваться преобразователь непрерывной величины в код. Функции усилителя и корректирующего звена будет выполняться ЦВМ совместно с выходным преобразователем кода

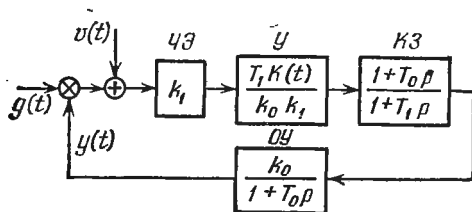


Рис. 4.36. Структурная схема оптимальной системы управления к примеру 4.6.

в непрерывную величину. При выполнении условий $T \ll \ll T_0$ и $T \ll T_1$ проделанный расчет сохраняет свою силу. Алгоритм управления должен при этом обеспечивать получение требуемого коэффициента усиления и передаточной функции корректирующего звена (4.246).

Пример 4.7. Рассмотрим задачу построения оптимальной системы управления с ЦВМ, если спектральная плотность полезного сообщения соответствует нестационарному процессу первого порядка (4.221):

$$S_g^*(\lambda) = \frac{D_1 \left(1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4}\right)}{\lambda^2},$$

где D_1 — дисперсия скорости изменения входного сигнала. Передаточная функция формирующего фильтра (4.220)

$$H_\Phi(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}.$$

Объект управления представляет собой интегрирующее звено с передаточной функцией $W_n(p) = k_0/p$ и дискрет-

ной передаточной функцией при использовании экстраполятора нулевого порядка

$$W_0(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{W_H(p)}{p} \right\} = \mathcal{Z} \left\{ \frac{k_0}{p^2} \right\} = \frac{k_0 T}{z-1}. \quad (4.247)$$

В качестве помехи измерения рассмотрим шумы квантования во входном преобразователе, представляющие собой белый шум со спектральной плотностью

$$S_v^*(\lambda) = \frac{\delta_1^2}{12} = N, \quad (4.248)$$

где δ_1 — цена единицы младшего разряда во входном преобразователе. Структурная схема оптимального фильтра изображена на рис. 4.37. Для рассматриваемого

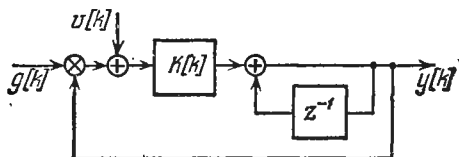


Рис. 4.37. Оптимальный фильтр к примеру 4.7.

случая $\Phi = 1$, $B = 1$, $C = 1$, $Q = D_1 T^2$ и $R = N$. В соответствии с формулами (4.169) и (4.170) коэффициент усиления определяется здесь выражением

$$K[k] = \frac{P[k-1] + D_1 T^2}{P[k-1] + D_1 T^2 + N}. \quad (4.249)$$

Рекуррентное уравнение (4.171), определяющее корреляционную матрицу, приобретает вид

$$P[k] = \left(1 - \frac{P[k-1] + D_1 T^2}{P[k-1] + D_1 T^2 + N} \right) (P[k-1] + D_1 T^2). \quad (4.250)$$

Установившееся значение корреляционной функции можно найти решением уравнения

$$P[\infty] = \left(1 - \frac{P[\infty] + D_1 T^2}{P[\infty] + D_1 T^2 + N} \right) (P[\infty] + D_1 T^2). \quad (4.251)$$

Положительный корень этого уравнения соответствует установившейся дисперсии ошибки

$$P[\infty] = \frac{D_1 T^2}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4N}{D_1 T^2}} \right). \quad (4.252)$$

Установившееся значение коэффициента усиления из (4.249)

$$K[\infty] = K = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4N}{D_1 T^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{4N}{D_1 T^2}} + \frac{2N}{D_1 T^2}}. \quad (4.253)$$

Однако реализация схемы рис. 4.37 не может быть сделана, так как объект имеет передаточную функцию (4.247), отличающуюся от передаточной функции формирующего фильтра $H_\Phi(z)$. Коррекция от ЦВМ здесь также невозможна, так как требует введения множителя z , т. е. упреждения на один такт.

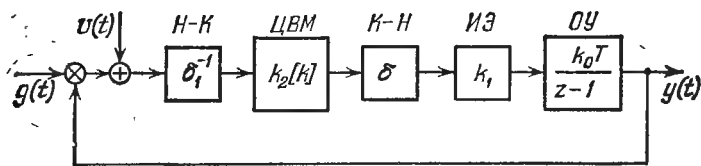


Рис. 4.38. Реализуемая субоптимальная система к примеру 4.7.

Примем в качестве приближенной модели процесса формулу (4.247), что будет означать отход от оптимального построения фильтра. Реализуемая структура системы изображена на рис. 4.38. На схеме использованы следующие обозначения: $H-K$ — входной преобразователь непрерывной величины в код с коэффициентом передачи δ_1^{-1} , где δ_1 — цена младшего разряда, $K-H$ — выходной преобразователь кода в непрерывную величину с коэффициентом передачи, равным цене его младшего разряда δ , ИЭ — исполнительный элемент с коэффициентом передачи k_1 , ОУ — объект управления. Цифровая вычислительная машина должна вырабатывать коэффициент передачи

$$k_2 = \frac{\delta_1 K[k]}{\delta k_0 k_1 T} \quad (4.254)$$

в соответствии с формулами (4.249) и (4.250).

Оценим дополнительную ошибку, вызванную отходом от оптимального построения системы по установившейся

дисперсии ошибки. Передаточная функция разомкнутой системы при оптимальном построении (рис. 4.37)

$$W(z) = \frac{Kz}{z-1}. \quad (4.255)$$

Частотная передаточная функция для этого случая

$$W^*(j\lambda) = \frac{K(1+j\lambda T/2)}{j\lambda T}. \quad (4.256)$$

Эти же функции для субоптимальной системы (рис. 4.38):

$$W_1(z) = \frac{K}{z-1}, \quad (4.257)$$

$$W_1^*(j\lambda) = \frac{K(1-j\lambda T/2)}{j\lambda T}. \quad (4.258)$$

Дисперсия установившейся ошибки в оптимальной системе

$$\begin{aligned} \bar{e}^2 &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{\bar{e}}^*(\lambda) d\lambda}{|1+W(j\lambda)|^2 \left(1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4}\right)} + \\ &+ \frac{NT}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{W^*(j\lambda)}{1+W(j\lambda)} \right|^2 \frac{d\lambda}{1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4}} = \frac{D_1 T^3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{\left| \left(1 + \frac{K}{2}\right) j\lambda T + K \right|^2} + \\ &+ \frac{NTK^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{\left| \left(1 + \frac{K}{2}\right) j\lambda T + K \right|^2} = \frac{D_1 T^2 + NK^2}{2K(1+K/2)}. \quad (4.259) \end{aligned}$$

Аналогичный расчет для субоптимальной системы дает

$$\bar{e}_1^2 = \frac{D_1 T^2 + NK^2}{2K(1-K/2)}. \quad (4.260)$$

Относительное возрастание установившейся дисперсии в субоптимальной системе

$$\frac{\bar{e}_1^2 - \bar{e}^2}{\bar{e}^2} = \frac{K}{1-K/2}. \quad (4.261)$$

Заметим, что при малых значениях периода дискретности коэффициент усиления в установившемся режиме

определяется приближенным равенством

$$K \approx \sqrt{\frac{D_1 T^2}{N}}. \quad (4.262)$$

Поэтому формула (4.261) приобретает вид

$$\frac{\bar{e}_1^2 - \bar{e}^2}{\bar{e}^2} \approx \frac{\sqrt{\frac{D_1 T^2}{N}}}{1 - \sqrt{\frac{D_1 T^2}{N}}}. \quad (4.263)$$

При $T \rightarrow 0$ установившиеся дисперсии ошибки в оптимальной и субоптимальной системах совпадают, что отвечает физике явления.

ДИНАМИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ЦАС ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ВХОДНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

§ 5.1. Общие положения

При использовании для целей динамического синтеза методов оптимальной фильтрации, рассмотренных в предыдущей главе, необходимо априорное знание статистических характеристик входных сигналов или переход к более сложным системам, содержащим устройства адаптации. Последнее обычно серьезно усложняет систему управления, что снижает эффективность ее эксплуатации. Поэтому задача динамического синтеза при малом объеме априорной информации относится в настоящее время к важнейшим.

Кроме того, задача оптимальной фильтрации предполагает выбор наилучшего решения в соответствии с принятым критерием качества из *возможных* решений поставленной задачи, определяемых свойствами используемых элементов. При этом найденное оптимальное решение может быть неудовлетворительным с точки зрения выполнения основной задачи рассматриваемой системы управления. В связи с этим обеспечение *заданной* (а не полученной в данной ситуации) точности работы системы управления остается одной из главнейших исходных предпосылок ее синтеза.

Требуемая точность работы системы может задаваться различным образом. Наиболее употребительные формы задания требований по точности предусматривают ограничение среднеквадратичного значения ошибки системы (или дисперсии ошибки) либо ограничение максимальной ошибки. Эти формы задания точности удобны тем, что они могут быть достаточно просто использованы практически во всех системах автоматического управления на основании анализа условий их работы. Требование ограничения максимальной ошибки системы вследствие своей простоты и наглядности, вероятно, останется главнейшим критерием ее качества в ближайшем обозримом будущем.

Следует заметить, что задача обеспечения заданной точности системы автоматического управления при учете влия-

ния мешающих факторов может и не иметь решения в данной ситуации, т. е. для заданных элементов системы с действующими в них помехами, что может привести к необходимости разработки новых элементов и даже новых принципов их построения. Это отличает задачу синтеза системы управления с заданными точностными характеристиками от задачи оптимального построения системы при заданных элементах и делает ее во многих случаях значительно более сложной и ответственной.

Так как при разработке систем автоматического управления приходится удовлетворять большому числу противоречивых требований (см. § 4.1), то в данной главе делается попытка изложения такого метода синтеза, при котором реализация оказывается наиболее простой. Это было названо в § 4.2 *оптимальным синтезом по заданным качественным показателям*. В качестве критерия «простоты» в § 4.2 предлагалось использовать интегральную оценку (4.2). Следует заметить, однако, что строгое обоснование наиболее простого решения задачи оказывается весьма сложным [7]. Поэтому излагаемая ниже методика носит скорее эвристический характер, что не снижает, однако, ее практической ценности.

В качестве исходной априорной информации о полезных входных сигналах используются минимальные сведения, которые сводятся к ограничению величины входного воздействия, а также к ограничению первой, второй и, возможно, более высоких производных от полезного входного сигнала. Кроме того, возможно использование аналогичных сведений о возмущающих воздействиях в рассчитываемой системе. Все эти сведения обычно могут быть оценены сравнительно достоверно.

Не исключено, конечно, что при разработке системы автоматического управления имеется более широкая априорная информация о входных сигналах. Это может быть, например, при проектировании систем, функционирующих в условиях движения какого-либо объекта на развитом морском волнении, статистические характеристики которого изучены сравнительно хорошо. Возможны и другие подобные ситуации. В этих случаях дополнительная информация позволяет получить более подробные сведения о поведении системы автоматического управления, не ограничиваясь оценкой максимальной или среднеквадратичной ошибок (см. главу 3).

Излагаемая ниже методика динамического синтеза рассматривается, в основном, применительно к одномерным системам управления и базируется на частотных представлениях и методах. Все основные положения методики расчета изучаются вначале применительно к непрерывным системам, а затем эти положения распространяются на дискретные системы. Это вносит единообразие в синтез непрерывных и дискретных систем, что позволяет рассматривать их с одинаковых позиций. Такой подход полезен тем, что в случаях, когда период дискретности относительно мал и его выбор определяется факторами, не связанными с динамическим синтезом, цифровая система может рассматриваться как непрерывная. Условия этого были отмечены в § 4.4. В иных случаях в процессе синтеза необходимо определить требуемое значение периода дискретности, что заставляет вести расчет системы как дискретной. Сохранение единой методики расчета позволяет в каждом конкретном случае более точно определить допустимость рассмотрения системы как непрерывной или необходимость учета влияния квантования по времени.

Методика динамического синтеза иллюстрируется построением логарифмических частотных характеристик, что, вообще говоря, не является обязательным и служит лишь для наглядности изложения. Все расчетные соотношения могут использоваться и без построения частотных характеристик.

§ 5.2. Обеспечение требуемой точности воспроизведения полезного сигнала. Предельные фильтры

Будем исходить из требования ограничения максимальной ошибки системы управления при воспроизведении полезного входного сигнала (задающего воздействия), который для непрерывного случая обозначим $g(t)$. Обозначим действительное значение управляемой величины $y(t)$. Тогда ошибка воспроизведения

$$e(t) = g(t) - y(t). \quad (5.1)$$

Структура одномерной непрерывной системы с единичной главной обратной связью изображена на рис. 5.1, а. Для дискретной одномерной системы ошибка воспроизведения, рассматриваемая в дискретные моменты

времени $t = nT$, будет

$$e[n] = g[n] - y[n]. \quad (5.2)$$

Структура дискретной системы с единичной главной обратной связью изображена на рис. 5.1, б. Требования по точности воспроизведения наиболее просто могут быть сформулированы для гармонического входного сигнала, изменяющегося по зависимости $g(t) = g_{\max} \sin(\omega_k t + \psi_k)$, где $g_{\max}$ — амплитуда, ω_k — угловая частота, а ψ_k — начальная фаза. Предполагается, что амплитуда и частота заданы, а начальная фаза имеет произвольное значение.

Амплитуда ошибки определяется известным соотношением

$$e_{\max} = \frac{g_{\max}}{|1 + W(j\omega_k)|}, \quad (5.3)$$

где $W(j\omega_k)$ — частотная передаточная функция разомкнутой системы при $\omega = \omega_k$. Так как в реальных системах обычно имеет место неравенство $e_{\max} \ll y_{\max}$, из которого следует неравенство $|W(j\omega_k)| \gg 1$, то формула (5.3) с большой точностью может быть заменена приближенной:

$$e_{\max} \approx \frac{g_{\max}}{|W(j\omega_k)|}. \quad (5.4)$$

Формула (5.4) позволяет установить требования к низкочастотной части л. а. х. разомкнутой системы. Для того чтобы воздействие (5.1) воспроизводилось с максимальной ошибкой не более $e_{\max}^0$, л. а. х. проектируемой системы должна проходить не ниже контрольной точки A_k с координатами

$$\omega = \omega_k, \quad L(\omega_k) = 20 \lg |W(j\omega_k)| = 20 \lg \frac{g_{\max}}{e_{\max}^0}. \quad (5.5)$$

На рис. 5.2, а построена контрольная точка с указанными координатами (5.5) и низкочастотная часть л. а. х. системы, в которой удовлетворяется условие того, чтобы ошибка не превышала заданного значения $e_{\max}^0$.

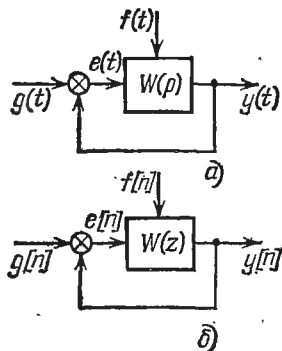


Рис. 5.1. Непрерывная и дискретная системы управления.

В дискретных системах все оказывается аналогичным при выполнении условия $\omega_k \ll T^{-1}$. Тогда и действительная частота входного воздействия ω_k может быть заменена псевдочастотой

$$\lambda_k = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_k T}{2} \approx \omega_k. \quad (5.6)$$

Ошибка системы в дискретные моменты времени $t = nT$ не будет превышать заданного максимального значения

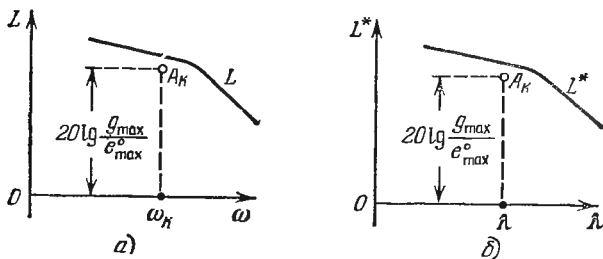


Рис. 5.2. Контрольные точки для л. а. х. из условия точности.

$e_{\max}^0$, если л. а. х. системы будет проходить не ниже контрольной точки A_k с координатами

$$\lambda = \lambda_k, \quad L^*(\lambda_k) = 20 \lg |W^*(j\lambda_k)| = 20 \lg \frac{g_{\max}}{e_{\max}^0}, \quad (5.7)$$

где $W^*(j\lambda_k)$ — частотная передаточная функция разомкнутой системы при значении псевдочастоты $\lambda = \lambda_k$. Построение показано на рис. 5.2, б.

Заметим, что принятое условие $\omega_k \ll T^{-1}$ должно выполняться в цифровых системах всегда, так как иначе полезное воздействие не может быть воспроизведено достаточно точно.

Ограниченные значения скорости и ускорения входного сигнала. Пусть на входе системы известны максимальное по модулю значение первой производной $\dot{g}_{\max}$ (скорости) и максимальное по модулю значение второй производной $\ddot{g}_{\max}$ (ускорения) входного сигнала $g(t)$. При этом не накладывается никаких других ограничений на вид этого сигнала. Это может быть детерминированный или случайный сигнал с любой спектральной плотностью. Априорная

информация об этом сигнале сведена к минимуму, и определяется величинами $\dot{g}_{\max}$ и $\ddot{g}_{\max}$, которые в большинстве случаев могут быть легко оценены.

Для заданных значений $\dot{g}_{\max}$ и $\ddot{g}_{\max}$ подберем эквивалентный режим гармонического воздействия. Рассмотрим такой эквивалентный режим

$$g_{\vartheta}(t) = g_{\vartheta \max} \sin(\omega_{\vartheta} t + \psi_{\vartheta}), \quad (5.8)$$

который характеризуется максимальным значением первой производной $\omega_{\vartheta} g_{\vartheta \max} = \dot{g}_{\max}$ и максимальным значением

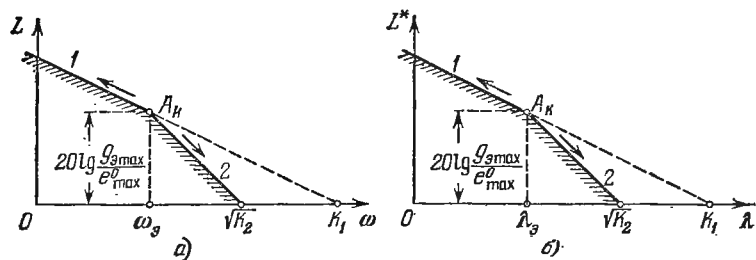


Рис. 5.3. Запретные области по условиям точности для астатических систем.

второй производной $\omega_{\vartheta}^2 g_{\vartheta \max} = \ddot{g}_{\max}$. Для этого режима можно определить частоту и амплитуду

$$\omega_{\vartheta} = \frac{\ddot{g}_{\max}}{\dot{g}_{\max}}, \quad (5.9)$$

$$g_{\vartheta \max} = \frac{\dot{g}_{\max}^2}{\ddot{g}_{\max}} \quad (5.10)$$

при произвольном значении начальной фазы ψ_{ϑ} . В соответствии с формулами (5.9) и (5.10) на рис. 5.3, а построена контрольная точка A_K .

Если по-прежнему $\omega_{\vartheta} \ll T^{-1}$, то частоту ω_{ϑ} можно заменить на псевдочастоту $\lambda_{\vartheta} \approx \omega_{\vartheta}$. По вычисленным значениям ω_{ϑ} и $g_{\vartheta \max}$ при заданной величине максимальной ошибки $e_{\max}^0$ можно построить для л. а. х. $L^*(\lambda)$

контрольную точку A_k с координатами

$$\lambda_9 \approx \frac{\ddot{g}_{\max}}{g_{\max}}, \quad (5.11)$$

$$L^*(\lambda_9) = 20 \lg |W^*(j\lambda_9)| = 20 \lg \frac{\dot{g}_{\max}}{e_{\max}^0 \ddot{g}_{\max}}. \quad (5.12)$$

Построение контрольной точки A_k показано на рис. 5.3, б.

Рассмотрим теперь режим эквивалентного гармонического задающего воздействия, в котором амплитуда первой производной по-прежнему равна максимальному значению $\dot{g}_{\max}$, а амплитуда второй производной меньше максимального значения $\ddot{g}_{\max}$. Тогда при уменьшении амплитуды второй производной в соответствии с (5.9) частота контрольной точки ω_9 будет пропорционально уменьшаться, а амплитуда $g_{9 \max}$ в соответствии с (5.10) будет пропорционально возрастать. При этом контрольная точка A_k на рис. 5.3, а будет перемещаться в область более низких частот (влево) по прямой, имеющей отрицательный наклон 20 дБ/дек (единичный наклон). Если амплитуду второй производной устремить к нулю, то частота $\omega_9 \rightarrow 0$. Это соответствует режиму работы системы управления с постоянной скоростью $\dot{g} = \dot{g}_{\max}$. Заданное значение максимальной ошибки воспроизведения задающего воздействия связано в этом случае с $\dot{g}_{\max}$ зависимостью

$$K_1 = \frac{\dot{g}_{\max}}{e_{\max}^0}, \quad (5.13)$$

где K_1 [с⁻¹] — предельное значение общего коэффициента усиления (добротности по скорости) системы с астатизмом первого порядка, ниже которого в рассчитываемой системе нельзя иметь реальный общий коэффициент усиления разомкнутой системы при заданных значениях $e_{\max}^0$ и $\dot{g}_{\max}$.

Рассмотрим теперь эквивалентный гармонический входной режим с амплитудой второй производной входного воздействия, равной максимальному значению $\ddot{g}_{\max}$, и амплитудой первой производной, меньшей заданного значения $\dot{g}_{\max}$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что контрольная точка A_k (рис. 5.3, а) будет пере-

мещаться в область более высоких частот, двигаясь по прямой, имеющей отрицательный наклон 40 дБ/дек (двойной наклон). Квадрат частоты точки пересечения этой прямой с осью абсцисс равен предельному коэффициенту усиления разомкнутой системы (добротности по ускорению)

$$K_2 = \frac{\ddot{g}_{\max}}{e_{\max}^0}. \quad (5.14)$$

Ниже этого предельного значения не может быть выбран общий коэффициент усиления разомкнутой системы с астатизмом второго порядка. Область, расположенная ниже двух пересекающихся прямых с отрицательными наклонами 20 дБ/дек и 40 дБ/дек, представляет собой запретную область для л. а. х. проектируемой системы. При работе с ограниченными значениями первой и второй производных от входного воздействия, не превышающими $\dot{g}_{\max}$ и $\ddot{g}_{\max}$, максимальная ошибка системы не будет превышать заданного значения $e_{\max}^0$. При этом должно выполняться условие того, что вся запретная область расположена левее частоты $\omega = T^{-1}$.

Если считать, что соотношения между максимальными и среднеквадратичными значениями одинаковы или примерно одинаковы для процессов $g(t)$, $y(t)$ и $e(t)$, то координаты контрольной точки в непрерывном случае (рис. 5.3, а) могут быть найдены для центрированных случайных процессов из выражений

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D_2}{D_1}}, \quad (5.15)$$

$$L(\omega_0) = 20 \lg \frac{D_1}{\sqrt{D_e^0 D_2}}. \quad (5.16)$$

Здесь D_1 — дисперсия первой производной входного сигнала (скорости), D_2 — дисперсия второй производной входного сигнала (ускорения), D_e^0 — допустимая дисперсия ошибки воспроизведения полезного входного сигнала. Заметим, что соотношения между максимальными и среднеквадратичными значениями оказываются строго одинаковыми для нормального закона распределения.

Как и ранее, для дисперсии второй производной входного сигнала, меньшей чем заданное значение D_2 , контрольная точка A_k (рис. 5.3, а) будет смещаться влево по

прямой с отрицательным наклоном 20 дБ/дек. Если $D_2 \rightarrow 0$, то предельное значение коэффициента усиления системы с астатизмом первого порядка (среднеквадратичной добротности по скорости), аналогично формуле (5.13), будет

$$K_1 = \sqrt{\frac{D_1}{D_e^0}}. \quad (5.17)$$

При уменьшении дисперсии первой производной входного сигнала, как и ранее, контрольная точка A_k будет двигаться вправо по прямой с отрицательным наклоном 40 дБ/дек.

При стремлении дисперсии первой производной к нулю, аналогично формуле (5.14), будем иметь предельное значение коэффициента усиления системы с астатизмом второго порядка (среднеквадратичную добротность по ускорению)

$$K_2 = \sqrt{\frac{D_2}{D_e^0}}. \quad (5.18)$$

Прямые линии с отрицательными наклонами 20 дБ/дек и 40 дБ/дек (рис. 5.3, а) формируют запретную область для л. а. х. разомкнутой системы. Если л. а. х. будет проходить выше запретной области, то в замкнутой системе дисперсия ошибки будет не больше заданного значения D_e^0 . Аналогичным образом может быть определена запретная область для дискретного случая (рис. 5.3, б) при условии, что вся эта область расположена левее частоты $\omega = T^{-1}$.

Для того чтобы в реальной системе управления действительная точность воспроизведения задающего воздействия соответствовала бы принятой для построения запретной области, важным условием оказывается наличие в замкнутой системе достаточного запаса устойчивости. Вопрос обеспечения необходимого запаса устойчивости будет рассмотрен ниже. Здесь можно лишь заметить, что выполнение обычных критериев запаса устойчивости автоматического управления [8] оказывается достаточным для того, чтобы построенная запретная область для л. а. х. (рис. 5.3) гарантировала получение желаемой точности.

Заметим попутно, что, как следует из вида запретной области на рис. 5.3, задание ограничений только на первую и вторую производные входного сигнала при отсут-

ствии ограничений на сам сигнал $g(t)$ приводит к необходимости использовать только астатические системы автоматического управления.

Типовые передаточные функции астатических систем. Для многих практически важных случаев рассмотренная методика обеспечения требуемой точности воспроизведения задающего воздействия может быть в известной мере обоснована. Это, в частности, относится к системам с типовыми передаточными функциями, которые будут рассмотрены более подробно в § 5.3 и § 5.4. Для упрощения изложения рассмотрение начнем с непрерывных систем.

Пусть спектральная плотность скорости изменения задающего воздействия $S_1(\omega)$ имеет вид, изображенный на рис. 3.9, в. Дисперсия скорости

$$D_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} N d\omega = \frac{N(\beta_2 - \beta_1)}{\pi}. \quad (5.19)$$

Дисперсия второй производной

$$D_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_1(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} N \omega^2 d\omega = \frac{N(\beta_2^3 - \beta_1^3)}{3\pi}. \quad (5.20)$$

В соответствии с этими значениями можно построить запретную область вида, изображенного на рис. 5.3, а. Для этой запретной области частота контрольной точки из (5.15)

$$\omega_s = \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} = \sqrt{\frac{\beta_1^3 + \beta_1\beta_2 + \beta_2^3}{3}}. \quad (5.21)$$

Заметим, что для периодического режима $\beta_1 \rightarrow \beta$ и $\beta_2 \rightarrow \beta$. Тогда $\omega_s = \beta$. Предельный коэффициент усиления системы с астатизмом первого порядка определяется формулой (5.17), а системы с астатизмом второго порядка — формулой (5.18). В эти формулы входит допустимая дисперсия ошибки D_e^0 , которая должна быть задана.

Выберем систему с астатизмом первого порядка простейшего вида так, чтобы передаточная функция разомкнутой системы была бы $W(p) = K_1/p$, где K_1 определяется формулой (5.17). Подсчитаем действительную дисперсию ошибки в рассматриваемой системе D_e и проверим условие того, чтобы она была не больше заданного значения.

Спектральная плотность ошибки

$$S_e(\omega) = \frac{\omega^2}{K_1^2 + \omega^2} \frac{N}{\omega^2} \quad (\beta_1 \leq |\omega| \leq \beta_2). \quad (5.22)$$

Дисперсия ошибки в рассматриваемой системе

$$D_e = \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{N}{K_1^2 + \omega^2} d\omega = \frac{N}{\pi K_1} \left(\arctg \frac{\beta_2}{K_1} - \arctg \frac{\beta_1}{K_1} \right). \quad (5.23)$$

Так как $|\arctg x| < |x|$, то из последнего равенства вытекает условие

$$D_e < \frac{N(\beta_2 - \beta_1)}{\pi K_1^2} = \frac{D_i}{K_1^2} = D_e^0. \quad (5.24)$$

Таким образом, при любых значениях β_1 и β_2 дисперсия ошибки в выбранной системе управления не превышает заданного значения. Только в предельном случае, когда $\beta_1 \rightarrow \beta$ и $\beta_2 \rightarrow \beta_1$, что соответствует случаю гармонического входного сигнала, получается условие $D_e \rightarrow D_e^0$.

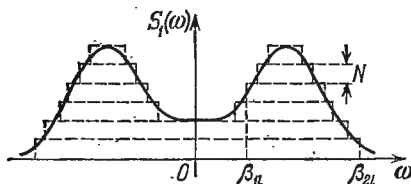


Рис. 5.4. Замена произвольной спектральной плотности суммой равномерных спектров.

Аналогичный пример может быть рассмотрен и для дискретного случая при условии выполнения неравенств $\beta_1 \ll T^{-1}$ и $\beta_2 \ll T^{-1}$, где T — период дискретности.

Покажем теперь, что полученный результат можно распространить на спектральную плотность $S_1(\omega)$ любого вида. На рис. 5.4 изображена спектральная плотность $S_1(\omega)$ произвольного вида, приближенно представляемая в виде совокупности равномерных спектров высотой N и протяженностью от $\pm \beta_{1i}$ до $\pm \beta_{2i}$, где $i = 1, 2, \dots, n$. Дисперсия скорости для совокупности равномерных спектров

$$D_1 = \frac{N}{\pi} \sum_{i=1}^n (\beta_{2i} - \beta_{1i}). \quad (5.25)$$

Дисперсия ускорения

$$D_2 = \frac{1}{3\pi} \sum_{i=1}^n (\beta_{2i}^2 - \beta_{1i}^2). \quad (5.26)$$

Действительная дисперсия ошибки системы при действии совокупности равномерных спектров в соответствии с (5.23) будет

$$D_e = \frac{N}{\pi K_1} \sum_{i=1}^n \left(\arctg \frac{\beta_{2i}}{K} - \arctg \frac{\beta_{1i}}{K} \right). \quad (5.27)$$

Отсюда следует:

$$D_e < \frac{N}{\pi K_1} \sum_{i=1}^n (\beta_{2i} - \beta_{1i}) = \frac{D_1}{K_1^2} = D_e^0. \quad (5.28)$$

При бесконечном уменьшении высоты равномерных спектров и при одновременном бесконечном увеличении их числа можно аппроксимировать исходную спектральную плотность $S_1(\omega)$ с любой степенью точности. Следовательно, доказано условие того, что действительная дисперсия ошибки $D_e \leq D_e^0$, будет справедливо при любом виде спектральной плотности $S_1(\omega)$, но при ограниченных значениях D_1 и D_2 .

Усложним теперь передаточную функцию системы в разомкнутом состоянии и представим ее в виде

$$W(p) = \frac{K_1}{p(1+T_1 p)}. \quad (5.29)$$

Выполним условие достаточно большого запаса устойчивости в замкнутой системе. Примем, например, что корни характеристического уравнения замкнутой системы

$$T_1 p^2 + p + K_1 = K_1(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) = 0 \quad (5.30)$$

являются вещественными отрицательными. Это будет при выполнении неравенства $T_1 < 0,25K_1^{-1}$. Выберем общий коэффициент усиления разомкнутой системы в соответствии с формулой (5.17). Л. а. х. разомкнутой системы изображена на рис. 5.5, а. Найдем действительную диспер-

сию ошибки в системе с передаточной функцией (5.29):

$$D_e = \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{N (1 + \omega^2 T_1^2) d\omega}{K_1^2 (1 + \omega^2 \tau_1^2) (1 + \omega^2 \tau_2^2)} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{N}{K_1^2} \left(\frac{A_1}{1 + \omega^2 \tau_1^2} + \frac{A_2}{1 + \omega^2 \tau_2^2} \right) d\omega. \quad (5.31)$$

Здесь τ_1 и τ_2 — постоянные времени, определяемые корнями характеристического уравнения замкнутой системы:

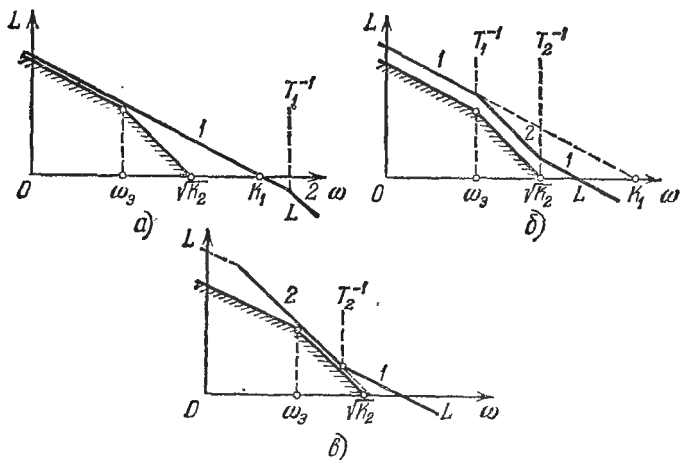


Рис. 5.5. Расположение низкочастотной части л. а. х. относительно запретной области по точности.

$\tau_1 = -p_1^{-1}$ и $\tau_2 = -p_2^{-1}$. Коэффициенты разложения на простые дроби

$$A_1 = \frac{\tau_1^2 - T_1^2}{\tau_1^2 - \tau_2^2}, \quad A_2 = \frac{T_1^2 - \tau_2^2}{\tau_1^2 - \tau_2^2}. \quad (5.32)$$

Из (5.32) следует, что если принять $\tau_1 > \tau_2$, то минимальное значение $\tau_1^{\min} = 0,5K_1$. Поэтому $A_1 > 0$. Должно выполняться условие $A_1 + A_2 = 1$, а коэффициент A_2 может быть как отрицательным, так и положительным. Проинтегрировав (5.31), получим

$$D_e = \frac{N}{\pi K_1^2} \left[\frac{A_1}{\tau_1} (\arctg \beta_2 \tau_1 - \arctg \beta_1 \tau_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{A_2}{\tau_2} (\arctg \beta_2 \tau_2 - \arctg \beta_1 \tau_2) \right]. \quad (5.33)$$

Если $A_2 > 0$, то, аналогично проделанному выше, можем записать

$$D_e < \frac{N}{\pi K_1^2} \left[A_1 \frac{\beta_2 \tau_1 - \beta_1 \tau_1}{\tau_1} + A_2 \frac{\beta_2 \tau_2 - \beta_1 \tau_2}{\tau_2} \right] = \\ = \frac{N}{\pi K_1^2} (A_1 + A_2) (\beta_2 - \beta_1) = \frac{N (\beta_2 - \beta_1)}{\pi K_1^2} = D_e^0. \quad (5.34)$$

Если $A_2 < 0$, то из условия $A_1 + A_2 = 1$ следует, что $|A_2| = |1 - A_1| < |A_1|$. Поэтому переход от арктангенсов к аргументу в (5.34) будет приводить к увеличению суммы, находящейся в квадратных скобках. Следовательно, и в этом случае $D_e < D_e^0$.

Эти рассуждения можно продолжить и показать, что для передаточных функций разомкнутой системы более сложного вида

$$W(p) = \frac{K_1}{p(1+T_1p)(1+T_2p)\dots(1+T_np)} \quad (5.35)$$

по-прежнему будет выполняться условие $D_e < D_e^0$ при любых спектральных плотностях скорости изменения входного сигнала, если корни характеристического уравнения замкнутой системы оказываются вещественными и отрицательными.

Рассмотрим теперь систему с астатизмом первого порядка при использовании передаточной функции разомкнутой системы вида

$$W(p) = \frac{K_1(1+T_2p)}{p(1+T_1p)}. \quad (5.36)$$

Выберем постоянную времени T_1 так, чтобы излом асимптотической л. а. х. (рис. 5.5, б) совпадал с изломом запретной области, т. е. $T_1 = \omega_s^{-1}$, где ω_s определяется формулой (5.15).

Для того чтобы учесть отклонение асимптотической л. а. х. от действительной в точке $\omega = \omega_s$, общий коэффициент усиления следует увеличить на 3 дБ, положив

$$K_1 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{D_1}{D_e}}. \quad (5.37)$$

Примем опять условие, чтобы корни характеристического уравнения замкнутой системы

$$T_1 p^2 + (1 + T_2 K_1) p + K_1 = K_1 (1 + \tau_1 p) (1 + \tau_2 p) = 0 \quad (5.38)$$

были вещественными и отрицательными. Положим, что $\tau_1 > \tau_2$, и найдем действительную дисперсию ошибки

$$\begin{aligned} D_e &= \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{N (1 + \omega^2 T_1^2) d\omega}{K_1^2 (1 + \omega^2 \tau_1^2) (1 + \omega^2 \tau_2^2)} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{N d\omega}{K_1^2 (1 + \omega^2 \tau_1^2) (1 + \omega^2 \tau_2^2)} + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{N T_1^2 \omega^2 d\omega}{K_1^2 (1 + \omega^2 \tau_1^2) (1 + \omega^2 \tau_2^2)}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Рассмотрим первый интеграл

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{N d\omega}{K_1^2 (1 + \omega^2 \tau_1^2) (1 + \omega^2 \tau_2^2)} = \\ &= \frac{N}{\pi K_1^2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left(\frac{A_1}{1 + \omega^2 \tau_1^2} + \frac{A_2}{1 + \omega^2 \tau_2^2} \right) d\omega. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Коэффициенты разложения

$$A_1 = \frac{\tau_1^2}{\tau_1^2 - \tau_2^2}, \quad A_2 = -\frac{\tau_2^2}{\tau_1^2 - \tau_2^2}. \quad (5.41)$$

Выше было показано, что здесь выполняется условие (5.34):

$$J_1 < \frac{N (\beta_2 - \beta_1)}{\pi K_1^2}.$$

Второй интеграл в формуле (5.39)

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{N T_1^2 \omega^2 d\omega}{K_1^2 (1 + \omega^2 \tau_1^2) (1 + \omega^2 \tau_2^2)} = \\ &= \frac{N T_1^2}{\pi K_1^2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left(\frac{A_3}{1 + \omega^2 \tau_1^2} + \frac{A_4}{1 + \omega^2 \tau_2^2} \right) d\omega. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Коэффициенты разложения

$$A_3 = -\frac{1}{\tau_1^2 - \tau_2^2}, \quad A_4 = \frac{1}{\tau_1^2 - \tau_2^2}. \quad (5.43)$$

Проинтегрировав формулу (5.42), получим

$$J_2 = \frac{N T_1^2}{\pi K_1^2 (\tau_1^2 - \tau_2^2)} \left[\frac{\arctg \beta_2 \tau_1 - \arctg \beta_1 \tau_1}{\tau_1} + \frac{\arctg \beta_2 \tau_2 - \arctg \beta_1 \tau_2}{\tau_2} \right]. \quad (5.44)$$

Разложим в степенной ряд арктангенсы, входящие в выражение (5.44):

$$J_2 = \frac{NT_1^2}{\pi K_1^2 (\tau_1^2 - \tau_2^2)} \left[-\beta_2 + \frac{\beta_2^3 \tau_1^2}{3} - \Delta_1 + \beta_1 - \frac{\beta_1^3 \tau_1^2}{3} + \Delta_2 + \right. \\ \left. + \beta_2 - \frac{\beta_2^3 \tau_2^2}{3} + \Delta_3 - \beta_1 + \frac{\beta_1^3 \tau_2^2}{3} - \Delta_4 \right] = \\ = \frac{NT_1^2 (\beta_2^3 - \beta_1^3)}{3\pi K_1^2} - \frac{NT_1^2 \Delta}{\pi K_1^2 (\tau_2^2 - \tau_1^2)}. \quad (5.45)$$

Остаточные члены рядов удовлетворяют неравенствам

$$0 < \Delta_1 < \frac{\beta_2^5 \tau_1^4}{5}, \quad 0 < \Delta_2 < \frac{\beta_1^5 \tau_1^4}{5},$$

$$0 < \Delta_3 < \frac{\beta_2^5 \tau_2^4}{5}, \quad 0 < \Delta_4 < \frac{\beta_1^5 \tau_2^4}{5}.$$

Кроме того, имеют место неравенства $\Delta_1 > \Delta_2$ и $\Delta_3 > \Delta_4$. Поэтому суммарный остаточный член

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4 > 0.$$

Из последнего условия следует, что

$$J_2 < \frac{NT_1^2 (\beta_2^3 - \beta_1^3)}{3\pi K_1^2} = \frac{D_2}{\omega_s^2 K_1^2} = \frac{D_1}{K_1^2}. \quad (5.46)$$

Суммарная дисперсия ошибки

$$D_e = J_1 + J_2 < \frac{2D_1}{K_1^2} = D_e^0. \quad (5.47)$$

Аналогичным образом можно показать, что при использовании передаточной функции разомкнутой системы более сложного вида:

$$W(p) = \frac{K_1 (1 + T_2 p)}{p (1 + T_1 p) (1 + T_3 p) \dots (1 + T_n p)}, \quad (5.48)$$

будет выполняться условие $D_e < D_e^0$, если л. а. х. системы проходит так, как это показано на рис. 5.5, б для случая вещественных и отрицательных корней характеристического уравнения замкнутой системы.

Следует заметить, что совпадение изломов асимптотической л. а. х. и запретной области (рис. 5.5, б) не является обязательным условием. Можно сдвинуть излом асимптотической л. а. х. (изменить постоянную времени T_1) влево или вправо. Однако при этом действительная л. а. х. (с учетом отклонений от асимптотической л. а. х.)

не должна заходить в запретную область. Доказательство условия $D_e < D_e^0$ и здесь не представляет труда, и оно может быть выполнено аналогичным образом. При этом не будет выполняться равенство $J_1 = J_2$, но по-прежнему $J_1 + J_2 < D_e^0$.

Рассмотрим теперь возможность использования системы с астатизмом второго порядка при задании спектральной плотности скорости изменения входного сигнала $S_1(\omega)$ вида, изображенного на рис. 3.9, в.

Примем передаточную функцию разомкнутой системы в виде

$$W(p) = \frac{K_2(1 + T_2 p)}{p^2}. \quad (5.49)$$

Соответствующая л. а. х. изображена на рис. 5.5, в. Общий коэффициент усиления должен определяться в соответствии с формулой (5.18). Постоянную времени T_2 выберем так, чтобы корни характеристического уравнения

$$p^2 + K_2 T_2 p + K_2 = K_2(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) = 0 \quad (5.50)$$

были бы вещественными и отрицательными. Это дает $T_2 > 2K_2^{-0.5}$. Определим дисперсию ошибки в рассматриваемой системе:

$$\begin{aligned} D_e &= \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{N \omega^2 d\omega}{K_2^2 (1 + \omega^2 \tau_1^2) (1 + \omega^2 \tau_2^2)} = \\ &= \frac{N}{\pi K_2^2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left[\frac{A_3}{1 + \omega^2 \tau_1^2} + \frac{A_4}{1 + \omega^2 \tau_2^2} \right] d\omega. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Интеграл подобного типа рассматривался выше (интеграл J_2). Поэтому можно аналогичным образом записать

$$D_e < \frac{N(\beta_2^2 - \beta_1^2)}{3\pi K_2^2} = D_e^0. \quad (5.52)$$

Продолжая рассмотрение для передаточных функций более сложного вида, можно показать, что при использовании передаточных функций вида

$$W(p) = \frac{K_2(1 + T_2 p)}{p^2(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) \dots (1 + T_n p)} \quad (5.53)$$

условие $D_e < D_e^0$ будет выполняться для любых спектральных плотностей $S_1(\omega)$, если выбрать расположение л. а. х.,

так, как это показано на рис. 5.5, в, и выполнить условие вещественности и отрицательности корней характеристического уравнения замкнутой системы.

Следует заметить, что рис. 5.5, в не обязательно соответствует использованию систем с астатизмом второго порядка. Если выбрать в передаточной функции (5.48) постоянную времени T_1 так, чтобы выполнялось условие $T_1 \gg \omega_0^{-1}$ (это показано на рис. 5.5, в пунктиром), то в районе запретной области по точности подобная система будет вести себя как система с астатизмом второго порядка. Такая передаточная функция может использоваться в тех случаях, когда требуется наибольшим образом сдвинуть всю л. а. х. в область низких частот. Это дает преимущества в выполнении условий по запасу устойчивости для высокочастотной части л. а. х.

Рассмотрим теперь возможность использования спектральной плотности $S_2(\omega)$ ускорения задающего воздействия. Пусть рис. 3.9, б соответствует спектральной плотности $S_2(\omega)$. Тогда дисперсия ускорения

$$D_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} N d\omega = \frac{N(\beta_2 - \beta_1)}{\pi}. \quad (5.54)$$

Спектральная плотность скорости входного воздействия

$$S_1(\omega) = \frac{S_2(\omega)}{\omega^2} = \frac{N}{\omega^2} \quad (\beta_1 \leq |\omega| \leq \beta_2). \quad (5.55)$$

Спектральная плотность задающего воздействия

$$S_g(\omega) = \frac{S_1(\omega)}{\omega^2} = \frac{S_2(\omega)}{\omega^4} = \frac{N}{\omega^4} \quad (\beta_1 \leq |\omega| \leq \beta_2). \quad (5.56)$$

При $|\omega| < \beta_1$ и $|\omega| > \beta_2$ все спектральные плотности равны нулю. Рассмотрим передаточную функцию (5.49). Общий коэффициент усиления K_2 выберем в соответствии с формулой (5.18), а постоянную времени $T_2 > 2K_2^{-0.8}$. Тогда действительная дисперсия ошибки

$$\begin{aligned} D_e &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_e(j\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N d\omega}{K_2^2 (1 + \omega^2 \tau_1^2) (1 + \omega^2 \tau_2^2)} = \\ &= \frac{N}{\pi K_2^2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left(\frac{A_1}{1 + \omega^2 \tau_1^2} + \frac{A_2}{1 + \omega^2 \tau_2^2} \right) d\omega. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Коэффициенты разложения определяются формулой (5.41):

$$A_1 = \frac{\tau_1^2}{\tau_1^2 - \tau_2^2}, \quad A_2 = -\frac{\tau_2^2}{\tau_1^2 - \tau_2^2}.$$

Этот случай совпадает при замене K_2 на K_1 с рассмотренным выше (5.40). Поэтому можно записать

$$D_e < \frac{N(\beta_2 - \beta_1)}{\pi K_2^2} = \frac{D_2}{K_2^2} = D_e^0. \quad (5.58)$$

Таким образом, и в этом случае сохраняется условие обеспечения заданной дисперсии ошибки при любой форме спектральной плотности ускорения задающего воздействия.

Следует заметить, что принятое условие вещественности корней характеристического уравнения не является особо жестким. Так как при расчете системы по излагаемой методике практически всегда оказывается некоторый запас точности ($D_e < D_e^0$), то возможно отступление от этого условия в смысле допущения некоторой колебательности. Однако запас устойчивости должен оставаться достаточно большим, т. е. в системе должно наблюдаться хорошее демпфирование.

Только в предельном случае, когда входной сигнал соответствует гармонической функции с заданными значениями амплитуды и частоты (или заданными двумя дисперсиями) и со случайной фазой, оказывается, что действительная дисперсия ошибки совпадает с заданными значениями, т. е. $D_e = D_e^0$. Однако в этом случае требование вещественности корней вообще отпадает и запас устойчивости может быть произвольным при сохранении только требования устойчивости замкнутой системы.

В ответственных случаях, когда недопустимо увеличение дисперсии ошибки по сравнению с заданным значением, для гарантии этого можно добиваться получения вещественных корней характеристического уравнения замкнутой системы.

Рассмотренные доказательства выполнения требований по точности при неизвестной форме спектральной плотности входного воздействия можно распространить и на цифровые системы. Непременным условием здесь должно быть расположение всей запретной области левее частоты $\omega = T^{-1}$. Тогда для интервала частот, в котором располагается запретная область, будет выполняться условие

$\lambda \approx \omega$. Кроме того, требование вещественности корней характеристического уравнения замкнутой системы трансформируется здесь в требование возможности разложения квадрата модуля частотной передаточной функции замкнутой системы для ошибки на простые дроби:

$$|H_e^*(j\lambda)|^2 = \lambda^{2v} \left[\frac{A_1}{1 + \lambda^2 \tau_1^2} + \frac{A_2}{1 + \lambda^2 \tau_2^2} + \dots + \frac{A_n}{1 + \lambda^2 \tau_n^2} \right],$$

где v — степень астатизма системы.

Ограниченное значение модуля входного воздействия. В статических системах наклон первой асимптоты л. а. х. нулевой. Поэтому условие нахождения всей л. а. х. выше запретных областей, изображенных на рис. 5.3, не может быть выполнено ни при каком конечном значении общего коэффициента усиления. В связи с этим статические системы могут работать только при наложении дополнительного условия ограничения модуля входного сигнала.

Установившаяся ошибка в непрерывной статической системе (рис. 5.1, а) при постоянном входном воздействии $g(t) = g_0$ определяется выражением

$$e_{уст} = \frac{g_0}{1 + W(0)} = \frac{g_0}{1 + K} \approx \frac{g_0}{K}, \quad (5.59)$$

где K — общий коэффициент усиления разомкнутой системы. Если в системе управления (рис. 5.1, а) применить главную обратную связь, отличающуюся от единицы, и положить $k_{oc} = m \neq 1$, то установившаяся ошибка будет

$$e_{уст} = \frac{1 + mK - K}{1 + K} g_0. \quad (5.60)$$

Приравняв числитель (5.60) нулю, можно получить условие отсутствия статической ошибки при постоянном значении входного воздействия

$$m = \frac{K - 1}{K}. \quad (5.61)$$

При неустойчивости коэффициента усиления условие (5.61) нарушается, что ведет к появлению статической ошибки

$$e_{уст} = -\frac{\Delta K}{K_0} \frac{g_0}{1 + K_0 + \Delta K} \approx -\frac{\Delta K}{K_0} \frac{g_0}{K_0} = -c_0 g_0, \quad (5.62)$$

где c_0 — коэффициент ошибки по входному воздействию. Отсюда можно получить требуемое значение общего

коэффициента усиления, если коэффициент ошибки (отношение $e_{уст}$ к g_0) задан:

$$K_0 \geq \frac{1}{c_0} \frac{\Delta K}{K_0} = \frac{g_0}{e_{уст}} \frac{\Delta K}{K_0}. \quad (5.63)$$

Здесь $\Delta K/K_0$ — возможное относительное изменение общего коэффициента усиления, вызванное нестабильностью коэффициентов передачи и коэффициентов усиления отдельных звеньев канала управления.

К аналогичному результату может привести масштабирование входной или выходной величины [8].

В системе с единичной обратной связью (рис. 5.1, а) при гармоническом входном воздействии вида $g(t) = g_{\max} \times \times \sin(\omega_k t + \psi_k)$ амплитуда ошибки по-прежнему определяется формулами (5.3) и (5.4). Это дает возможность построить контрольную точку A_k с координатами (5.5) аналогично построению на рис. 5.2, а. Если на входе заданы максимальные по модулю значения входной величины $g_{\max}$ и скорости ее изменения $\dot{g}_{\max}$, то можно подобрать эквивалентный гармонический входной сигнал

$$g_{\vartheta}(t) = g_{\vartheta \max} \sin(\omega_{\vartheta} t + \psi_{\vartheta}), \quad (5.64)$$

где $g_{\vartheta \max} = g_{\max}$, ψ_{ϑ} — произвольная начальная фаза, а эквивалентная круговая частота должна быть выбрана так, чтобы выполнялось условие $\omega_{\vartheta} g_{\max} = \dot{g}_{\max}$. Тогда координаты контрольной точки A_k (рис. 5.6, а) будут при задании $e_{\max}^0$

$$\omega_{\vartheta 1} = \frac{\dot{g}_{\max}}{g_{\max}}, \quad L(\omega_{\vartheta 1}) = 20 \lg \frac{g_{\max}}{e_{\max}^0}. \quad (5.65)$$

При выполнении условий $g_{\vartheta \max} = g_{\max}$ и $\omega_{\vartheta} g_{\max} < \dot{g}_{\max}$ частота ω_{ϑ} будет уменьшаться и точка A_k будет перемещаться влево по горизонтальной прямой, т. е. по прямой с нулевым наклоном. При выполнении условий $g_{\vartheta \max} < g_{\max}$ и $\omega_{\vartheta} g_{\max} = \dot{g}_{\max}$ контрольная точка будет перемещаться вправо, двигаясь по прямой с отрицательным наклоном 20 дБ/дек. Это справедливо до тех пор, пока ускорение эквивалентного режима меньше максимального заданного на входе ускорения $\ddot{g}_{\max}$, т. е. пока выполняется условие $\omega_{\vartheta} \dot{g}_{\vartheta \max} \leq \ddot{g}_{\max}$. Отсюда находится предельная частота положения точки A_k на прямой с

наклоном 20 дБ/дек:

$$\omega_{\text{з2}} = \frac{\ddot{g}_{\text{max}}}{\dot{g}_{\text{max}}} \quad (5.66)$$

Далее, в соответствии с изложенным выше, точка A_k будет двигаться по прямой с отрицательным наклоном 40 дБ/дек. Эти рассуждения позволяют построить запретную область для л. а. х. так, как показано на рис. 5.6, а. Для того чтобы ошибка в замкнутой системе не превосходила заданного значения e_{max}^0 , л. а. х. разомкнутой системы должна проходить выше запретной области при соблюдении требования наличия в замкнутой системе достаточного запаса устойчивости.

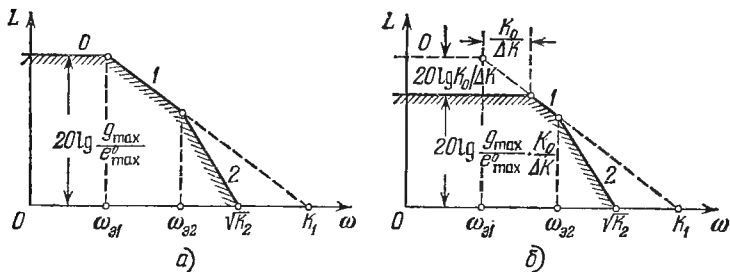


Рис. 5.6. Запретные области по условиям точности для статических систем.

Изложенная методика обеспечения заданной точности в статических системах может быть строго обоснована для типовых передаточных функций разомкнутой системы, которые будут рассмотрены более подробно в § 5.3 и § 5.4. Обоснование может быть сделано аналогично тому, как это было проделано выше для астатических систем с использованием спектральных плотностей вида, изображенного на рис. 3.9, в, с последующим обобщением на спектральные плотности произвольного вида.

Если в статической системе используется неединичная обратная связь $k_{\text{oc}} \neq 1$, то, в соответствии с изложенным, верхняя граница запретной области может быть снижена на величину $20 \lg(K_0/\Delta K)$. Это показано на рис. 5.6, б.

В дискретных системах построение запретной области для л. а. х. будет аналогичным, если выполняется усло-

вие того, что вся запретная область располагается левее частоты $\omega = T^{-1}$. Заметим, что это условие выполняется практически всегда. Запретные области для дискретных систем совпадают с изображенными на рис. 5.5 и 5.6, если круговую частоту ω заменить на псевдочастоту λ .

Как и ранее, если принять предположение, что соотношения между максимальными и среднеквадратичными значениями одинаковы для процессов $g(t)$, $y(t)$ и $e(t)$, то формулы для определения точек излома запретной области для непрерывного случая будут соответствовать выражениям

$$\omega_{s1} = \sqrt{\frac{D_1}{D_g}}, \quad \omega_{s2} = \sqrt{\frac{D_2}{D_1}}, \quad (5.67)$$

где D_g — дисперсия задающего воздействия, D_1 — дисперсия скорости изменения задающего воздействия, D_2 — дисперсия ускорения.

Аналогичным образом для дискретного случая

$$\lambda_{s1} = \sqrt{\frac{D_1}{D_g}}, \quad \lambda_{s2} = \sqrt{\frac{D_2}{D_1}}. \quad (5.68)$$

Для построения запретной области необходимо задать, кроме того, допустимое значение дисперсии ошибки и ожидаемое значение $\Delta K/K_0$.

Обобщая изложенное по методике построения запретных областей для л. а. х., рассмотрим возможные случаи применительно к цифровым системам управления.

1. При задании ограниченного значения только дисперсии второй производной задающего воздействия D_2 и при неограниченных значениях дисперсии первой производной D_1 и дисперсии самого задающего воздействия D_g запретная область сводится к прямой двойного наклона (-40 дБ/дек), что показано на рис. 5.7, а.

Как следует из вида запретной области, задача воспроизведения входного сигнала может быть решена только системой управления с астатизмом второго порядка. Минимальное значение общего коэффициента усиления разомкнутой системы определяется выражением

$$K_{2 \min} = \sqrt{\frac{D_2}{D_e^0}}, \quad (5.69)$$

где D_e^0 — заданное значение дисперсии ошибки.

2. При задании ограниченных значений дисперсий второй производной D_2 и первой производной D_1 и неограниченном значении дисперсии самого задающего воздействия D_g запретная область, образованная прямой двойного наклона, усекается прямой единичного наклона. Это показано на рис. 5.7, б. Здесь задача воспроизведения задающего воздействия может осуществляться как системой управления с астатизмом второго порядка, так

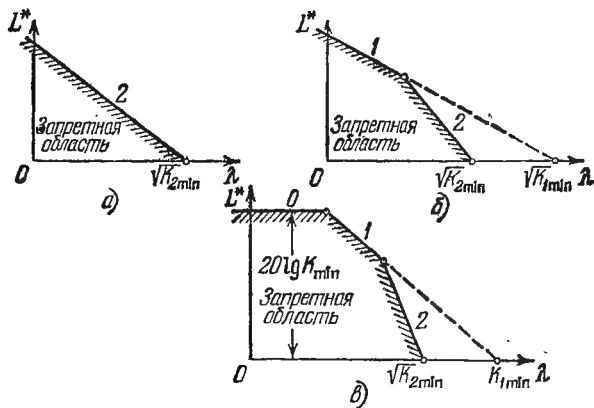


Рис. 5.7. Возможные формы запретных областей по точности.

и системой с астатизмом первого порядка. При астатизме второго порядка минимальное значение общего коэффициента усиления разомкнутой системы определяется по-прежнему формулой (5.69). При астатизме первого порядка минимальное значение общего коэффициента усиления

$$K_{1 \min} = \sqrt{\frac{D_1}{D_e^0}}. \quad (5.70)$$

3. При задании ограниченных значений дисперсий D_2 , D_1 и D_g запретная область, образованная прямыми с двойным и единичным наклонами (рис. 5.7, б), дополнительно усекается прямой нулевого наклона. Это показано на рис. 5.7, в. В этом случае задача воспроизведения задающего воздействия может осуществляться как системами управления с астатизмом второго и первого порядков,

так и статической системой. Для астатических систем минимальные значения общего коэффициента определяются формулами (5.69) и (5.70). Для статической системы минимальное значение общего коэффициента усиления для случая единичной главной обратной связи определяется выражением

$$K_{\min} = \sqrt{\frac{D_g}{D_e^0}} \quad (5.71)$$

и для случая неединичной обратной связи — выражением

$$K_{\min} = \frac{\Delta K}{K_0} \sqrt{\frac{D_g}{D_e^0}}. \quad (5.72)$$

Оба случая формирования запретной области изображены на рис. 5.6.

Замкнутая автоматическая система, построенная в соответствии с изложенным выше, представляет собой фильтр, который можно назвать *предельным*. При заданных дисперсиях входного сигнала и его производных дисперсия ошибки будет не больше заданного значения при спектральной плотности входного сигнала любого вида. Только в предельном случае, когда спектральная плотность вырождается в линию, дисперсия ошибки оказывается равной заданному значению.

Построение предельных фильтров предполагает не только выполнение условий по виду низкочастотной части передаточной функции в смысле отсутствия захода в запретную область для л. а. х., но и выполнение условий по запасу устойчивости, так как только при достаточно большом запасе устойчивости могут быть выполнены требования по точности.

Заметим, что чем уже спектральная плотность (рис. 3.9, в), тем более легкими оказываются требования по запасу устойчивости. В предельном случае, когда спектральная плотность вырождается в линию, запас устойчивости может быть любым (условие для показателя колебательности $M < \infty$).

Рассматриваемые ниже типовые передаточные функции представляют собой, по сути дела, возможные реализации предельных фильтров.

Учет возмущений. Если к проектируемой системе (рис. 5.1) кроме задающего воздействия приложено внеш-

нее возмущение $f(t)$, то при построении контрольной точки или запретной области необходимо учесть дополнительную ошибку, вносимую этим возмущением. Наиболее просто это можно сделать для постоянного возмущения $f(t) = f_0 = \text{const}$ или $f[n] = f_0 = \text{const}$.

Дополнительная статическая ошибка, вызываемая этим возмущением в дискретной системе, в соответствии с рис. 2.24 и формулой (2.179) будет при $z \rightarrow 1$ определяться выражением

$$e_f = -\frac{W_{н2} F(1)}{1 + W(1)}. \quad (5.73)$$

Здесь $W_{н2} F(z)$ — изображение эквивалентного воздействия на входе системы, $W(z)$ — дискретная передаточная функция разомкнутой системы. В статических системах формула (5.73) приводится к виду

$$e_f = \frac{\gamma f_0}{1 + K} = \frac{f_{10}}{1 + K}, \quad (5.74)$$

где γ — коэффициент статизма, а $f_{10} = \gamma f_0$ — эквивалентное постоянное задающее воздействие.

Коэффициент статизма может быть определен из статической характеристики объекта управления $y_{уст} = F_1(f_0)$, дающей связь между установившимся значением управляемой величины и постоянным возмущением f_0 . Коэффициент статизма представляет собой значение производной в точке рабочего режима (рис. 5.8):

$$\gamma = -\frac{dF_1(f_0)}{df_0} = \frac{m_y}{m_f} \operatorname{tg} \alpha, \quad (5.75)$$

где m_y и m_f — масштабы на соответствующих осях.

Полученное значение эквивалентного входного воздействия f_{10} может быть добавлено к входному сигналу $g[n]$. В этом случае запретная область (рис. 5.6, а), построенная для системы с единичной главной обратной связью, должна быть перестроена в соответствии с рис. 5.9, а. При построении запретной области на рис. 5.9, а принято, что заданы максимальные значения первой производной

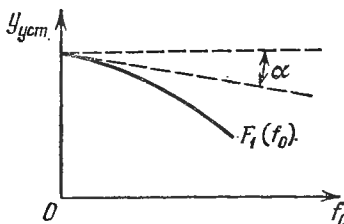


Рис. 5.8. Статическая характеристика объекта управления.

входного воздействия $\dot{g}_{\max}$ и второй производной $\ddot{g}_{\max}$, а также максимальное значение ошибки $e_{\max}^0$. В этом случае минимальные значения коэффициентов усиления определяются зависимостями

$$K_{\min} = \frac{g_{\max} + f_{10}}{e_{\max}^0}, \quad (5.76)$$

$$K_{1\min} = \frac{\dot{g}_{\max}}{e_{\max}^0} \frac{g_{\max} + f_{10}}{g_{\max}}, \quad (5.77)$$

$$K_{2\min} = \frac{\ddot{g}_{\max}}{e_{\max}^0} \sqrt{\frac{g_{\max} + f_{10}}{g_{\max}}}. \quad (5.78)$$

При введении неединичной обратной связи горизонтальная прямая, ограничивающая запретную область на

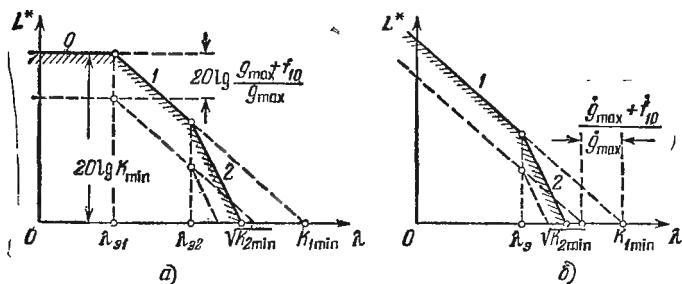


Рис. 5.9. Учет возмущающего воздействия при построении запретных областей.

рис. 5.6, а, может быть снижена в соответствии с рис. 5.6, б, но только за счет составляющей ошибки, определяемой действительным задающим воздействием $g[n]$. Составляющая ошибки, вызываемая эквивалентным входным сигналом f_{10} , не может быть снижена за счет неединичной обратной связи. В этом случае минимальное значение общего коэффициента усиления статической системы вместо (5.36) будет определяться зависимостью

$$K_{\min} = \frac{\Delta K}{K_0} \frac{g_{\max}}{e_{\max}^0} + \frac{f_{10}}{e_{\max}^0}. \quad (5.79)$$

Аналогичные зависимости могут быть получены и для случая, когда заданы дисперсии входного сигнала и его первых двух производных D_g , D_1 и D_2 . Тогда вместо формул (5.76) — (5.78) будем иметь

$$K_{\min} = \sqrt{\frac{D_g + f_{10}^2}{D_e^0}}, \quad (5.80)$$

$$K_{1\min} = \sqrt{\frac{D_1}{D_e^0} \frac{D_g + f_{10}^2}{D_g}}, \quad (5.81)$$

$$K_{2\min} = \sqrt{\frac{D_2}{D_e^0} \frac{D_g + f_{10}^2}{D_g}}, \quad (5.82)$$

и вместо формулы (5.79)

$$K_{\min} = \sqrt{\left(\frac{\Delta K}{K_0}\right)^2 \frac{D_g}{D_e^0} + \frac{f_{10}^2}{D_e^0}}. \quad (5.83)$$

В отсутствие входного сигнала, т. е. при $g[n] = 0$, что является характерным для систем стабилизации, запретная область, как таковая, исчезает, но остается требование обеспечения необходимого коэффициента усиления в соответствии с формулой (5.39):

$$K_{\min} = \frac{f_{10}}{e_{\max}^0} = \frac{\gamma f_0}{e_{\max}^0}. \quad (5.84)$$

Это условие приводит к фиксации нижнего допустимого положения первой асимптоты л. а. х. (асимптоты нулевого наклона) проектируемой системы.

В системах с астатизмом первого порядка при условии, что возмущение $f = f_0 = \text{const}$ вызывает появление статической ошибки, формула (5.34) приводится к виду

$$e_f = \frac{\beta f_0}{K_1} = \frac{\dot{f}_{10}}{K_1}, \quad (5.85)$$

где β — коэффициент пропорциональности между возмущением и скоростью изменения управляемой величины при разомкнутой главной обратной связи, K_1 — общий коэффициент усиления системы с астатизмом первого порядка, $\dot{f}_{10}$ — эквивалентное значение входной скорости.

Аналогично изложенному выше, величина $\dot{f}_{10}$ может быть добавлена к скорости изменения входного сигнала.

Тогда запретная область для астатических систем принимает вид, изображенный на рис. 5.9, б.

При задании максимальных значений $\dot{g}_{\max}$, $\ddot{g}_{\max}$ и $e_{\max}^0$ формулы для минимальных коэффициентов усиления приобретают вид

$$K_{1\min} = \frac{\dot{g}_{\max} + \dot{f}_{10}}{e_{\max}^0}, \quad (5.86)$$

$$K_{2\min} = \frac{\ddot{g}_{\max}}{e_{\max}^0} \sqrt{\frac{\dot{g}_{\max} + \dot{f}_{10}}{\dot{g}_{\max}}}. \quad (5.87)$$

При задании дисперсий —

$$K_{1\min} = \sqrt{\frac{D_1 + (\dot{f}_{10})^2}{D_e^0}}, \quad (5.88)$$

$$K_{2\min} = \sqrt{\frac{D_2}{D_e^0} \frac{D_1 + (\dot{f}_{10})^2}{D_1}}. \quad (5.89)$$

В отсутствие входного сигнала $g[n]$ запретная область исчезает, но остается требование к общему коэффициенту усиления системы с астатизмом первого порядка в соответствии с формулой (5.85):

$$K_{1\min} = \frac{\beta f_0}{e_f} = \frac{\dot{f}_{10}}{e_f}, \quad (5.90)$$

которое ограничивает крайнее нижнее положение первой асимптоты л. а. х. проектируемой системы (асимптоты с единичным наклоном).

Влияние периода дискретности. Наличие квантования по времени в цифровых системах может вызвать потерю информации об изменении задающего воздействия внутри интервала дискретности, что приводит к появлению дополнительной ошибки. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Пусть r — порядок астатизма исходной системы без экстраполятора, а l — порядок экстраполятора. Покажем, что порядок используемого экстраполятора не влияет на результирующий порядок астатизма цифровой системы. Для этого рассмотрим дискретную передаточную функцию разомкнутой системы при $D(z) = 1$, которая сводится

к передаточной функции (2.210). При $t \rightarrow \infty$, т. е. при $p \rightarrow 0$, имеем для случая $\tau = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} W(z) &= \lim_{p \rightarrow 0} \mathbb{Z} \left\{ \left(\frac{z-1}{z} \right)^{l+1} \left(\frac{W_H(p)}{p} + \dots + \frac{W_H(p)}{p^{l+1}T^l} \right) \right\} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} T \mathbb{Z} \left\{ (Tp)^{l+1} \frac{K_r}{p^r p^{l+1}T^l} \right\} = \lim_{p \rightarrow 0} T \mathbb{Z} \left\{ \frac{K_r}{p^r} \right\}, \quad (5.91) \end{aligned}$$

где K_r — общий коэффициент усиления исходной разомкнутой системы. Из последнего выражения видно, что при любом порядке экстраполятора степень астатизма исходной системы сохраняет свое значение.

Рассмотрим теперь влияние астатизма непрерывной части системы на порядок экстраполяции. Пусть непрерывный входной сигнал (задающее воздействие) меняется по зависимости

$$g(t) = \frac{a_k}{k!} t^k. \quad (5.92)$$

Тогда при $k < r$ установившаяся ошибка системы управления $e_{уст} = 0$, а при $k = r$ ошибка $e_{уст} = \text{const}$. Первые $(r-1)$ коэффициентов ошибки при этом равны нулю, т. е. $c_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, r-1$). Следовательно, накапливаемая ошибка на выходе экстраполятора нулевого порядка ($l=0$) будет равна нулю при $k \leq r$. Накапливаемая ошибка на выходе экстраполятора первого порядка ($l=1$) будет равна нулю, если $e_{уст} = b_0 + b_1 t$, что соответствует $k = r+1$. На выходе экстраполятора второго порядка ($l=2$) накапливаемая ошибка будет отсутствовать при изменении ошибки системы по закону $e_{уст} = b_0 + b_1 t + 0,5b_2 t^2$, что допускает значение $k = r+2$.

Продолжая рассуждения, получим, что на выходе экстраполятора l -го порядка будет отсутствовать накапливаемая ошибка, если

$$g(t) = \sum_{k=0}^m \frac{a_k}{k!} t^k, \quad (5.93)$$

где $m = l + r$ — порядок экстраполяции системы, равный сумме порядка используемого экстраполятора и степени астатизма непрерывной части системы. Это означает, что накапливаемая ошибка на выходе экстраполятора может

вызываться входным воздействием вида (5.92) при $k > m = l + r$. Так как в дискретные моменты времени $t = nT$ накопившаяся на выходе экстраполятора ошибка сбрасывается, то формула для накапливающейся ошибки внутри такта может быть представлена в виде

$$e_n = \frac{a_{m+1}}{(m+1)!} (t - nT)^{m+1}. \quad (5.94)$$

Максимум ошибки будет в конце такта при $t = (n+1)T$:

$$e_{n, \max} = \frac{a_{m+1}}{(m+1)!} T^{m+1}. \quad (5.95)$$

Отсюда может быть найдено допустимое значение периода дискретности при заданном значении $e_{n, \max}$:

$$T \leq \sqrt{\frac{(m+1)! e_{n, \max}}{a_{m+1}}}. \quad (5.96)$$

В качестве величины a_{m+1} должно выбираться максимальное значение производной $(m+1)$ -го порядка от задающего воздействия $g(t)$.

Если входное воздействие представляет собой гармоническую функцию

$$g(t) = g_{\max} \sin(\omega_k t + \psi_k),$$

то формула (5.96) приобретает следующий вид:

$$T \leq \frac{1}{\omega_k} \sqrt{\frac{(m+1)! e_{n, \max}}{g_{\max}}}. \quad (5.97)$$

Формулы (5.96) и (5.97) позволяют выбрать период дискретности из условия ограничения накапливающейся ошибки экстраполирования.

Так, например, в системе с астатизмом первого порядка ($r = 1$) при использовании экстраполятора нулевого порядка ($l = 0$) результирующий порядок экстраполирования $m = 1$. Допустимый период дискретности при этом определяется максимальным значением ускорения $\ddot{g}_{\max}$:

$$T \leq \sqrt{\frac{2e_{n, \max}}{\ddot{g}_{\max}}}. \quad (5.98)$$

§ 5.3. Общие принципы построения систем управления с заданным запасом устойчивости

Выполнение требований по точности должно сопровождаться обеспечением в системе управления необходимых запасов устойчивости. Проверка достаточности удаления системы от колебательной границы устойчивости может производиться различными критериями. Используются, например, такие оценки, как колебательность (отношение мнимой части корня характеристического уравнения к вещественной), запасы устойчивости по амплитуде и по фазе, перерегулирование, показатель колебательности и др. Все эти критерии, в общем, приводят к цели.

При использовании для расчета систем частотных методов и, в частности, логарифмических частотных характеристик удобно использование и частотных оценок запаса устойчивости. Для этой цели наиболее удобен показатель колебательности, равный отношению максимального пика амплитудной частотной характеристики замкнутой системы к ее начальной ординате при $\omega = 0$ (см. (2.200)).

На основании большого числа опытных данных рекомендуемый показатель колебательности лежит в пределах $M = 1,3 \div 1,7$. В некоторых случаях, когда система регулирования должна быть очень хорошо задемпфирована, принимают $M = 1,1 \div 1,3$ и даже $M = 1$. Значения показателя колебательности выше $1,7 \div 1,8$ приводят к резкому возрастанию склонности системы к колебаниям. Слишком низкие его значения могут привести к серьезным трудностям при проектировании корректирующих средств.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы в устойчивой системе показатель колебательности был не больше заданного, является нахождение амплитудно-фазовой характеристики (а.-ф. х.) разомкнутой системы вне запретной области (рис. 2.27, д и рис. 5.10), представляющей собой окружность [8]. Радиус этой окружности равен

$$R = \frac{M}{M^2 - 1}, \quad (5.99)$$

а смещение центра влево относительно начала координат

$$C = \frac{M^2}{M^2 - 1}. \quad (5.100)$$

Для оценки запаса устойчивости замкнутой системы по этой методике в непрерывном случае должна исполь-

По выражению (5.101) можно определить требуемый запас по фазе в функции модуля, выраженного в децибелах, для различных значений показателя колебательности M . Эти зависимости построены на рис. 5.11. Использо-

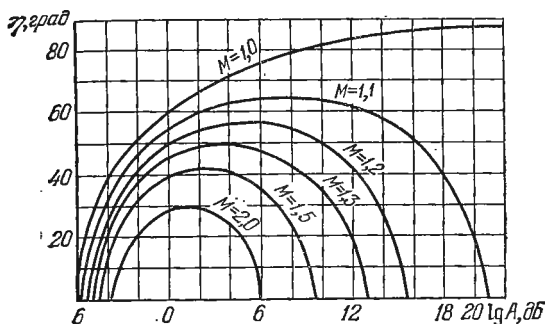


Рис. 5.11. Зависимость требуемого запаса по фазе от модуля в децибелах.

зование кривых $\eta = f(20 \lg A)$ может заключаться в том, что для построенной л. а. х. разомкнутой системы по

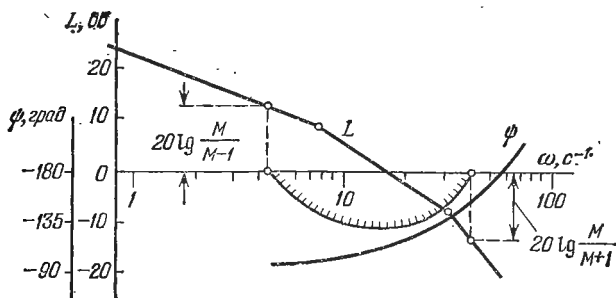


Рис. 5.12. Запретная область для логарифмической фазовой характеристики.

точкам находится и строится требуемый запас по фазе (рис. 5.12), который откладывается от оси нуля децибел вниз. Построение ведется в пределах изменения модуля

$$20 \lg \frac{M}{M+1} \leq 20 \lg A \leq 20 \lg \frac{M}{M-1} \quad (5.103)$$

и образует запретную область для логарифмической фазовой характеристики $\psi = \psi(\omega)$. Требуемый запас устойчивости будет обеспечен, если л. ф. х. не заходит в запретную область, определяемую заданным показателем колебательности.

В дальнейшем изложении будут рассмотрены принципы построения л. а. х. систем управления, имеющих в замкнутом состоянии заданный запас устойчивости, определяемый значением показателя колебательности. При этом предполагается, что разомкнутая система относится к классу минимально-фазовых систем. Особенности проектирования систем с неминимально-фазовыми звеньями будут изложены в дальнейшем.

Для удобства расчета систем регулирования вводятся так называемые типовые л. а. х., применение которых автоматически обеспечивает получение заданного запаса устойчивости.

Для исключения возможности потери устойчивости замкнутой системы при действии нелинейностей типа насыщения или ограничения целесообразно ограничить максимальные наклоны применяемых типовых л. а. х. в области низких частот, т. е. левее частоты среза $\omega_{ср}$, значением — 40 дБ/дек. При этом в области низких частот максимальные фазовые сдвиги не будут превосходить абсолютного значения 180° . Л. а. х. такого типа и будут рассмотрены ниже. В некоторых случаях, например в сглаживающих устройствах, возможно использование л. а. х., имеющих в области низких частот отрицательные наклоны 60 дБ/дек, 80 дБ/дек и более. Однако при этом получается так называемая *условно устойчивая система*. В подобных системах возможна потеря устойчивости при снижении общего коэффициента усиления, а также при наличии в усилительном канале звеньев с насыщением.

Системы с астатизмом второго порядка. Рассмотрение типовых л. а. х. удобно начать с систем, имеющих астатизм второго порядка, хотя эти системы не относятся к числу наиболее распространенных. Астатизм второго порядка определяется обычно наличием двух интегрирующих звеньев в канале управления. Иногда сам объект, например летательный аппарат, ведет себя как интегрирующее звено второго порядка.

Л. а. х. типа 2—1. Простейшая асимптотическая л. а. х. для систем с астатизмом второго порядка изображена на рис. 5.13. Ей соответствует передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K_2(1 + T_2 p)}{p^2}. \quad (5.104)$$

Асимптоты этой л. а. х. имеют отрицательные наклоны —2·20 дБ/дек и —1·20 дБ/дек, в связи с чем введено обозначение «типа 2—1». Положение л. а. х. относительно отметок частоты на оси абсцисс определяется ее так называемой базовой частотой

$\omega_0 = \sqrt{K_2}$, соответствующей точке пересечения низкочастотной асимптоты с осью нуля децибел. Сдвиг всей л. а. х. параллельно самой себе вдоль оси частот влево или вправо не меняет запаса устойчивости замкнутой системы, но отражается на быстроте протекания переходных процессов (быстродействии) и точности воспроизведения переменных, в частности гармонических входных сигналов.

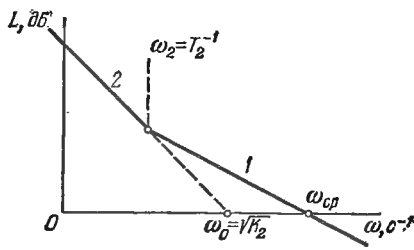


Рис. 5.13. Л. а. х. системы типа 2—1.

Исследование на максимум значения $|H(j\omega)|$ и приравнивание найденного максимума показателю колебательности, $|H(j\omega)|_{\max} = M$, дает условие, которое необходимо выполнить, чтобы показатель колебательности не превосходил заданного значения:

$$T_2 \geq \frac{1}{\omega_0} \sqrt{2 \frac{M^2 - M \sqrt{M^2 - 1}}{M^2 - 1}} = \frac{2}{\omega_{cp}} \frac{M^2 - M \sqrt{M^2 - 1}}{M^2 - 1}. \quad (5.105)$$

Здесь базовая частота $\omega_0 = \sqrt{K_2}$, частота среза $\omega_{cp} = K_2 T_2 = \omega_0^2 T_2 > \omega_0$, а $K_2 [c^{-2}]$ — общий коэффициент усиления разомкнутой системы (добротность по ускорению).

Л. а. х. подобного вида находят ограниченное применение из-за отсутствия в передаточной функции разомкнутой системы постоянных времени, входящих в знаменатель (5.104). Это условие практически может быть выполнено при сравнительно малых значениях ω_0 и ω_{cp} , которые

встречаются в системах сглаживания низкочастотных помех [7].

Л. а. х. типа 2—1—2. Этой л. а. х. соответствует передаточная функция

$$W(p) = \frac{K_2(1+T_2p)}{p^2(1+T_3p)}. \quad (5.106)$$

Л. а. х. этого типа изображена на рис. 5.14. Ей соответствуют наклоны асимптот 2·20 дБ/дек, 1·20 дБ/дек и 2·20 дБ/дек. Положение всей л. а. х. по-прежнему опре-

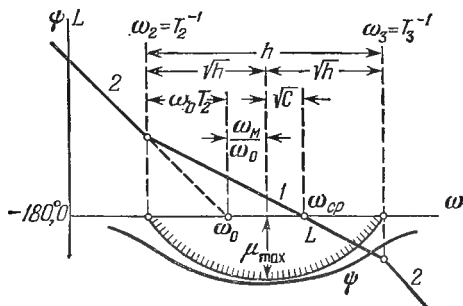


Рис. 5.14. Типовой «симметричный» переход оси нуля децибел (л. а. х. типа 2—1—2).

деляется значением базовой частоты $\omega_0 = \sqrt{K_2}$. Протяженность участка с наклоном 20 дБ/дек определяется отношением двух постоянных времени:

$$h = \frac{T_2}{T_3} = \frac{\omega_3}{\omega_2}, \quad (5.107)$$

где ω_2 и ω_3 — сопрягающие частоты. Под протяженностью участка вдоль оси с логарифмическими отметками частоты здесь понимается отношение частот конечных точек участка (большой и меньшей).

Найдем запас по фазе для передаточной функции (5.106):

$$\mu = 180^\circ + \psi = \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_3. \quad (5.108)$$

Исследование (5.108) на максимум дает

$$\omega_m = \frac{1}{T_3 \sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{T_2 T_3}}, \quad (5.109)$$

$$\mu_{\max} = \mu(\omega_m) = \arctg \frac{h-1}{2\sqrt{h}}. \quad (5.110)$$

Приравнивание максимального запаса по фазе $\mu_{\max}$ требуемому максимальному запасу по фазе $\eta_{\max}$ (5.102), в соответствии с рис. 5.14, дает связь между протяженностью участка h и показателем колебательности при оптимальном выборе параметров, т. е. при совпадении максимумов фазовой характеристики и запретной зоны:

$$h = \frac{M+1}{M-1}, \quad (5.111)$$

$$M = \frac{h+1}{h-1}. \quad (5.112)$$

Оптимальный выбор параметров здесь означает, что при заданном значении h будет получено минимальное значение показателя колебательности и, наоборот, заданное значение показателя колебательности M получается при минимальной протяженности участка h .

Л. а. х., которым свойствен типовой переход от нуля децибел в соответствии с рис. 5.14, будем в дальнейшем называть *симметричными типовыми л. а. х.*, имея в виду симметричное расположение фазовой характеристики относительно запретной зоны.

Из рис. 5.14 находятся оптимальные параметры л. а. х.:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{\omega_0} \sqrt{VhV\bar{C}} = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{V \frac{M+1}{M-1} V \frac{M^2}{M^2-1}} = \\ &= \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}}, \end{aligned} \quad (5.113)$$

$$T_3 = \frac{T_2}{h} = \frac{T_2(M-1)}{M+1} = \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}. \quad (5.114)$$

Формулы (5.113) и (5.114) являются точными, несмотря на то что они получены из асимптотической л. а. х. Это можно проверить, вычислив модуль частотной передаточной функции, соответствующей выражению (5.106), и приравняв частоту значению ω_m , а модуль — значению $V\bar{C}$ в соответствии с формулой (5.102):

$$A(\omega_m) = \frac{K_2 \sqrt{1 + \omega_m^2 T_2^2}}{\omega_m^2 \sqrt{1 + \omega_m^2 T_3^2}} = K_2 T_2 \sqrt{T_2 T_3} = V\bar{C} = \sqrt{\frac{M^2}{M^2-1}}.$$

Отсюда, учитывая, что $T_2 = hT_3$, $h = \frac{M+1}{M-1}$ и $K_2 = \omega_0^2$, можно получить формулы (5.113) и (5.114).

Техническая реализация системы тем легче, чем меньше протяженность участка h . Это связано с тем, что введение подобного участка расширяет эквивалентную полосу пропускания разомкнутой системы и повышает уровень высокочастотных помех (которые практически всегда присутствуют во входном сигнале) в h раз. Поэтому с точки зрения оптимальности технического решения необходимо стремиться к тому, чтобы получить желаемый запас устойчивости при минимальном значении h , что и дают приведенные выше формулы.

Вместо базовой частоты ω_0 можно принять, что вся л. а. х. фиксируется заданием частоты среза. Тогда, учитывая, что $\omega_{ср} = \omega_0^2 T_2$, можно получить формулы (5.113) и (5.114) в другом виде:

$$T_2 \geq \frac{1}{\omega_{ср}} \frac{M}{M-1}, \quad (5.115)$$

$$T_3 \leq \frac{1}{\omega_{ср}} \frac{M}{M+1}. \quad (5.116)$$

При равенстве левых частей правым показатель колебательности равен заданному значению M . При неравенстве вводится некоторый дополнительный запас устойчивости и показатель колебательности оказывается меньше заданного значения.

Формула (5.114) также может быть записана в виде неравенства, аналогично (5.116). Однако формулу (5.113) лучше сохранить в виде равенства, так как при фиксированном значении h показатель колебательности будет увеличиваться как при снижении, так и при увеличении T_2 .

Учет малых постоянных времени. При использовании передаточной функции вида (5.106) можно ввести дополнительный запас устойчивости с тем, чтобы иметь в канале управления несколько малых постоянных времени, которые можно не учитывать в дальнейших расчетах. Для этой цели можно несколько уменьшить значение постоянной времени T_3 , определяемое формулами (5.114) или (5.116), и отодвинуть фазовую характеристику системы от запретной области (рис. 5.15, а).

Обычно достаточно дополнительного запаса по фазе в районе $\psi = \psi_{\max}$ порядка нескольких градусов. Примем, например, что допустимая сумма малых постоянных вре-

мени, которые можно не учитывать в расчете, составляет

$$\sum T_m = \frac{0,1}{\omega_0} \quad (5.117)$$

при числе малых постоянных времени, равном $4 \div 6$. Тогда граница малых постоянных времени определяется величиной

$$T_r = \frac{0,025}{\omega_0}. \quad (5.118)$$

Если в этом случае некоторая малая постоянная времени дает сопрягающую частоту $\omega_n = T_m^{-1} > \omega_r = T_r^{-1}$, то ее можно не учитывать при расчете при условии, что число таких постоянных времени не превосходит $4 \div 6$.

При введении дополнительного запаса устойчивости расчетная формула (5.113) сохраняется, а формула (5.114) приобретает вид

$$T_s \leq \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1} - 0,1 \right). \quad (5.119)$$

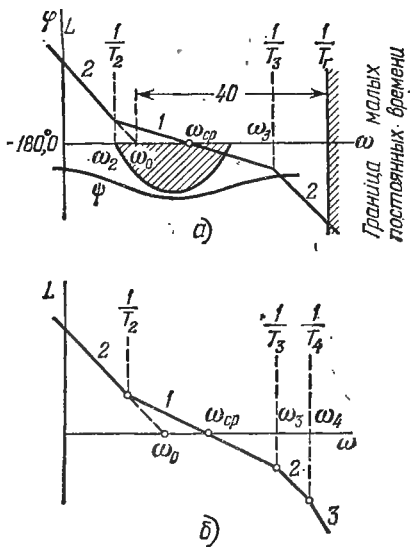


Рис. 5.15. Л. а. х. систем с аста-
тизмом второго порядка (тип
2—1—2 и тип 2—1—2—3).

Л. а. х. типа 2—1—1—3—4... В этом случае передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_2(1+T_2p)}{p^2(1+T_3p)(1+T_4p)(1+T_5p) \dots (1+T_np)}. \quad (5.120)$$

Число множителей типа $(1+T_ip)$ в знаменателе не ограничено, т. е. может рассматриваться система любого порядка. Л. а. х. изображена на рис. 5.15, б. Наклоны асимптот имеют значения $-2 \cdot 20$ дБ/дек, $-1 \cdot 20$ дБ/дек, $-2 \cdot 20$ дБ/дек, $-3 \cdot 20$ дБ/дек и т. д. до значения $-(n-1) \cdot 20$ дБ/дек. Для получения заданного показателя

колебательности необходимо выполнить условие (5.113) для постоянной времени T_2 . Сумма всех постоянных времени, входящих в знаменатель (5.120), должна, в соответствии с (5.114) и (5.116), удовлетворять одному из неравенств:

$$\sum_{i=3}^n T_i = T_{\Sigma} \leq \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}, \quad (5.121)$$

$$\sum_{i=3}^n T_i = T_{\Sigma} \leq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M+1}. \quad (5.122)$$

Эти неравенства получаются из (5.114) и (5.116), если в районе максимального запаса по фазе использовать приближенную зависимость для фазового сдвига

$$\sum_{i=3}^n \arctg \omega T_i \approx \arctg \omega T_{\Sigma}.$$

При обычно используемых значениях $M = 1,1 \div 1,7$ это приближенное равенство выполняется с большой точностью. В л. а. х. подобного типа постоянное запаздывание τ , если оно имеется в канале управления, легко учитывается добавлением его в левую часть неравенств (5.121) или (5.122).

Системы с астатизмом первого порядка. Астатизм первого порядка часто встречается в системах, содержащих исполнительный двигатель электрического, пневматического или гидравлического типа. В простейшем случае, когда канал управления системы состоит из безынерционного усилителя и двигателя любого типа и не содержит корректирующих средств, передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{K_1}{p(1 + T_1 p)}, \quad (5.123)$$

где $K_1 [с^{-1}]$ — общий коэффициент усиления разомкнутой системы (добротность по скорости), а T_1 — постоянная времени двигателя (электромеханическая, гидромеханическая и т. п.). Этой передаточной функции и соответствует асимптотическая л. а. х. типа 1—2, изображенная на рис. 5.16, а. В дальнейшем л. а. х. такого типа будем

называть «несимметричными» в отличие от «симметричного» типового перехода оси нуля децибел, свойственного л. а. х., изображенной на рис. 5.14.

Определение допустимого значения постоянной времени T_1 с точки зрения необходимого запаса устойчивости может быть сделано путем нахождения показателя колебательности

$$|H(j\omega)|_{\max} = \left| \frac{K_1}{-\omega^2 T_1 + j\omega + K_1} \right|_{\max} = M. \quad (5.124)$$

Исследуя (5.124) на максимум, можно найти условие того, чтобы показатель колебательности не превышал заданного значения:

$$K_1 T_1 \leq \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2}. \quad (5.125)$$

Формула (5.125) позволяет при заданном значении добротности по скорости определять допустимое значение постоянной времени двигателя или при заданном значении постоянной времени двигателя — максимальное значение добротности по скорости, которое можно иметь в системе.

В более сложном случае, когда в канале управления имеется ряд инерционных звеньев, формула (5.123) приобретает вид

$$W(p) = \frac{K_1}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)(1+T_3 p) \dots (1+T_n p)}. \quad (5.126)$$

Этой передаточной функции соответствует л. а. х. типа 1—2—3—4... (рис. 5.16, б), которая также является «несимметричной». В этом случае можно воспользоваться приближенной формулой, ориентировочно связывающей

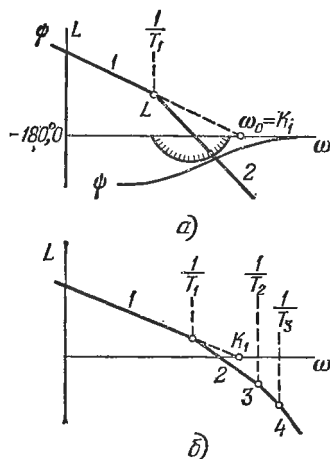


Рис. 5.16. «Несимметричные» л. а. х. систем с астатизмом первого порядка (типа 1—2 и 1—2—3...).

сумму всех постоянных времени с добротностью по скорости и показателем колебательности аналогично выражению (5.125):

$$K_1 \sum_{i=1}^n T_i \leq \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2}. \quad (5.127)$$

Формула (5.127) дает хорошую точность при $M \leq 1,3$. Она становится точной при $M=1$ и произвольном числе постоянных времени n или при $n=1$ и любом значении показателя колебательности, когда она переходит в (5.125). Формула (5.127) позволяет также учитывать наличие в канале постоянного временного запаздывания τ , которое должно при этом суммироваться с постоянными времени T_i .

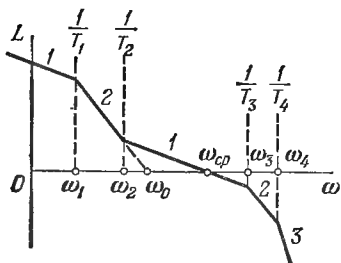


Рис. 5.17. «Симметричная» л. а. х. систем с астатизмом первого порядка (тип 1—2—1—2—3—...).

В более сложных случаях, когда невозможно удовлетворить требованиям по точности, сохраняя при этом достаточный запас устойчивости, приходится переходить к л. а. х. иного типа. На рис. 5.17 изображена асимптотическая л. а. х. типа 1—2—1—2—3..., которая соответствует наличию в системе астатизма первого порядка, но позволяет иметь более высокий общий коэффициент усиления (добротность по скорости). Эта л. а. х. может быть получена из л. а. х. типа 2—1—2—3... добавлением одного излома при сопрягающей частоте $\omega_1 = T_1^{-1}$; она относится к л. а. х. «симметричного» вида.

Л. а. х. типа 1—2—1—2—3... соответствует передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K_1 (1 + T_2 p)}{p (1 + T_1 p) (1 + T_3 p) (1 + T_4 p) \dots (1 + T_n p)}. \quad (5.128)$$

Обычно сопрягающая частота $\omega_1 = T_1^{-1}$ значительно меньше частоты в зоне максимума требуемого запаса по

фазе. Это будет тем справедливей, чем больше необходимое значение добротности по скорости. Поэтому с большой степенью точности здесь могут быть использованы формулы предыдущего параграфа, дающие связь между общим коэффициентом усиления K_1 , показателем колебательности M и постоянными времени для случая астатизма второго порядка.

В рассматриваемом здесь случае положение всей л. а. х. определяется значением базовой частоты (рис. 5.17)

$$\omega_0 = \sqrt{K_2} = \sqrt{\frac{K_1}{T_1}}. \quad (5.129)$$

В соответствии с формулами (5.113) и (5.121) имеем

$$T_2 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}},$$

$$\sum_{i=3}^n T_i = T_\Sigma \leq \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}$$

или в соответствии с формулами (5.115) и (5.122)

$$T_2 \geq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M-1},$$

$$\sum_{i=3}^n T_i = T_\Sigma \leq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M+1}.$$

При более точном расчете можно учесть дополнительный запас по фазе (по сравнению с системой, имеющей астатизм второго порядка)

$$\Delta\mu = \arctg \frac{1}{\omega T_1}. \quad (5.130)$$

Это обстоятельство позволяет немного увеличить допустимую сумму постоянных времени T_Σ , определяемую формулами (5.120) или (5.121), или немного уменьшить требуемое значение постоянной времени T_2 , определяемое формулами (5.113) или (5.115). Первое обычно бывает более предпочтительным. В результате могут быть получены уточненные формулы для допустимой суммы

постоянных времени:

$$\sum_{i=3}^n T_i = T_{\Sigma} \leq \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1} + \frac{1}{\omega_0 T_1} \frac{M}{M+1} \right), \quad (5.131)$$

$$\sum_{i=3}^n T_i = T_{\Sigma} \leq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \left(\frac{M}{M+1} + \frac{1}{\omega_{\text{ср}} T_1} \frac{M^2}{M^2-1} \right). \quad (5.132)$$

При этом постоянная времени T_2 по-прежнему определяется формулами (5.113) или (5.115). Однако уточнение, даваемое формулами (5.131) и (5.132), обычно не имеет практического значения, и расчет можно вести по формулам (5.120) или (5.121), которые были получены для системы с астатизмом второго порядка.

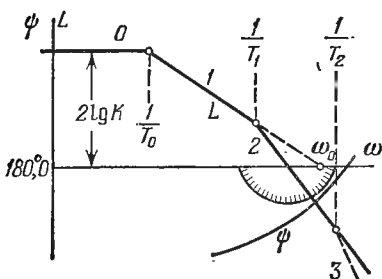


Рис. 5.18. «Несимметричная» л. а. х. статической системы (тип 0—1—2—3...).

Статические системы. Статические системы обычно получают при регулировании различных производственных объектов, при регулировании скорости вращения двигателей и при

управлении усилителями с глубокой обратной связью (например, операционными). В простейшем случае передаточная функция разомкнутой статической системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{(1 + T_0 p)(1 + T_1 p)}, \quad (5.133)$$

где K — общий коэффициент усиления, T_0 — наибольшая постоянная времени (обычно объекта регулирования), T_1 — постоянная времени, определяемая обычно инерционностью канала управления. Соответствующая асимптотическая «несимметричная» л. а. х. типа 0—1—2... изображена на рис. 5.18 сплошной линией.

При больших значениях общего коэффициента усиления передаточная функция в районе пересечения л. а. х. оси нуля децибел (в этой области частот) может быть приближенно сведена к передаточной функции системы с

астатизмом первого порядка

$$W(p) = \frac{\omega_0}{p(1+T_1p)}, \quad (5.134)$$

где базовая частота л. а. х. равна

$$\omega_0 = \frac{K}{T_0}. \quad (5.135)$$

Это дает возможность использовать полученную выше для л. а. х. типа 1—2 формулу (5.125) при замене K_1 на KT_0^{-1} . Тогда условие получения заданного запаса устойчивости имеет вид

$$\frac{KT_1}{T_0} \leq \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2}. \quad (5.136)$$

Для передаточной функции более сложного вида

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{K}{\prod_{i=0}^n (1+T_i p)} = \\ &= \frac{K}{(1+T_0 p)(1+T_1 p)(1+T_2 p) \dots (1+T_n p)}, \end{aligned} \quad (5.137)$$

аналогично (5.127), имеем

$$\frac{K}{T_0} \sum_{i=1}^n T_i \leq \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2}. \quad (5.138)$$

Последнее выражение дает достаточно точные результаты при $M \leq 1,3$.

Из выражений (5.136) и (5.138) видна роль первой большой постоянной времени T_0 как фактора, увеличивающего запас устойчивости системы. Повышение общего коэффициента усиления или повышение значения суммы остальных постоянных времени при заданном запасе устойчивости может быть сделано при увеличении постоянной времени T_0 .

Отклонение передаточной функции (5.134) в области низких частот от ее точного выражения (5.133) приводит, в результате использования расчетных формул (5.136) или (5.138), к некоторому дополнительному запасу устойчивости. Однако учет этого обстоятельства обычно делать нецелесообразно ввиду его незначительности [7].

При повышенных требованиях, предъявляемых к системе в части ее точности, могут применяться л. а. х., в которых использован типовой «симметричный» переход оси нуля децибел (рис. 5.17). Подобная л. а. х. типа

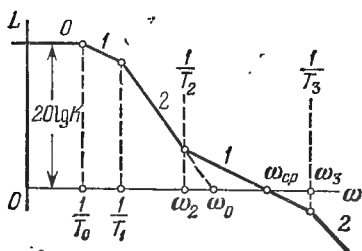


Рис. 5.19. «Симметричная» л. а. х. статической системы (тип 0—1—2—1—2...).

0—1—2—1—2... изображена на рис. 5.19. Она может быть образована из л. а. х. типа 2—1—2—3... (рис. 5.15, б) систем с астатизмом второго порядка или из л. а. х. типа 1—2—1—2—3... (рис. 5.17) систем с астатизмом первого порядка.

Типовой асимптотической л. а. х., изображенной на рис. 5.19, соот-

ветствует передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K(1+T_2p)}{(1+T_0p)(1+T_1p)(1+T_3p)(1+T_4p)\dots(1+T_np)}. \quad (5.139)$$

Базовая частота л. а. х. равна

$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{K}{T_0 T_1}}. \quad (5.140)$$

При известных значениях T_0 и T_1 базовая частота оказывается также известной. Тогда могут быть использованы формулы (5.113), (5.115), (5.121) и (5.122) для определения требуемого значения постоянной времени T_2 и допустимой суммы постоянных времени T_Σ . Эти формулы приобретают здесь вид

$$T_2 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{\omega_{cp}} \frac{M}{M-1} = \sqrt{\frac{T_0 T_1 M}{K(M-1)}}, \quad (5.141)$$

$$T_\Sigma = \sum_{i=3}^n T_i \leq \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1} = \frac{1}{\omega_{cp}} \frac{M}{M+1} = \sqrt{\frac{T_0 T_1 M(M-1)}{K(M+1)^2}}. \quad (5.142)$$

Учет некоторого дополнительного запаса устойчивости, даваемого отклонением л. а. х., изображенной на рис. 5.19, от л. а. х., системы с астатизмом второго порядка

(рис. 5.15) в области низких частот, изменяет формулу (5.142). В этом случае она имеет следующий вид [7]:

$$T_{\Sigma} = \sum_{i=3}^n T_i \leq \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1} + \left(\frac{1}{\omega_0 T_0} + \frac{1}{\omega_0 T_1} \right) \frac{M}{M+1} \right) = \\ = \sqrt{\frac{T_0 T_1 M(M-1)}{K(M+1)^2}} + \frac{(T_0 + T_1) M}{K(M+1)}. \quad (5.143)$$

В формулах для допустимой суммы постоянных времени T_{Σ} (5.142) или (5.143) может также учитываться постоянное временное запаздывание τ , имеющееся в канале управления.

Системы, содержащие колебательные звенья. В некоторых случаях объект управления представляет собой колебательное звено с передаточной функцией

$$W_0(p) = \frac{k_0}{1 + 2\xi_0 T_0 p + T_0^2 p^2}, \quad (5.144)$$

где ξ_0 — безразмерный параметр затухания, $0 \leq \xi_0 \leq 1$, а $q_0 = T_0^{-1}$ — угловая частота свободных колебаний. Иногда объекты регулирования, например гироскопы, могут иметь более сложную передаточную функцию, но содержать также и подобное звено.

Колебательное звено, входящее в усилительный канал, сравнительно легко может быть учтено при формировании типовой л. а. х. в двух случаях: если его собственная частота колебаний q_0 значительно меньше частоты среза и если q_0 значительно больше частоты среза. Рассмотрим эти случаи отдельно.

В случае низкочастотного колебательного звена практически только л. а. х. симметричного вида дает приемлемые результаты. На рис. 5.20 изображены л. а. х. и л. ф. х. статической системы, включающей в себя колебательное звено. Приведенной л. а. х. соответствует передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{(1 + 2\xi_0 T_0 p + T_0^2 p^2)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) \dots (1 + T_n p)}. \quad (5.145)$$

Для расчетов, связанных с получением требуемого запаса устойчивости, передаточная функция (5.145) может быть заменена эквивалентной функцией

$$W(p) = \frac{K_2(1 + T_2 p)}{p^2(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) \dots (1 + T_n p)}, \quad (5.146)$$

которая совпадает с (5.119). Значения добротности по ускорению и базовой частоты определяются выражениями

$$K_2 = \frac{K}{T_0^2}, \quad (5.147)$$

$$\omega_0 = \sqrt{K_2} = \frac{\sqrt{K}}{T_0}. \quad (5.148)$$

Расчеты могут производиться в соответствии с формулами (5.113) и (5.120). Отличие фазовой характеристики (5.145) в низкочастотной области от фазовой характеристики (5.146), которая изображена на рис. 5.20 пунктиром, дает некоторый дополнительный запас устойчивости. Уточненная формула для допустимой суммы

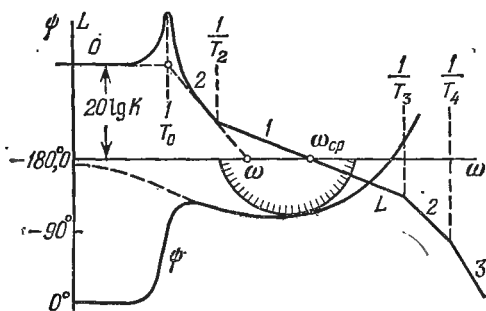


Рис. 5.20. Л. а. х. и л. ф. х. статической системы с низкочастотным колебательным звеном.

постоянных времени T_Σ совпадает с (5.143), если заменить в ней $(T_0 + T_1)$ на $2\xi_0 T_0$.

При наличии высокочастотного колебательного звена, т. е. при выполнении условия $q_0 = T_0^{-1} \gg \omega_0$, где ω_0 — базовая частота, могут применяться л. а. х. любого типа как несимметричного, так и симметричного вида. Один из случаев изображен на рис. 5.21.

При выполнении условия $q_0 \gg \omega_0$ фазовый сдвиг, вносимый колебательным звеном в районе запретной зоны, можно принять равным $-\arctg 2\xi_0 T_0 \omega$. Поэтому значение $2\xi_0 T_0$ должно входить в общую допустимую сумму постоянных времени T_Σ , определяемую по одной из приведенных выше формул. Для того чтобы избежать появления второй запретной зоны для л. ф. х. в районе пика л. а. х.

при $\omega \approx q_0$ (рис. 5.21), необходимо выполнение дополнительного условия, которое вытекает из неравенства (5.103):

$$|W(jq_0)| = A(q_0) < \frac{M}{M+1}. \quad (5.149)$$

Выполнение этого условия может быть легко проверено при построении л. а. х. Следовательно, в этом случае появляется запретная зона для л. а. х. в высокочастотной области. Эта запретная зона показана на рис. 5.21.

Для колебательных звеньев со слабым демпфированием ($\zeta_0 \ll 1$), которое приводит к появлению высокого пика л. а. х., а также для консервативных звеньев ($\zeta_0 = 0$) наличие такой запретной зоны в высокочастотной части л. а. х. нежелательно, так как заставляет снижать общий коэффициент усиления. В этих случаях возможно использование л. а. х. с пиком в высокочастотной области, высота которого больше единицы, т. е.

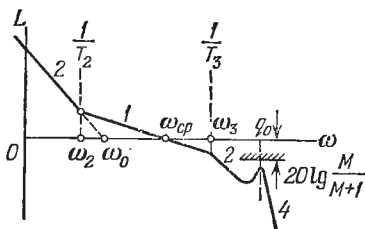


Рис. 5.21. Л. а. х. при наличии высокочастотного колебательного звена.

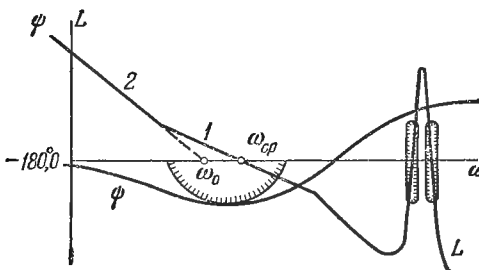


Рис. 5.22. Л. а. х. с дополнительными запретными областями для л. ф. х.

$A(q_0) > 1$. Это показано на рис. 5.22. Однако здесь возникают новые запретные области для л. ф. х. Фазовая характеристика должна обогнуть эти запретные области так, как это показано на рис. 5.22.

Для облегчения выполнения этого условия в канале управления могут применяться звенья, которые дают дополнительные отрицательные фазовые сдвиги в районе частоты $\omega \approx q_0$. Для этой цели, в частности, могут использоваться так называемые неминимально-фазовые звенья [7, 10].

Системы, содержащие неустойчивые звенья. Канал управления может иметь в своем составе неустойчивое звено. Неустойчивым звеном может быть сам объект управления, либо оно может возникать из-за потери устойчивости по цепи местной обратной связи. Второй случай маловероятен, так как обычно нет смысла выбирать параметры местной обратной связи таким образом, чтобы она была неустойчивой.

Неустойчивый объект первого порядка. В этом случае передаточная функция объекта имеет вид

$$W_0(p) = \frac{k_0}{-1 + T_0 p}. \quad (5.150)$$

Пусть в статической системе управления используется типовая л. а. х. 0—1—2—3... (рис. 5.18) и T_0 является наибольшей постоянной времени. Передаточная функция разомкнутой системы в этом случае имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{(-1 + T_0 p)(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) \dots (1 + T_n p)}. \quad (5.151)$$

Л. а. х. для передаточной функции (5.151) изображена на рис. 5.23. На этом же рисунке изображена л. ф. х. для случая, когда объект устойчив (пунктирная линия), и для случая, когда объект неустойчив (сплошная линия). Из сравнения фазовых характеристик видно, что при выполнении неравенства

$$T_0 \gg \omega_0^{-1} = \frac{T_0}{K}, \quad (5.152)$$

которое сводится к условию $K \gg 1$, использование приближенной формулы (5.138) справедливо как для устойчивого, так и для неустойчивого объекта. Однако если в первом случае имелся небольшой дополнительный запас устойчивости, то во втором случае дополнительный запас устойчивости оказывается отрицательным, и в сомнительных случаях при малых значениях общего коэффициента

усиления следует определять запас устойчивости более точно, используя, например, одновременное построение л. а. х. и л. ф. х. (рис. 5.12).

В л. а. х. «симметричного» вида (рис. 5.19) картина получается аналогичной, и при больших значениях общего коэффициента усиления можно пользоваться при-

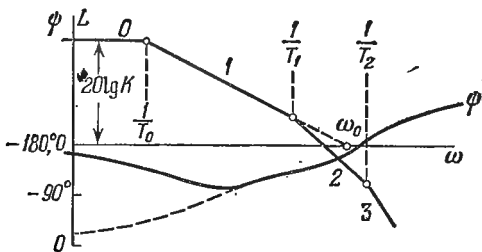


Рис. 5.23. Л. а. х. и л. ф. х. статической системы с неустойчивым звеном первого порядка.

ближенными формулами (5.141) и (5.142). Уточненная формула (5.152) в данном случае приобретает вид

$$T_{\Sigma} = \sum_{i=3}^n T_i \leq \left[\frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1} + \left(-\frac{1}{\omega_0 T_0} + \frac{1}{\omega_0 T_1} \right) \frac{M}{M+1} \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{T_0 T_1 M (M-1)}{K (M+1)^2}} - \frac{(T_0 - T_1) M}{K (M+1)}. \quad (5.153)$$

Заметим, что условие $T_0 > T_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) является необходимым для получения устойчивой системы. Поэтому при использовании типовой асимптотической л. а. х. (рис. 5.18 или 5.19) ее первый излом должен создаваться постоянной времени неустойчивого объекта.

Неустойчивый объект с передаточной функцией (5.140) в системе с астатизмом первого порядка приводит к более существенным трудностям. Несимметричные л. а. х. типа 1—2—3... (рис. 5.16, б) в этом случае вообще не могут использоваться, так как они дают структурную неустойчивость. Симметричные л. а. х. типа 1—2—1—2—3... (рис. 5.17) могут применяться при условии, что T_1 является постоянной времени неустойчивого объекта (5.110), т. е. $T_1 = T_0$. Тогда, если справедливо

неравенство

$$T_1 \gg \omega_0^{-1} = \sqrt{\frac{T_1}{K}}, \quad (5.154)$$

что сводится к условию $KT_1 \gg 1$, расчет может вестись по приближенным формулам, которые приведены выше. Уточненная формула (5.131) в данном случае приобретает вид

$$\sum_{i=3}^n T_i = T_\Sigma \leq \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1} - \frac{1}{\omega_0 T_1} \frac{M}{M+1} \right). \quad (5.155)$$

Последнее выражение показывает, что наличие неустойчивости в объекте несколько снижает запас устойчивости по сравнению со случаем устойчивого объекта.

Неустойчивый объект с передаточной функцией (5.150) в системе с астатизмом второго порядка создает еще большие трудности. Л. а. х. рассмотренного выше типа 2—1—2—3... вообще не может применяться. Для получения структурной устойчивости системы регулирования необходимо использовать л. а. х., имеющие отрицательный наклон в низкочастотной области, превышающий 40 дБ/дек, например, типа 2—3—1—2—3..., что является мало желательным.

Квазиконсервативное звено. Одной из разновидностей неустойчивого объекта второго порядка является квазиконсервативное звено с передаточной функцией

$$W_0(p) = \frac{k}{-1 + T_0^2 p^2} = \frac{k_0}{(-1 + T_0 p)(1 + T_0 p)}. \quad (5.156)$$

Это звено характеризуется наличием постоянного фазового сдвига $\psi = -180^\circ$. Подобную передаточную функцию могут иметь некоторые подвижные объекты.

В системе управления с таким объектом может быть использована симметричная л. а. х. типа 0—2—1—2—3... (рис. 5.24). Она соответствует л. а. х., изображенной на рис. 5.19, в случае, когда два первых излома л. а. х. совпадают ($T_1 = T_0$). Тогда передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{(-1 + T_0^2 p^2)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) \dots (1 + T_n p)}. \quad (5.157)$$

При выполнении условия $K \gg 1$ такая передаточная функция в части расчета запаса устойчивости эквивалентна передаточной функции системы с астатизмом второго порядка

$$W_9(p) = \frac{K(1+T_2p)}{T_0^2 p^2 (1+T_3p)(1+T_4p) \dots (1+T_n p)} = \frac{K_2(1+T_2p)}{p^2 (1+T_3p)(1+T_4p) \dots (1+T_n p)}, \quad (5.158)$$

где $K = T_0^2 K_2$. Это сводит задачу к расчету системы с астатизмом второго порядка, который был рассмотрен выше. Базовая частота л. а. х. равна

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{K}}{T_0}. \quad (5.159)$$

Отличие рассматриваемой системы от системы с передаточной функцией (5.119) заключается в том, что снижение общего коэффициента усиления в первой может привести к снижению запаса устойчивости (при $K < \frac{M}{M-1}$) и даже к потере устойчивости (при $K < 1$).

Квазиколесательное звено. Передаточная функция объекта в этом случае имеет вид

$$W(p) = \frac{k_0}{-1 + 2\xi_0 T_0 + T_0^2 p^2} = \frac{k_0}{(-1 + T'_0 p)(1 + T''_0 p)}. \quad (5.160)$$

Здесь ξ_0 — безразмерный параметр затухания, а эквивалентные постоянные времени определяются выражениями

$$T'_0 = \xi_0 T_0 + T_0 \sqrt{1 + \xi_0^2}, \quad (5.161)$$

$$T''_0 = -\xi_0 T_0 + T_0 \sqrt{1 + \xi_0^2}. \quad (5.162)$$

Это звено отличается от предыдущего тем, что фазовый сдвиг равен -180° только на низких и высоких

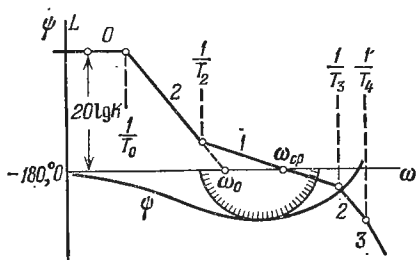


Рис. 5.24. Л. а. х. и л. ф. х. статической системы с квазиконсервативным звеном.

частотах. Формула для фазового сдвига

$$\psi = -180^\circ + \operatorname{arctg} \frac{2\xi_0 T_0 \omega}{1 + \omega^2 T_0^2} \quad (5.163)$$

показывает, что в районе некоторых средних частот отрицательный фазовый сдвиг по абсолютной величине меньше 180° . Экстремум имеет место при частоте $\omega_0 = T_0^{-1}$. На этой частоте фазовый сдвиг равен

$$\psi_0 = -180^\circ + \operatorname{arctg} \xi_0. \quad (5.164)$$

В случае, когда $\xi_0 \gg 1$, подобное звено можно рассматривать как два последовательно включенных звена, одно из которых имеет передаточную функцию вида (5.150)

с постоянной времени, равной T'_0 , а второе является обычным аperiодическим звеном первого порядка с постоянной времени $T''_0 < T'_0$. В системах управления с подобным звеном могут использоваться л. а. х. несимметричного и симметричного вида.

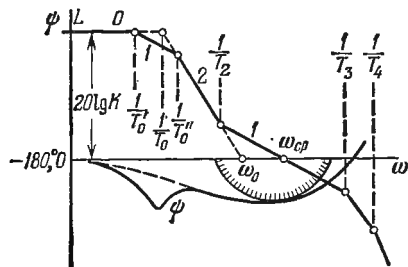


Рис. 5.25. Л. а. х. и л. ф. х. статической системы с квазиколесательным звеном.

Случай, когда $\xi_0 < 1$, ближе к квазиконсервативному звену с передаточной функцией

(5.156). Для систем управления с объектом подобного типа может использоваться симметричная л. а. х., соответствующая статическому регулированию (рис. 5.19). Л. а. х. подобного типа с рассматриваемым неустойчивым объектом, близкая по виду к л. а. х., изображенной на рис. 5.24, показана на рис. 5.25. Форма л. ф. х., изображенной на этом же рисунке, показывает, что имеется некоторое отличие в ходе фазовой характеристики в низкочастотной области по сравнению со случаем квазиконсервативного звена (рис. 5.24). В рассматриваемом случае получается некоторый дополнительный запас устойчивости.

Как и в предыдущем случае, расчет системы регулирования со звеном подобного типа можно свести к расчету системы с астатизмом второго порядка, который

был рассмотрен выше. Эквивалентное значение добротности по ускорению равно

$$K_2 = \frac{K}{T_0^2}. \quad (5.165)$$

Базовая частота л. а. х. равна

$$\omega_0 = \sqrt{K_2} = \frac{1}{T_0} \sqrt{K}. \quad (5.166)$$

Отличие в виде фазовой характеристики в низкочастотной области (рис. 5.25) по сравнению со случаем, изображенным на рис. 5.14, дает некоторый дополнительный запас устойчивости. Как и в предыдущем случае, сильное снижение общего коэффициента усиления может привести к снижению запаса устойчивости и даже к потере устойчивости (при $K < 1$).

Квазиколебательное звено с отрицательным затуханием. Звено подобного типа имеет передаточную функцию вида

$$W_0(p) = \frac{k_0}{-1 - 2\xi_0 T_0 p + T_0^2 p^2} = \frac{k_0}{(-1 + T_0' p)(1 + T_0'' p)}. \quad (5.167)$$

Эквивалентные постоянные времени равны

$$T_0' = -\xi_0 T_0 + T_0 \sqrt{1 + \xi_0^2}, \quad (5.168)$$

$$T_0'' = \xi_0 T_0 + T_0 \sqrt{1 + \xi_0^2}. \quad (5.169)$$

Фазовый сдвиг, вносимый звеном, имеет вид

$$\psi = -180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{2\xi_0 T_0 \omega}{1 + \omega^2 T_0^2}. \quad (5.170)$$

Экстремальное значение фазового сдвига получается при $\omega = T_0^{-1}$ и равно

$$\psi_9 = -180^\circ - \operatorname{arctg} \xi_0. \quad (5.171)$$

Как и при квазиколебательном звене с положительным затуханием (5.159), рассматриваемое звено может быть представлено в виде последовательно включенных неустойчивого звена первого порядка (5.150) с постоянной времени T_0' и апериодического звена первого порядка с постоянной времени T_0'' . Однако в данном случае $T_0'' > T_0'$, что и дает возможность использовать л. а. х. несимметричного вида (рис. 5.23).

Использование л. а. х. симметричного вида здесь не вызывает затруднений, как и в предыдущем случае. Л. а. х. статической системы с объектом рассматриваемого типа полностью совпадает с изображенной на рис. 5.25. Отличие здесь наблюдается только в виде фазовой характеристики в низкочастотной области. Отклонение фазовой характеристики от изображенной на рис. 5.25 пунктирной линии происходит в другую сторону (в сторону больших отрицательных сдвигов).

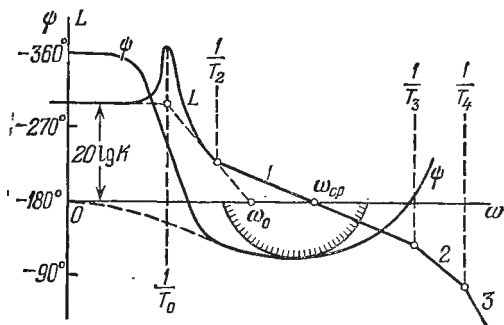


Рис. 5.26. Л. а. х. и л. ф. х. статической системы с колебательным звеном, имеющим отрицательное затухание.

Расчет, как и для предыдущего звена, можно свести к расчету системы с астатизмом второго порядка (рис. 5.15). Добротность по ускорению K_2 и базовая частота ω_0 определяются приведенными выше формулами (5.158) и (5.159). Дальнейший расчет производится аналогично изложенному выше.

Колебательное звено с отрицательным затуханием. Звено подобного вида имеет передаточную функцию

$$W_0(p) = \frac{k_0}{1 - 2\zeta_0 T_0 p + T_0^2 p^2}. \quad (5.172)$$

Этот случай может быть сведен к системе (5.144). Л. а. х. симметричного вида, изображенная на рис. 5.26, полностью совпадает с л. а. х., изображенной на рис. 5.20, а л. ф. х. имеет некоторое отличие. При $\zeta_0 < 1$ это отличие наблюдается практически только в низкочастотной области.

частотной области. Весь расчет аналогичен изложенному выше для звена с передаточной функцией (5.104). Уточненная формула для допустимой суммы постоянных времени T_{Σ} совпадает с (5.143), если заменить в ней $(T_0 + T_1)$ на $-2\xi_0 T_0$. Уточненная формула указывает на некоторое снижение запаса устойчивости по сравнению с системой, имеющей астатизм второго порядка. Однако это снижение обычно невелико, и только в сомнительных случаях (малое значение K или большое значение ξ_0) следует прибегнуть к уточнению расчета.

Переходные процессы в системах с типовыми передаточными функциями. Рассматриваемая ниже методика оценки переходных процессов относится к непрерывным системам. Однако если соблюдать условие того, что частота T^{-1} , где T — период дискретности, много больше частоты среза л. а. х., то эта методика может быть использована для оценки переходных процессов в цифровых системах управления.

Рассмотрим систему управления, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии совпадает с (5.166),

$$W(p) = \frac{K_2(1 + T_2 p)}{p^2(1 + T_3 p)},$$

а передаточная функция в замкнутом состоянии имеет вид

$$H(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{K_2(1 + T_2 p)}{T_3 p^3 + p^2 + K_2 T_2 p + K_2}. \quad (5.173)$$

Эти передаточные функции соответствуют типовому переходу оси нуля децибел (рис. 5.14), т. е. л. а. х. типа 2—1—2. Воспользовавшись базовой частотой л. а. х. $\omega_0 = \sqrt{K_2}$, можно ввести безразмерное время $t_0 = \omega_0 t$ и перейти к новой переменной, определяемой соотношением $p = \omega_0 s$. Тогда передаточную функцию (5.173) в нормированном виде можно записать следующим образом:

$$H(s) = \frac{\tau_2 s + 1}{\tau_3 s^3 + s^2 + \tau_2 s + 1}, \quad (5.174)$$

где $\tau_2 = \omega_0 T_2$ и $\tau_3 = \omega_0 T_3$ — относительные постоянные времени.

Если на вход системы поступает ступенчатый сигнал $g(t) = g_0 l(t)$, то на выходе системы ее реакция $y(t)$

является переходной функцией. На основании известных методов построения переходных процессов можно из (5.174) найти переходную функцию в нормированном виде, т. е. для относительного времени:

$$y(t_0) = g_0 [1 + Ae^{-s_1 t_0} + (B \sin \beta t_0 + C \cos \beta t_0) e^{-\alpha t_0}]. \quad (5.175)$$

Подставляя в (5.174) значения относительных постоянных времени, соответствующих различным показателям колебательности, можно на основании (5.175) построить ряд переходных функций.

Таблица 5.1

Значения коэффициентов

M	s_1	α	β	A	B	C
1,1	0,345	3,0	3,1	0,145	—1,09	—1,145
1,3	0,645	1,52	1,88	0,426	—1,00	—1,426
1,5	0,91	1,0	1,48	0,83	—0,725	—1,83
1,7	1,05	0,715	1,37	0,75	—0,338	—1,75

В таблице 5.1 приведены значения коэффициентов (5.175) для различных показателей колебательности. По данным таблицы 5.1 построены кривые переходных процессов (рис. 5.27). Переходные процессы построены в нормированном виде: по оси ординат отложена величина $h_0(t_0) = g_0^{-1} y(\omega_0 t)$, а по оси абсцисс — относительное время $(t_0 = \omega_0 t)$ в пределах изменения от 0 до 4.

Параметры переходных процессов — перерегулирование σ (%) и относительное время переходного процесса $\omega_0 t_n$ — для $|1 - h(t_0)| \leq 0,01$ приведены в таблице 5.2.

Хотя приведенные на рис. 5.27 кривые переходных процессов соответствуют л. а. х. типа 2—1—2 (рис. 5.14), они с большой степенью точности могут использоваться для оценки переходных процессов в системах регулирования, которым соответствуют симметричные л. а. х. других типов, изображенных, например, на рис. 5.17, 5.19, 5.20, 5.24, 5.25 и 5.26. Для этих л. а. х. характерным является наличие участка с наклоном — 20 дБ/дек в районе пересечения оси абсцисс.

Различие будет наблюдаться в начальной части, если высокочастотная часть данной л. а. х. отличается от

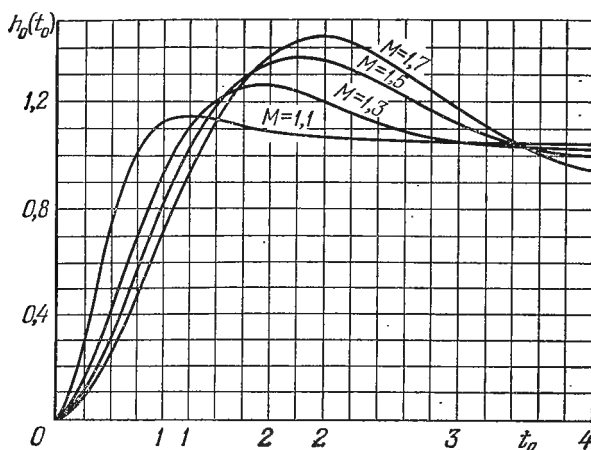


Рис. 5.27. Переходные функции систем с типовыми симметричными л. а. х.

высокочастотной части исходной л. а. х. типа 2—1—2, и в конечной части, если будут отличаться низкочастотные части л. а. х. Таким образом, в случае нужды оценка переходных процессов может осуществляться по универсальным кривым, приведенным на рис. 5.27, во всяком случае для средней части кривой переходного процесса, которая показывает склонность системы к колебаниям и характеризует запас устойчивости.

Можно построить универсальные кривые переходных процессов для случая, когда на вход системы управления поступает сигнал в виде линейной функции $g(t) = v_0 I(t)$, где v_0 — скорость изменения входной величины. Тогда реакция системы $e(t) = g(t) - y(t)$ может быть записана в виде функции

Таблица 5.2

Параметры переходных процессов

M	1,1	1,3	1,5	1,7
$\sigma, \%$	13,8	26,5	37,2	44,6
$\omega_0 t_n$	7,75	5,83	5,45	7,25

относительного времени:

$$e(t_0) = g(t_0) - y(t_0) =$$

$$= \frac{v_0}{\omega_0} t_0 - \frac{v_0}{\omega_0} \int_0^{t_0} [1 + A e^{-s_1 t_0} + (B \sin \beta t_0 + C \cos \beta t_0) e^{-\alpha t_0}] dt_0 =$$

$$= \frac{v_0}{\omega_0} \left\{ \frac{A}{s_1} (1 - e^{-s_1 t_0}) + \right.$$

$$+ B \frac{e^{-\alpha t_0}}{\alpha^2 + \beta^2} \times \left[(-\alpha \sin \beta t_0 - \beta \cos \beta t_0) + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right] +$$

$$+ C \left[\frac{e^{-\alpha t_0}}{\alpha^2 + \beta^2} (-\alpha \cos \beta t_0 + \beta \sin \beta t_0) + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \right] \}. \quad (5.176)$$

Здесь коэффициенты s_1 , α , β , A , B и C определяются таблицей 5.1. На рис. 5.28 построены универсальные

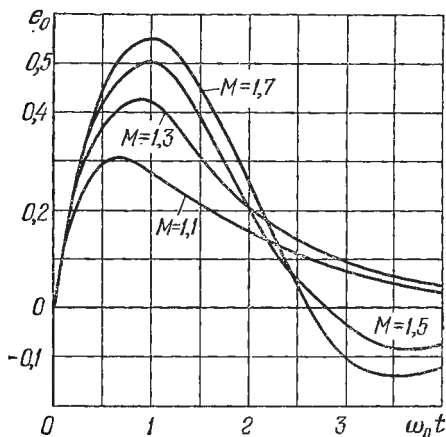


Рис. 5.28. Ошибки при действии на входе линейно возрастающего сигнала систем с симметричными л. а. х.

кривые для нормированной ошибки $e_0(t_0) = v_0^{-1} \omega_0 e(t_0)$. Они являются точными для л. а. х. типа 2—1—2 и приближенными для симметричных л. а. х. других видов, но имеющих типовой переход оси абсцисс (рис. 5.14).

На рис. 5.29 приведены нормированные переходные функции $h_0(t_0) = g_0^{-1} y(t_0)$ для систем, в которых исполь-

зуются несимметричные л. а. х., изображенные на рис. 5.16, 5.18 и 5.23. За исходную принята л. а. х. типа 1—2, для которой эти кривые являются точными. Если показатель колебательности не превышает значения 1, 3, то этими кривыми можно пользоваться и в случае использования л. а. х. других типов.

В качестве базовой частоты ω_0 в л. а. х. несимметричного типа используется частота пересечения асимптоты с наклоном -20 дБ/дек и оси абсцисс. Относительное

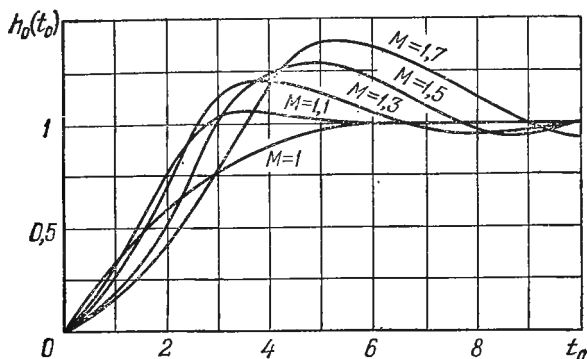


Рис. 5.29. Переходные функции систем с типовыми несимметричными л. а. х.

время в этом случае $t_0 = \omega_0 t$. По оси ординат на графике переходных функций отложена величина $h_0(t_0) = g_0^{-1} y(\omega_0 t)$.

На рис. 5.30 приведены нормированные кривые ошибок в функции относительного времени $t_0 = \omega_0 t$ для систем с несимметричными л. а. х. при поступлении на вход системы сигнала $g(t) = v_0 t 1(t)$. На оси ординат отложена величина $e_0(t_0) = e(t_0)/e_{уст}$. Установившаяся ошибка определяется выражением

$$e_{уст} = \frac{v_0}{K_1} = \frac{v_0}{\omega_0}, \quad (5.177)$$

где $\omega_0 = K_1$ — базовая частота л. а. х. (рис. 5.16). Пользоваться этими кривыми можно так же, как и кривыми рис. 5.29.

Можно показать [7], что рассмотренные типовые передаточные функции близки к оптимальным при необходи-

мости обеспечить воспроизведение полезного сигнала (задающего воздействия) с требуемой точностью и при

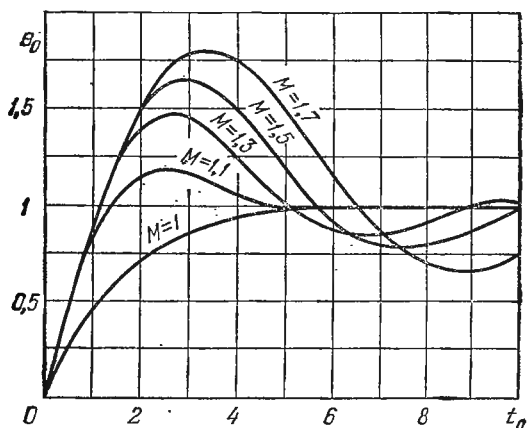


Рис. 5.30. Ошибка при действии на входе линейно возрастающего сигнала систем с несимметричными л. а. х.

выполнении условия минимизации полосы пропускания разомкнутой системы, т. е. в смысле минимизации функционала (4.2).

§ 5.4. Типовые передаточные функции цифровых систем управления

В цифровых системах возможно использование рассмотренных в предыдущем параграфе типовых л. а. х. (типовых передаточных функций) при учете особенностей, которые вносятся дискретностью.

Выбор низкочастотной части л. а. х. должен делаться в соответствии с методикой обеспечения заданной точности, изложенной в § 5.3. Для этого необходимо, чтобы л. а. х. не заходила бы в запретную область, форма которой определяется заданием дисперсий (или максимальных значений) входного сигнала и его производных, а также дисперсий (или максимальным значением) ошибки воспроизведения. При этом предполагается, что для частот, которые определяют расположение запретной области

по точности, справедливо утверждение о практическом совпадении круговой частоты с псевдочастотой, т. е.

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{arctg} \frac{\omega T}{2} \approx \omega. \quad (5.178)$$

Условие (5.178) определяет понятие низких частот в рассматриваемой системе.

Построение средне- и высокочастотной частей желаемой типовой л. а. х. производится в соответствии с изложенным, но с учетом особенностей построения л. а. х. цифровых систем, которые были изложены в главе 2. Эти особенности сводятся к методике учета малых постоянных времени и к учету эффекта транспонирования частот в колебательных и консервативных звеньях.

Типовые передаточные функции цифровых систем при использовании непрерывных корректирующих звеньев. Рассмотрим методику построения типовой л. а. х. для цифровой системы при использовании экстраполятора нулевого порядка. Пусть асимптотическая л. а. х. непрерывной системы, удовлетворяющей требованиям точности воспроизведения задающего воздействия и требованиям по запасу устойчивости, имеет вид, изображенный на рис. 5.31, а. Изломы асимптотической л. а. х. определяются реальными постоянными времени апериодических звеньев, входящих в структуру системы (объект, исполнительные элементы, усилители и др.), и постоянными времени используемых в системе непрерывных корректирующих звеньев.

Выберем некоторое значение периода дискретности T и проведем на логарифмической сетке вертикальную прямую на частоте $2T^{-1}$. Тогда на основании изложенного в § 2.8 вся асимптотическая л. а. х. непрерывной системы левее частоты $\omega = 2T^{-1}$ перейдет в асимптотическую л. а. х. цифровой системы. Область частот от правого края запретной области по точности до частоты $\omega = 2T^{-1}$ представляет собой область средних частот. Таким образом, и в области низких частот (в районе запретной области по точности), и в области средних частот построение л. а. х. цифровой системы не имеет никаких особенностей по сравнению с непрерывной системой (рис. 5.31, б).

Из изложенного в § 2.8 следует, что правее частоты $\omega = 2T^{-1}$, т. е. в области высоких частот, асимптотическая

л. а. х. цифровой системы имеет последнюю асимптоту с нулевым наклоном. Сопряжение этой асимптоты со среднечастотной частью может быть различным, что показано на рис. 5.31, б в виде некоторой области сопряжения.

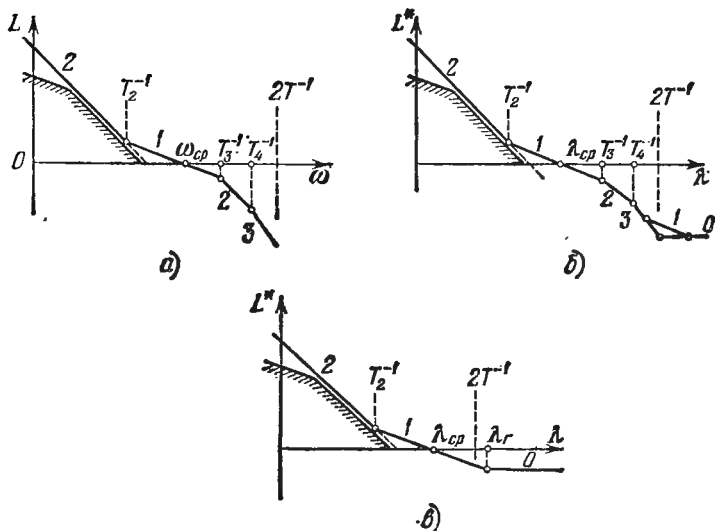


Рис. 5.31. Переход от л. а. х. непрерывной системы к дискретной.

Ход л. а. х. в высокочастотной области и тот или иной вид сопряжения последней асимптоты со среднечастотной частью л. а. х. не имеют практического значения. Важно, чтобы вид л. а. х. правее частоты среза $\omega_{\text{ср}} \approx \lambda_{\text{ср}}$ отвечал бы условию ограничения суммы малых постоянных времени в соответствии с формулами § 5.3. Кроме того, должно быть наложено ограничение на высоту резонансных пиков в области высоких частот, если фазовый сдвиг, который имеет система без учета рассматриваемого колебательного звена, в районе пика лежит в пределах $0 < |\psi| < +180^\circ$.

Таким образом, в цифровых системах с экстраполятором нулевого порядка эквивалентная постоянная времени, которая должна учитываться в формуле для малых

постоянных времени, равна

$$T_0 = \frac{T}{2} + T_{\Sigma} + \tau, \quad (5.179)$$

где T_{Σ} — сумма малых постоянных времени непрерывной части системы, $\tau < T$ — временное запаздывание.

Кроме того, должно проверяться отсутствие захода л. а. х. при $\lambda > \lambda_r$ в область, ограниченную прямой $L_1^* = 20 \lg M (M+1)^{-1}$ (рис. 5.32).

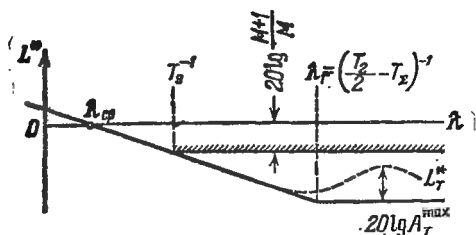


Рис. 5.32. К построению высокочастотной части л. а. х.

В цифровых системах с экстраполятором первого порядка вместо (5.179) должна рассматриваться формула

$$T_0 = T_{\Sigma} + \tau. \quad (5.180)$$

Изложенное позволяет сформулировать требования к типовым передаточным функциям разомкнутой цифровой системы. Выполнение этих требований гарантирует получение заданного запаса устойчивости. В низкочастотной и среднечастотной областях л. а. х. цифровой системы должна совпадать с какой-либо типовой л. а. х. «симметричного» или «несимметричного» вида из рассмотренных в § 5.3. Высокочастотная часть л. а. х. должна удовлетворять требованиям по ограничению суммы малых постоянных времени.

В соответствии с классификацией типовых л. а. х., приведенной в § 5.3, для статических систем здесь будут получаться л. а. х. типа 0—1—2—1—3...0, для систем с астатизмом первого порядка — л. а. х. типа 1—2—1—3...0 и для систем с астатизмом второго порядка — л. а. х. типа 2—1—2—3...0.

Так как практически во всех случаях целесообразно иметь в цифровой системе наибольшее допустимое значение периода дискретности, то вертикальную линию на частоте $\omega = 2T^{-1}$ следует стремиться расположить на асимптоте единичного наклона правее частоты среза (рис. 5.31, в).

В таблице 5.3 приведены типовые передаточные функции разомкнутых цифровых систем с экстраполяторами нулевого порядка, которым соответствует л. а. х. «симметричного» вида, для запаздывания $\tau = 0$ и при выполнении условия максимизации периода дискретности.

Отказ от последнего условия позволяет иметь в знаменателе передаточной функции дополнительные множители типа $(1 + j\lambda T_i)$ при ограничении суммы постоянных времени в соответствии с формулой (5.179) либо дополнительными множителями, соответствующие колебательным звеньям при ограничении суммы постоянных времени и высоты резонансных пиков.

Кроме того, принято, что постоянные времени удовлетворяют условиям: $T_0 > 0,5T$, $T_1 > 0,5T$, $T_2 > 0,5T$ и $T_i < 0,5T$, где $i = 3, 4, \dots, n$. Это означает, что вертикальная прямая $\omega = 2T^{-1}$ пересекает асимптоту л. а. х., имеющую наклон 20 дБ/дек. Таблица 5.4 соответствует таким же передаточным функциям цифровых систем, но с использованием экстраполяторов первого порядка.

Асимптотические л. а. х., соответствующие типовым передаточным функциям таблиц 5.3 и 5.4, изображены на рис. 5.33. На рис. 5.33, а изображены л. а. х., соответствующие дискретной частотной передаточной функции, а на рис. 5.33, б — соответствующие исходной передаточной функции непрерывной части. Граничная частота λ_r для цифровых систем с экстраполятором нулевого порядка равна $\lambda_r = \left(\frac{T}{2} - T_\Sigma\right)^{-1}$; для цифровых систем с экстраполятором первого порядка $\lambda_r = (T - T_\Sigma)^{-1}$. В соответствии с классификацией, принятой в § 5.3, здесь для статических систем получаются л. а. х. типа 0—1—2—1—0, для систем с астатизмом первого порядка — л. а. х. типа 1—2—1—0 и для систем с астатизмом второго порядка — л. а. х. типа 2—1—0.

Типовые передаточные функции разомкнутых цифровых систем с экстраполятором нулевого порядка для максимального периода дискретности

r	Передаточная функция непрерывной части	Дискретная частотная передаточная функция
0	$\frac{K(1+T_2p)}{(1+T_0p)(1+T_1p)\prod_{i=3}^n(1+T_ip)}$	$\frac{K(1+j\lambda T_2)\left(1-j\lambda\frac{T}{2}\right)\left[1+j\lambda\left(\frac{T}{2}-T_\Sigma\right)\right]}{(1+j\lambda T_0)(1+j\lambda T_1)\left(1+j\lambda\frac{T}{2}\right)}$
1	$\frac{K_1(1+T_2p)}{p(1+T_1p)\prod_{i=3}^n(1+T_ip)}$	$\frac{K_1(1+j\lambda T_2)\left(1-j\lambda\frac{T}{2}\right)\left[1+j\lambda\left(\frac{T}{2}-T_\Sigma\right)\right]}{j\lambda(1+j\lambda T_1)\left(1+j\lambda\frac{T}{2}\right)}$
2	$\frac{K_2(1+T_2p)}{p^2\prod_{i=3}^n(1+T_ip)}$	$\frac{K_2(1+j\lambda T_2)\left(1-j\lambda\frac{T}{2}\right)\left[1+j\lambda\left(\frac{T}{2}-T_\Sigma\right)\right]}{(j\lambda)^2\left(1+j\lambda\frac{T}{2}\right)}$

Типовые передаточные функции разомкнутых цифровых систем с экстраполятором первого порядка для максимального периода дискретности

	Передаточная функция непрерывной части	Дискретная частотная передаточная функция
0	$\frac{K(1+T_2p)}{(1+T_0p)(1+T_1p) \prod_{i=3}^n (1+T_i p)}$	$\frac{K(1+j\lambda T_2) \left(1-j\lambda \frac{T}{2}\right) [1+j\lambda (T-T_\Sigma)]}{(1+j\lambda T_0)(1+j\lambda T_1) \left(1+j\lambda \frac{T}{2}\right)}$
1	$\frac{K_1(1+T_2p)}{p(1+T_1p) \prod_{i=3}^n (1+T_i p)}$	$\frac{K_1(1+j\lambda T_2) \left(1-j\lambda \frac{T}{2}\right) [1+j\lambda (T-T_\Sigma)]}{j\lambda (1+j\lambda T_1) \left(1+j\lambda \frac{T}{2}\right)}$
2	$\frac{K_2(1+T_2p)}{p^2 \prod_{i=3}^n (1+T_i p)}$	$\frac{K_2(1+j\lambda T_2) \left(1-j\lambda \frac{T}{2}\right) [1+j\lambda (T-T_\Sigma)]}{(j\lambda)^2 \left(1+j\lambda \frac{T}{2}\right)}$

Наличие малого временного запаздывания $\tau \neq 0$ не меняет вида типовых передаточных функций. Необходимо только учесть это запаздывание в общей сумме малых постоянных времени.

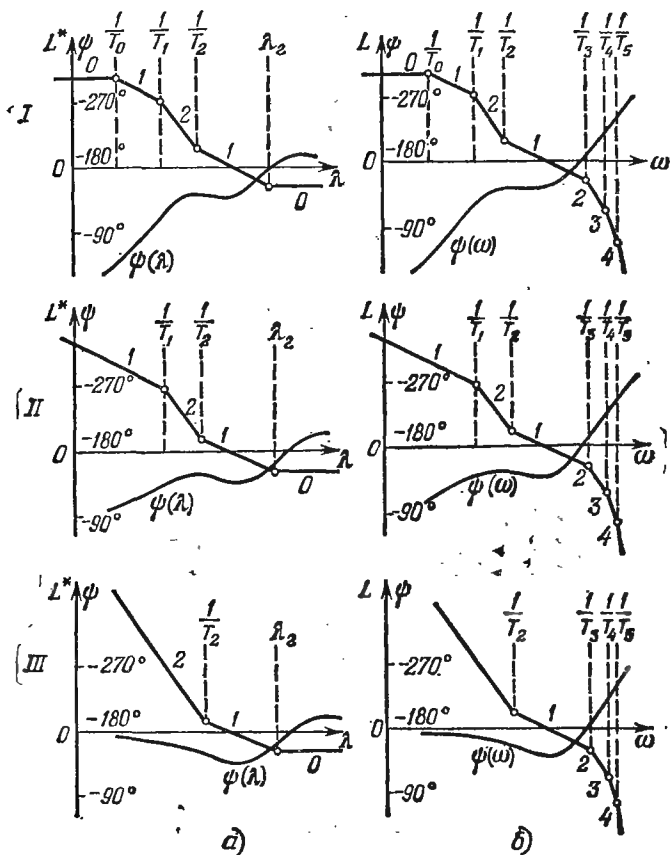


Рис. 5.33. Типовые л. а. х. цифровых систем при максимизации периода дискретности.

Типовые передаточные функции разомкнутых систем, которым соответствуют л. а. х. несимметричного вида, могут быть составлены по такому же принципу, т. е. посредством объединения требуемого вида передаточной

функции в низкочастотной части с ее высокочастотной частью, которая дается в § 2.8. Так, например, рассмотрим л. а. х. типа 1—2—3... (см. рис. 5.16, б). Этой л. а. х. соответствует передаточная функция разомкнутой системы

$$W_n(p) = \frac{K_1}{p \prod_{i=1}^n (1 + T_i p)}. \quad (5.181)$$

Требуемый запас устойчивости в цифровой системе с экстраполятором нулевого порядка будет обеспечен, если выполняется условие

$$\frac{T}{2} + \sum_{i=1}^n T_i \leq \frac{1}{K_1} \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2} \quad (M \leq 1,3). \quad (5.182)$$

Последнее условие является достаточным и обеспечивает отсутствие захода в область, ограниченную прямой $L_1 = 20 \lg [M(M+1)^{-1}]$ (см. рис. 5.32), если имеется хотя бы одна постоянная времени, по величине большая чем $0,5T$. Если для всех постоянных времени справедливо неравенство $T_i \leq 0,5T$, то для предотвращения захода высокочастотного «хвоста» л. а. х. в запретную зону необходимо выполнить дополнительное условие

$$\frac{T}{2} \leq \frac{1}{K_1} \frac{M}{M+1} = \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M+1}. \quad (5.183)$$

В соответствии с классификацией § 5.3 здесь получается л. а. х. типа 1—2—3...0. Приведенные в § 5.3 формулы для допустимой суммы малых постоянных времени позволяют дать оценку для максимального возможного периода дискретности ЦВМ.

Если исходить из случая, изображенного на рис. 5.5, а, то допустимая эквивалентная сумма малых постоянных времени (5.179) составит на основании формул (5.127) и (5.17)

$$T_0 \leq \frac{1}{K_1} \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2} = \sqrt{\frac{D_c^n}{D_1}} \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2}. \quad (5.184)$$

Отсюда можно получить требование к периоду дискретности системы с астатизмом первого порядка:

$$T \leq 2(T_{\Sigma} - T_{\Sigma} - \tau) = \sqrt{\frac{D_e^0}{D_1}} (M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}) - 2(T_{\Sigma} + \tau). \quad (5.185)$$

В этих формулах D_e^0 — заданное значение дисперсии ошибки, D_1 — дисперсия скорости изменения входного сигнала, T_{Σ} — сумма постоянных времени объекта управления.

Для случая, соответствующего рис. 5.5, в, аналогичным образом можно получить формулу для периода дискретности системы с астатизмом второго порядка:

$$T \leq 2 \left[\sqrt[4]{\frac{D_e^0}{D_2} \frac{M(M-1)}{M+1}} - T_{\Sigma} - \tau \right], \quad (5.186)$$

где D_2 — дисперсия ускорения задающего воздействия.

Наконец, для случая, изображенного на рис. 5.5, б, который соответствует системе с астатизмом первого порядка, но имеет более благоприятные условия для выбора периода дискретности, получается с учетом формулы (5.131)

$$T \leq 2 \sqrt[4]{\frac{D_e^0}{2D_2} \left[\frac{M(M-1)}{M+1} + \sqrt{\frac{D_e^0 D_2}{2D_1^2} \frac{M}{M+1}} \right]} - 2(T_{\Sigma} + \tau). \quad (5.187)$$

Все эти формулы показывают, что период дискретности должен быть тем меньше, чем большие скорости и ускорения действуют на входе системы, чем выше требуется точность воспроизведения полезного сигнала и чем больше эквивалентная сумма постоянных времени объекта. Получение отрицательных значений для периода дискретности показывает, что задача не имеет решения в рамках принятых исходных данных.

Условия, ограничивающие выбор периода дискретности, могут быть получены и для систем с экстраполяторами первого порядка.

Типовые передаточные функции при использовании дискретной коррекции. Использование корректирующих алгоритмов в ЦВМ приводит к появлению некоторых

особенностей в типовых передаточных функциях разомкнутых систем. Эти особенности сводятся к следующему.

Поскольку результирующая передаточная функция разомкнутой системы представляет собой произведение

$$W(z) = W_0(z) D(z), \quad (5.188)$$

где $W_0(z)$ — передаточная функция непрерывной части, $D(z)$ — передаточная функция ЦВМ, то может иметь место полное несоответствие друг другу функций $W(z)$ и $W_0(z)$. Поэтому передаточной функции $W(z)$ или $W^*(j\lambda)$ не может быть поставлена в соответствие какая-либо передаточная функция непрерывной части, аналогично тому как это было сделано в таблицах 5.3 и 5.4, а также на рис. 5.33.

Частотная передаточная функция непрерывной части цифровой системы управления $W_0^*(j\lambda)$ имеет обычно равные степени псевдочастоты в числителе и знаменателе. Поэтому высокочастотная асимптота л. а. х. имеет нулевой наклон. Это нашло отражение на рис. 5.33, на котором все типовые л. а. х. цифровых систем имеют нулевой наклон высокочастотной асимптоты.

Для частотной передаточной функции ЦВМ $D^*(j\lambda)$ это условие не является обязательным. Помимо случаев, когда степени псевдочастоты в числителе и знаменателе равны, могут быть случаи большей степени в знаменателе $D^*(j\lambda)$. Это будет при использовании в ЦВМ корректирующих программ, соответствующих введению интегратора (или интеграторов) с передаточными функциями

$$D^*(j\lambda) = \frac{k}{j\lambda}, \quad (5.189)$$

$$D(z) = \frac{kT(z+1)}{2(z-1)} \quad (5.190)$$

и апериодического звена (или звеньев) с передаточными функциями

$$D^*(j\lambda) = \frac{1}{1+j\lambda\tau}, \quad (5.191)$$

$$D(z) = \frac{z+1}{\left(1+\frac{2\tau}{T}\right)z + \left(\frac{2\tau}{T}-1\right)}. \quad (5.192)$$

Так как для типового перехода оси нуля децибел нужен единичный наклон асимптоты, то типовые переда-

точные функции, соответствующие формуле (5.188), могут иметь единичный наклон высокочастотной асимптоты. Это не исключает возможности использования типовых передаточных функций таблиц 5.3 и 5.4. Таким образом, типовые передаточные функции при использовании дискретной коррекции могут приводить к л. а. х. с единичным наклоном высокочастотной асимптоты.

В таблице 5.5 приведены типовые передаточные функции цифровых систем с экстраполяторами нулевого порядка для тех случаев, когда объект управления в высокочастотной области сводится к совокупности звеньев с малыми постоянными времени (меньшими, чем половина периода дискретности). Эквивалентная сумма малых постоянных времени, которая должна учитываться при определении запаса устойчивости, составляет

$$T_0 = T + T_\Sigma + \tau, \quad (5.193)$$

где T_Σ — сумма малых постоянных времени объекта, τ — временное запаздывание в канале управления. Вся низко- и среднечастотная часть передаточной функции формируется при этом в цифровой части системы. При составлении передаточных функций таблицы 5.5 предполагалось, что выбран максимальный возможный период дискретности так, что выполняются неравенства $\lambda_{ср}^{-1} > 2T > T_i$ ($i = 1, 2, \dots$), где T_i — постоянные времени, относящиеся к объекту управления. Если выбрать период дискретности таким образом не представляется возможным, то при его уменьшении могут появиться дополнительные изломы л. а. х. правее частоты среза.

Сравнение формул (5.193) и (5.179) показывает, что в системах с дискретной коррекцией допустимое максимальное значение периода дискретности в два раза меньше тех значений, которые даются формулами (5.184) — (5.186). При использовании л. а. х. «несимметричного» вида введение дискретных корректирующих звеньев, формирующих низкочастотную часть передаточной функции, возможно получение двойного наклона высокочастотной асимптоты л. а. х.

Во всех рассмотренных случаях вид л. а. х. в высокочастотной области обычно не имеет практического значения и дело сводится только к учету суммы малых постоянных времени.

Типовые передаточные функции разомкнутых систем при использовании дискретной коррекции

r	Частотная передаточная функция цифровой части	Частотная передаточная функция разомкнутой системы
0	$\frac{1 + j\lambda T_2}{(1 + j\lambda T_0)(1 + j\lambda T_1)}$	$\frac{K(1 + j\lambda T_2)\left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)\left[1 + j\lambda\left(\frac{T}{2} - T_\Sigma\right)\right]}{(1 + j\lambda T_0)(1 + j\lambda T_1)\left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)^2}$
1	$\frac{1 + j\lambda T_2}{j\lambda \frac{T}{2}(1 + j\lambda T_1)}$	$\frac{K_1(1 + j\lambda T_2)\left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)\left[1 + j\lambda\left(\frac{T}{2} - T_\Sigma\right)\right]}{j\lambda(1 + j\lambda T_1)\left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)^2}$
2	$\frac{1 + j\lambda T_2}{\left(j\lambda \frac{T}{2}\right)^2}$	$\frac{K_2(1 + j\lambda T_2)\left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)\left[1 + j\lambda\left(\frac{T}{2} - T_\Sigma\right)\right]}{(j\lambda)^2\left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)^2}$

Учет случайности периода дискретности. Период дискретности может изменяться случайным образом от такта к такту. Общие сведения по этому вопросу были приведены в 3.11. Случайность периода дискретности в принципе может вызвать нарушение условий устойчивости и изменение динамических свойств системы управления по сравнению с тем, когда период дискретности постоянен или когда при расчете он принимается постоянным и равным его математическому ожиданию.

Рассмотрим типовые л. а. х. (таблица 5.3), в которых используется непрерывная коррекция. Так как их низкочастотные части практически не зависят от периода дискретности, то учет его случайности необходимо делать только для высокочастотных частей. Как следует из таблицы 5.3, высокочастотные части частотных передаточных функций могут быть представлены одинаково для л. а. х. всех типов:

$$W_B^*(j\lambda, T) = \frac{\lambda_{cp} \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left[1 + j\lambda \left(\frac{T}{2} - T_z\right)\right]}{j\lambda \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)}, \quad (5.194)$$

где λ_{cp} — частота среза. Высокочастотная часть передаточной функции практически не влияет на точность работы системы управления, но может повлиять на ее динамические свойства и, в частности, на запас устойчивости, который оценивается в типовых передаточных функциях по показателю колебательности. Поэтому следовало бы найти математическое ожидание показателя колебательности замкнутой системы. Однако сделать это весьма трудно, так как для передаточных функций более или менее сложного вида нет прямых зависимостей, позволяющих рассчитать показатель колебательности при известных параметрах. Поэтому приходится использовать косвенный путь. Так как показатель колебательности есть одно из свойств передаточной функции замкнутой системы, то можно попытаться определить математическое ожидание этой передаточной функции

$$M[H^*(j\lambda)] = \tilde{H}^*(j\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} H^*(j\lambda, T) \Phi(T) dT,$$

где $\Phi(T)$ — плотность вероятности. Так как эта формула

оказывается обычно слишком сложной, то целесообразно использовать прием, изложенный в § 3.11. Тогда

$$\hat{H}^*(j\lambda) \approx H^*(j\lambda, T_c) + \frac{\partial^2 H^*(j\lambda, T)}{\partial T^2} \frac{D_T}{2}, \quad (5.195)$$

где T_c — математическое ожидание периода дискретности, а D_T — его дисперсия.

Для рассматриваемого случая можно еще упростить задачу, используя то обстоятельство, что в высокочастотной области для частот $\lambda > \lambda_{cp}$ имеет место неравенство $|W_B^*(j\lambda, T)| \ll 1$. Поэтому для этой области

$$H_B^*(j\lambda, T) = \frac{W_B^*(j\lambda, T)}{1 + W_B^*(j\lambda, T)} \approx W_B^*(j\lambda, T).$$

Математическое ожидание

$$\hat{H}_B^*(j\lambda) \approx \tilde{W}_B^*(j\lambda) \approx W_B^*(j\lambda, T_c) + \frac{\partial^2 W_B^*(j\lambda, T)}{\partial T^2} \frac{D_T}{2}.$$

Дифференцирование формулы (5.194) дает

$$\begin{aligned} \tilde{W}_B^*(j\lambda) &= \frac{\lambda_{cp} \left(1 - j\lambda \frac{T_c}{2}\right) \left[1 + j\lambda \left(\frac{T_c}{2} - T_\Sigma\right)\right]}{j\lambda \left(1 + j\lambda \frac{T_c}{2}\right)} + \frac{\lambda_{cp} T_\Sigma \lambda^2}{\left(1 + j\lambda \frac{T_c}{2}\right)^3} \frac{D_T}{2} = \\ &= W_B^*(j\lambda, T_c) \left\{ 1 + \frac{j\lambda^3 T_\Sigma D_T}{2 \left(1 + j\lambda \frac{T_c}{2}\right)^2 \left(1 - j\lambda \frac{T_c}{2}\right) \left[1 + j\lambda \left(\frac{T_c}{2} - T_\Sigma\right)\right]} \right\}. \end{aligned} \quad (5.196)$$

Множитель, находящийся в фигурных скобках, представляет собой дополнительную передаточную функцию, определяемую случайностью периода дискретности. Формулу (5.196) можно представить в виде

$$\tilde{W}_B^*(j\lambda) = W_B^*(j\lambda, T_c) W_T^*(j\lambda, D_T).$$

Дополнительная передаточная функция может вызвать появление дополнительных фазовых сдвигов и увеличение модуля основной передаточной функции в соответствии с выражениями

$$\left. \begin{aligned} \psi_T(j\lambda, D_T) &= \arg W_T^*(j\lambda, D_T), \\ A_T(j\lambda, D_T) &= |W_T^*(j\lambda, D_T)|. \end{aligned} \right\} \quad (5.197)$$

Влияние дополнительной передаточной функции может быть учтено при известных параметрах T_c , D_T и T_Σ численным расчетом и построением частотных характеристик по результирующей передаточной функции (5.196). Оценка этого влияния может быть сделана следующим образом.

Анализ выражения (5.196) показывает, что дополнительная передаточная функция вносит в районе частоты среза л. а. х. положительные фазовые сдвиги. Это не может ухудшить запаса устойчивости. Однако она вызывает подъем усиления на высоких частотах, что может снизить запас устойчивости и даже привести к неустойчивости. Как следует из рис. 5.32, в высокочастотной области существует ограничение для подъема усиления, определяемое принятым показателем колебательности. На рис. 5.32 показана высокочастотная часть типовых л. а. х., ограничение для подъема усиления и подъем усиления, вносимый дополнительной передаточной функцией.

Расчеты показывают, что максимум подъема усиления расположен в сравнительно высокочастотной области и он не превосходит значения

$$A_T^{\max} < 1 + \frac{4T_\Sigma D_T}{T_c^3}.$$

Достаточное условие сохранения принятого при расчете показателя колебательности в соответствии с рис. 5.32 имеет вид

$$A_T^{\max} < \frac{M}{(M+1) \lambda_{\text{ср}} \left(\frac{T_c}{2} - T_\Sigma \right)} = \frac{T_c + 2T_\Sigma + 2\tau}{T_c - 2T_\Sigma}.$$

Из этих неравенств можно получить условие, ограничивающее дисперсию периода дискретности:

$$D_T < \frac{T_c^3}{T_c - 2(T_\Sigma + \tau)} > T_c^2. \quad (5.198)$$

При выполнении этого условия запас устойчивости в системе не меняется при переходе от $T = T_c = \text{const}$ к случайному периоду дискретности с математическим ожиданием T_c . Условие (5.198) оказывается сравнительно легким и выполняется практически всегда.

Полученные формулы справедливы при $0 < T_{\Sigma} < 0,5T_c$. Случай $T_{\Sigma} = 0$ требует более точного исследования. Если в формуле (5.194) положить $T_{\Sigma} = 0$, то передаточная функция замкнутой системы в области высоких частот будет

$$H_{\Sigma}^*(j\lambda, T) = \frac{\lambda_{\text{ср}} \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)}{j\lambda + \lambda_{\text{ср}} \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)}.$$

Дифференцирование этого выражения, аналогично проделанному выше, дает дополнительную передаточную функцию

$$W_T^*(j\lambda) = 1 + \frac{j\lambda^3 D_T}{4\lambda_{\text{ср}} \left(1 - j\lambda \frac{T_c}{2} + j \frac{\lambda}{\lambda_{\text{ср}}}\right)^2 \left(1 - j\lambda \frac{T_c}{2}\right)}. \quad (5.199)$$

В этом случае, как следует из рис. 5.32, любой подъем усиления в области высоких частот будет сопровождаться снижением запаса устойчивости. Более подробно этот случай был рассмотрен в § 3.11. Однако он имеет мало практического значения, так как условие $T_{\Sigma} = 0$ в реальных системах никогда не выполняется.

При выполнении условия $T_{\Sigma} > 0,5T_c$ учет случайности периода дискретности теряет практический смысл, так как период дискретности оказывает слабое влияние на динамику системы управления, которая по своим свойствам приближается к непрерывной системе.

Рассмотрение типовых л. а. х. при использовании дискретной коррекции (таблица 5.5) приводит к примерно аналогичным результатам, что указывает на сравнительно слабое влияние случайности периода дискретности на динамические свойства системы управления при использовании типовых передаточных функций.

Сглаживающие системы. В некоторых случаях, кроме задачи воспроизведения полезного сигнала, требуется подавление помех, действующих на входе системы, т. е. осуществление сглаживания входного сигнала.

При действии на входе гармонической помехи с заданными значениями амплитуды и частоты и случайной фазой $v_1(t) = A_1 \sin(\omega_n t + \psi_{n1})$ на выходе системы появится сигнал $v_2(t) = A_2 \sin(\omega_n t + \psi_{n2})$. Отношение амплитуды помехи на

входе к амплитуде помехи на выходе представляет собой коэффициент сглаживания

$$K_{\text{сгл}} = \frac{A_1}{A_2} = |H(j\omega_n)|^{-1} = \left| \frac{1 + W(j\omega_n)}{W(j\omega_n)} \right|,$$

где $W(j\omega_n)$ — частотная передаточная функция разомкнутой системы при $\omega = \omega_n$. Обычно коэффициент сглаживания должен значительно превышать единицу. Поэтому можно пользоваться приближенным выражением

$$K_{\text{сгл}} \approx \left| \frac{1}{W(j\omega_n)} \right|. \quad (5.200)$$

Применительно к дискретным системам формула (5.200) должна быть записана в виде

$$K_{\text{сгл}} \approx \left| \frac{1}{W^*(j\lambda_n)} \right|, \quad (5.201)$$

где $\lambda_n = 2T^{-1} \operatorname{tg} 0,5\omega_n T$ — псевдочастота, соответствующая круговой частоте помехи на входе. Формула (5.201) позволяет сформулировать требования к высокочастотной части желаемой л. а. х. разомкнутой системы управления. Для получения необходимого коэффициента сглаживания нужно, чтобы высокочастотная часть л. а. х. проходила бы не выше фиксированной точки A_n с координатами λ_n и $-20 \lg K_{\text{сгл}}$ (рис. 5.34). Это позволяет весьма просто связать между собой требуемый коэффициент сглаживания, частоту помехи и частоту среза для того случая, когда фиксированная точка A_n находится в районе асимптоты с единичным наклоном:

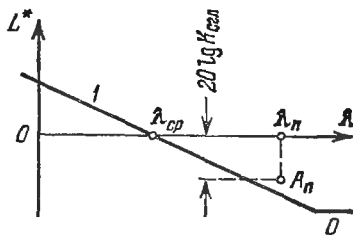


Рис. 5.34. Построение контрольной точки по условиям сглаживания гармонической помехи.

$$\lambda_{\text{ср}} \leq \frac{\lambda_n}{K_{\text{сгл}}} \quad (5.202)$$

при выполнении дополнительного условия $\lambda_r > \lambda_n$, где граничная частота λ_r определяется в соответствии с рис. 5.33. Однако частота среза определяется положением запретной

области по точности воспроизведения полезного сигнала (рис. 5.5).

Наиболее благоприятным случаем с точки зрения уменьшения частоты среза оказывается изображенный на рис. 5.5, в. Для этого случая в соответствии с формулами § 5.3

$$\lambda_{\text{ср}} = \sqrt{K_2} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_e^0}} \sqrt{\frac{M}{M-1}}.$$

Поэтому максимальное значение коэффициента сглаживания из формулы (5.202) составит

$$K_{\text{сгл}} = \lambda_{\text{п}} \sqrt[4]{\frac{D_e^0}{D_2}} \sqrt{\frac{M-1}{M}}. \quad (5.203)$$

В случае действия гармонической помехи результирующая дисперсия ошибки в рассматриваемом случае будет

$$D_e = D_e^0 + \frac{A_1^2}{2K_{\text{сгл}}} = D_e^0 + \frac{A_1^2}{2\lambda_{\text{п}}^2} \frac{M}{M-1} \sqrt{\frac{D_2}{D_e^0}}. \quad (5.204)$$

Условие минимума этого выражения, полученное его дифференцированием:

$$D_e^0 = \sqrt[3]{\frac{M^2}{(M-1)^2} \frac{A_1^4 D_2}{16\lambda_{\text{п}}^4}}.$$

Минимальная дисперсия ошибки из (5.204)

$$D_e^{\text{min}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{M^2}{(M-1)^2} \frac{A_1^4 D_2}{2\lambda_{\text{п}}^4}}. \quad (5.205)$$

Если положить, например, $M = 1,1$, то

$$D_e^{\text{min}} = 5,86 \sqrt[3]{\frac{A_1^4 D_2}{\lambda_{\text{п}}^4}}.$$

Однако действие подобной помехи хотя и возможно, но маловероятно. Более важен случай действия на входе системы помехи типа белого шума со спектральной плотностью $S_{\text{п}}(\omega) = D_{\text{п}}$. Помеха на выходе может быть охарактеризована дисперсией

$$D_{\text{пе}} = \frac{TD_{\text{п}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H^*(j\lambda)|^2 d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2} = \frac{D_{\text{п}}}{K_{\text{сгл}}^2}. \quad (5.206)$$

Квадрат коэффициента сглаживания белого шума

$$K_{\text{сгл}}^2 = \left[\frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H^*(j\lambda)|^2 d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2} \right]^{-1} = (\Delta\lambda_{\text{э}} T)^{-1},$$

где $\Delta\lambda_{\text{э}}$ — эквивалентная полоса пропускания.

В таблице 5.6 приведены приближенные значения квадратов коэффициентов сглаживания белого шума для типовых передаточных функций, соответствующих таблице 5.3. В таблице использована эквивалентная сумма постоянных времени $T_{\text{э}}$, определяемая формулой (5.179). При использовании типовых передаточных функций систем с экстраполяторами первого порядка (таблица 5.4) и систем с дискретной коррекцией (таблица 5.5) результаты будут близкими. В этих случаях необходимо пользоваться эквивалентной суммой постоянных времени (5.180) и (5.193) соответственно.

Выражение для квадратов коэффициентов сглаживания позволяет решить задачу минимизации дисперсии ошибки при одновременном действии на входе системы полезного сигнала и помехи типа дискретного белого шума. Рассмотрим методику расчета применительно к передаточной функции системы с астатизмом первого порядка (таблица 5.6).

В соответствии с формулами § 5.3 для постоянных времени, входящих в типовую передаточную функцию, должны выполняться условия

$$T_2 \geq \frac{1}{\sqrt{K_2}} \sqrt{\frac{M}{M-1}}, \quad T_2 - T_{\text{э}} \geq T_2 \left(1 - \frac{1}{h}\right) = T_2 \frac{2}{M+1}.$$

Взяв предельный случай, когда неравенства превращаются в равенства, можно с учетом формулы (5.18) преобразовать квадрат коэффициента сглаживания к виду

$$K_{\text{сгл}}^2 = \frac{2(T_2 - T_{\text{э}})}{T(1 + K_2 T_{\text{э}}^2)} = \frac{(2M-1)(M+1)}{4TM\sqrt{M(M-1)}} \sqrt[4]{\frac{D_e^0}{D_2}}. \quad (5.207)$$

Здесь D_2 — дисперсия ускорения задающего воздействия, D_e^0 — заданное значение дисперсии ошибки воспроизведения задающего воздействия. Суммарная дисперсия ошибки при

Сглаживание дискретного белого шума при использовании типовых л. а. х.

	Передаточная функция разомкнутой системы	Квадрат коэффициента сглаживания
0	$\frac{K(1+j\lambda T_2)\left(1-j\lambda\frac{T}{2}\right)\left[1+j\lambda\left(\frac{T}{2}-T_{\Sigma}\right)\right]}{(1+j\lambda T_0)(1+j\lambda T_1)\left(1+j\lambda\frac{T}{2}\right)}$	$\frac{2[(T_0T_1+T_0T_2+T_1T_2)(T_0+T_1+KT_2+T_2)-KT_0T_1T_2]}{T[K^2T_2^2+K(T_0T_1+T_0T_2+T_1T_2)]}$
1	$\frac{K_1(1+j\lambda T_2)\left(1-j\lambda\frac{T}{2}\right)\left[1+j\lambda\left(\frac{T}{2}-T_{\Sigma}\right)\right]}{j\lambda(1+j\lambda T_1)\left(1+j\lambda\frac{T}{2}\right)}$	$\frac{2[T_1+T_2+K_1(T_1T+T_2^2-T_1T_2)]}{T[K_1^2T_2^2+K_1(T_1+T_2)]}$
2	$\frac{K_2(1+j\lambda T_2)\left(1-j\lambda\frac{T}{2}\right)\left[1+j\lambda\left(\frac{T}{2}-T_{\Sigma}\right)\right]}{(j\lambda)^2\left(1+j\lambda\frac{T}{2}\right)}$	$\frac{2(T_2-T_2)}{T(1+K_2T_2^2)}$

отсутствии корреляции между полезным сигналом и помехой

$$D_e = D_e^0 + \frac{4TD_{\pi}M\sqrt{M(M-1)}}{(2M-1)(M+1)} \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_e^0}}. \quad (5.208)$$

Дифференцирование (5.208) по D_e^0 и приравнивание производной нулю дает условие получения минимума суммарной дисперсии ошибки:

$$D_e^0 = \sqrt[5]{\frac{D_{\pi}^4 T^4 D_2 M^6 (M-1)^2}{(2M-1)^4 (M+1)^4}}. \quad (5.209)$$

Подстановка этого значения в (5.208) дает минимальное значение суммарной дисперсии

$$D_{e\min} = 5 \sqrt[5]{\frac{D_{\pi}^4 T^4 D_2 M^6 (M-1)^2}{(2M-1)^4 (M+1)^4}}. \quad (5.209)$$

Следует иметь в виду, что формула (5.209), вообще говоря, не может служить основанием для выбора периода дискретности из условия получения желаемой суммарной дисперсии ошибки, так как при уменьшении периода дискретности помеха может перестать быть дискретным белым шумом.

Формулы, подобные (5.209), могут быть получены и для других типовых передаточных функций. При действии коррелированной помехи расчеты должны вестись в соответствии с общей методикой, рассмотренной в главе 3.

§ 5.5. Расчет корректирующих средств

В результате динамического синтеза необходимо сформировать схему системы управления, которая отвечала бы всем поставленным техническим требованиям. Исходной при решении этой задачи является та схема системы, которая получается на основе удовлетворения требованиям энергетики, величин необходимых управляющих воздействий на объект, диапазонов работы, скоростей, ускорений, ресурса и др. Исходная схема может даже удовлетворять требованиям по точности, но, как правило, она не удовлетворяет требованиям по устойчивости и запасу устойчивости.

При решении задачи повышения запаса устойчивости проектируемой системы прежде всего необходимо попы-

таться рациональным образом изменить ее параметры (коэффициенты передачи отдельных звеньев, постоянные времени и т. п.) так, чтобы удовлетворять требованиям качества регулирования, которые определяются критериями качества. При невозможности решить эту задачу в рамках имеющейся системы приходится идти на изменение ее структуры. Для этой цели обычно используется введение в систему корректирующих средств, которые должны изменить ее динамику в нужном направлении. К корректирующим средствам относятся, в частности, корректирующие звенья, представляющие собой динамические звенья с определенными передаточными функциями.

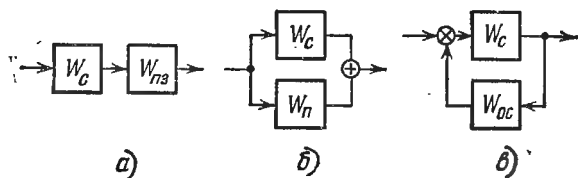


Рис. 5.35. Виды корректирующих звеньев.

Непрерывные корректирующие средства. Эти средства могут вводиться в систему управления различным образом. На рис. 5.35 показаны три основных способа их введения. Рис. 5.35, а соответствует использованию последовательного корректирующего звена с передаточной функцией $W_{пз}(p)$, рис. 5.35, б — использованию параллельного звена с передаточной функцией $W_{п}(p)$ и рис. 5.35, в — использованию отрицательной обратной связи с передаточной функцией $W_{ос}(p)$. На рис. 5.35 показано также звено с передаточной функцией $W_c(p)$, соответствующее части основного канала системы управления.

Использование того или иного типа корректирующих устройств, т. е. последовательных звеньев, параллельных звеньев или обратных связей, определяется удобством технической реализации. В линейных системах динамические свойства при введении корректирующих устройств различного типа могут быть сделаны одинаковыми, и для корректирующего устройства одного типа можно подобрать эквивалентное корректирующее устройство другого типа. Эквивалентность означает, что присоединение

к системе управления одного или другого корректирующего устройства образует полностью подобные в динамическом отношении системы.

Для получения формул перехода от корректирующего устройства одного типа к корректирующему устройству другого типа необходимо приравнять результирующие передаточные функции всех трех схем, изображенных на рис. 5.35:

$$W_c(p) W_{пз}(p) = W_c(p) + W_n(p) = \frac{W_c(p)}{1 + W_c(p) W_{oc}(p)}. \quad (5.210)$$

В результате получаются шесть формул перехода от передаточных функций корректирующих средств одного типа к передаточным функциям корректирующих средств другого типа:

$$\left. \begin{aligned} W_{пз}(p) &= \frac{1}{1 + W_c(p) W_{oc}(p)}, & W_{oc}(p) &= \frac{1 - W_{пз}(p)}{W_c(p) W_{пз}(p)}, \\ W_{пз}(p) &= \frac{W_c(p) + W_n(p)}{W_c(p)}, \\ W_n(p) &= W_c(p) [W_{пз}(p) - 1], \\ W_{oc}(p) &= - \frac{W_n(p)}{W_c^2(p) + W_c(p) W_n(p)}, \\ W_n(p) &= - \frac{W_c^2(p) W_{oc}(p)}{1 + W_c(p) W_{oc}(p)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.211)$$

Звенья последовательного типа особенно удобно применять в тех случаях, когда в системе управления используется электрический сигнал в виде напряжения постоянного тока, величина которого функционально связана с сигналом ошибки $u = f(e)$, например, линейной зависимостью $u = ke$. Тогда корректирующее звено может быть осуществлено на основе R -, C - и L -элементов.

В случае использования в системе модулированного сигнала эти звенья оказываются менее удобными, так как они должны воздействовать не на сам сигнал в виде напряжения, а на его огибающую. Хотя подобные звенья и могут быть построены на элементах R , C и L , их сложность, а также низкая стабильность работы из-за изменения величины параметров и дрейфа несущей частоты делают их применимыми только в простейших случаях.

В системах с модулированным сигналом в большинстве случаев оказывается более простым использование обычных звеньев, предназначенных для работы с немодулированным сигналом, путем установки в канале управления фазочувствительного демодулятора $\Phi Д$, фильтра Φ , отсеивающего высшие гармоники, последовательного звена $ПЗ$ и, в случае необходимости, модулятора $М$ для обратного перехода к модулированному сигналу (рис. 5.36). Такой путь, однако, может привести к серьезному ухудшению динамических свойств системы из-за введения в усилительный канал фильтра, являющегося дополнительной

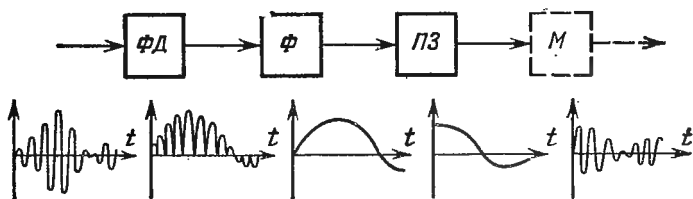


Рис. 5.36. Установка последовательного корректирующего звена в канал с модулированным сигналом.

инерционностью. Это особенно заметно при использовании сравнительно низких значений несущей частоты ($f_0 = 10 \div 50$ Гц). Лучшие результаты получаются здесь для несущих частот $f_0 = 500 \div 1000$ Гц и выше.

Звенья параллельного типа удобно применять в тех случаях, когда необходимо осуществить сложный закон регулирования с введением интегралов и производных от сигнала ошибки.

Обратные связи наиболее удобны для применения, что объясняется простотой технической реализации. Это связано с тем, что на вход обратной связи поступает сигнал сравнительно высокого уровня. Сигнал обратной связи часто поступает непосредственно с выхода системы управления, промежуточного серводвигателя или выходного каскада усилителя.

Кроме того, если обратная связь охватывает участок канала управления, содержащий какую-либо нелинейность (люфт, зону нечувствительности, элемент сухого трения и т. п.), то влияние этой нелинейности на протекание

процессов в системе регулирования меняется существенным образом.

Отрицательные обратные связи уменьшают влияние нелинейностей тех участков, которые они охватывают. Это свойство оказывается весьма ценным, так как практически все системы управления содержат те или иные нелинейности, ухудшающие динамические качества системы регулирования. Применение в качестве корректирующих средств отрицательных обратных связей позволяет добиться лучших результатов по сравнению с использованием корректирующих средств других видов.

Следует также заметить, что отрицательные обратные связи дают значительно лучший эффект в тех случаях, когда из-за воздействия внешних факторов (времени, температуры и т. п.) меняется коэффициент усиления какой-либо части цепи управления, охватываемой отрицательной обратной связью.

Из корректирующих звеньев последовательного типа удобнее всего и чаще применяются электрические пассивные звенья, реализуемые обычно в виде контуров, содержащих R -, C - и L -элементы. Известно большое количество пассивных звеньев. Основные их виды приведены в таблице 5.7. Обобщенная схема пассивного последовательного звена (контура) обычно может быть сведена к виду, изображенному на рис. 5.37. Действие предыдущего и последующего звеньев на работу последовательного корректирующего звена может быть учтено введением сопротивлений выхода источника сигнала $R_{\text{и}}$ и последующего входа $R_{\text{в}}$.

С учетом этих сопротивлений передаточная функция последовательного звена имеет вид

$$W_{\text{пз}}(p) = \frac{U_2(p)}{E(p)} = \frac{\frac{R_{\text{в}} Z_2(p)}{R_{\text{в}} + Z_2(p)}}{R_{\text{и}} + Z_1(p) + \frac{R_{\text{в}} Z_2(p)}{R_{\text{в}} + Z_2(p)}}. \quad (5.212)$$

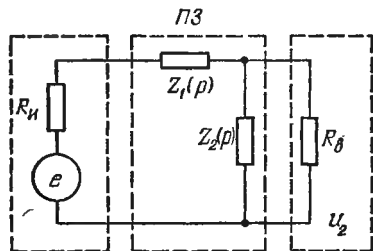


Рис. 5.37. Эквивалентная схема последовательного корректирующего звена.

Непрерывные электрические

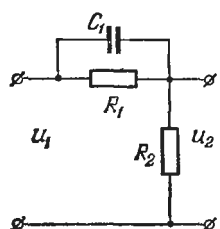
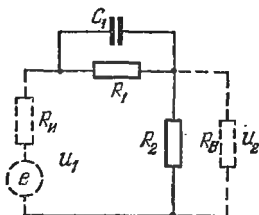
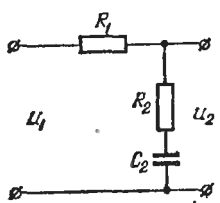
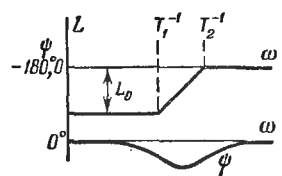
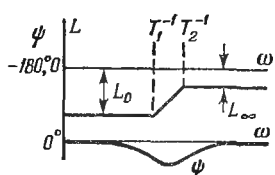
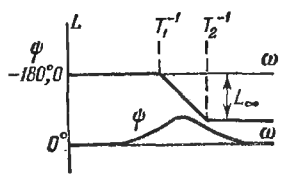
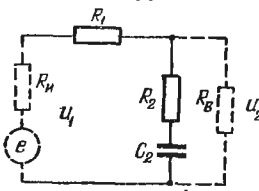
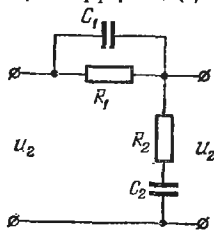
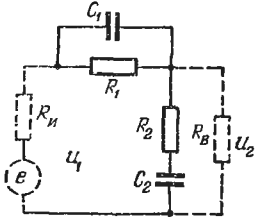
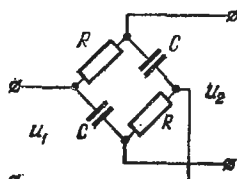
Название и схема звена	Передаточная функция	Частотные характеристики
Дифференцирующее 	$G_0 \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p}$	$A = \frac{G_0 \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}$ $\psi = \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2$
Дифференцирующее 	$G_0 \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p}$	$A = \frac{G_0 \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}$ $\psi = \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2$
Интегрирующее 	$\frac{1 + T_2 p}{1 + T_1 p}$	$A = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}}$ $\psi = \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_1$

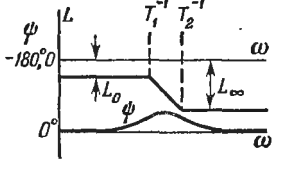
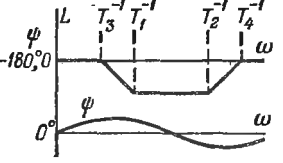
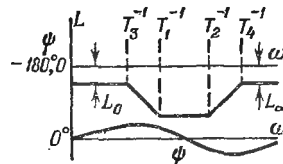
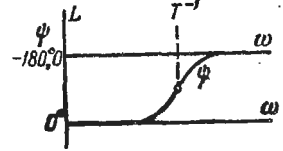
Таблица 5.7

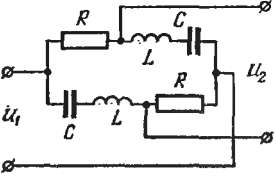
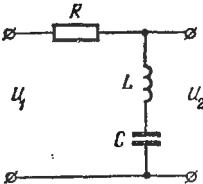
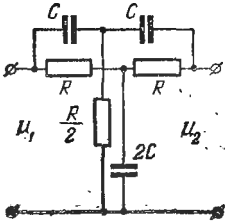
корректирующие звенья

Параметры	Л. а. х. и л. ф. х.
$T_1 = R_1 C_1, \quad T_2 = \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} T_1$ $G_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{T_2}{T_1}, \quad L_0 = 20 \lg G_0$	
$T_1 = R_1 C_1, \quad T_2 = \frac{R_H + R_0}{R_H + R_0 + R_1} T_1$ $R_0 = \frac{R_B R_2}{R_B + R_2}, \quad G_0 = \frac{R_0}{R_H + R_0 + R_1}$ $G_\infty = \frac{R_0}{R_H + R_0}$ $L_0 = 20 \lg G_0, \quad L_\infty = 20 \lg G_\infty$	
$T_1 = (R_1 + R_2) C_2, \quad T_2 = R_2 C_2$ $G_\infty = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{T_2}{T_1}, \quad L_\infty = 20 \lg G_\infty$	

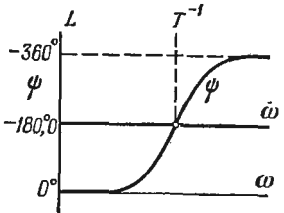
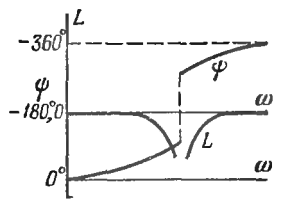
Название и схема звена	Передаточная функция	Частотные характеристики
Интегрирующее 	$G_0 \frac{1 + T_2 p}{1 + T_1 p}$	$A = \frac{G_0 \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}}$ $\psi = \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_1$
Интегро-дифференцирующее 	$\frac{(1 + T_1 p) \times (1 + T_2 p)}{(1 + T_3 p) \times (1 + T_4 p)}$	$A = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_3^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_4^2}}$ $\psi = \arctg \omega T_1 + \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_3 - \arctg \omega T_4$
Интегро-дифференцирующее 	$G_0 \frac{(1 + T_1 p) \times (1 + T_2 p)}{(1 + T_3 p) \times (1 + T_4 p)}$	$A = G_0 \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \times \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_3^2} \times \sqrt{1 + \omega^2 T_4^2}}$ $\psi = \arctg \omega T_1 + \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_3 - \arctg \omega T_4$
Фазосдвигающее 	$\frac{1 - T p}{1 + T p}$	$A(\omega) = 1$ $\psi = -2 \arctg \omega T$

Продолжение табл. 5.7

Параметры	Л. а. х. и л. ф. х.
$T_1 = \left[R_2 + \frac{R_B (R_H + R_1)}{R_H + R_1 + R_B} \right] C_2,$ $T_2 = R_2 C_2$ $G_0 = \frac{R_B}{R_B + R_1 + R_H}$ $G_\infty = \frac{R_B R_2}{R_H (R_1 + R_H) + R_2 (R_B + R_1 + R_H)}$	
$T_1 = R_1 C_1, \quad T_2 = R_2 C_2, \quad a = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$ $T_{3,4} = \frac{T_1 + a T_2}{2} \times$ $\times \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 T_1 T_2}{(T_1 + a T_2)^2}} \right)$	
$T_1 = R_1 C_1, \quad T_2 = R_2 C_2$ $T_3 \approx \left[R_2 + \frac{R_B (R_1 + R_2)}{R_B + R_1 + R_B} \right] C_2,$ $T_4 \approx \frac{T_1 T_2}{T_3}$ $G_0 = \frac{R_B}{R_B + R_1 + R_H},$ $G_\infty = \frac{R_B R_2}{R_B R_H + R_2 (R_1 + R_H)}$	
$T = RC$	

Название и схема звена	Передаточная функция	Частотные характеристики
Фазосдвигающее 	$\frac{1 - 2\zeta Tp + T^2 p^2}{1 + 2\zeta Tp + T^2 p^2}$	$A(\omega) = 1$ $\psi = -2 \operatorname{arctg} \frac{2\zeta \omega T}{1 - \omega^2 T^2}$
Антивибратор 	$\frac{1 + T^2 p^2}{1 + 2\zeta Tp + T^2 p^2}$	$A = \frac{ 1 - \omega^2 T^2 }{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2}}$ $\psi = - \operatorname{arctg} \frac{2\zeta \omega T}{1 - \omega^2 T^2} \quad \left(\omega < \frac{1}{T} \right)$ $\psi = \pm 180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{2\zeta \omega T}{1 - \omega^2 T^2} \quad \left(\omega > \frac{1}{T} \right)$
Антивибратор 	$\frac{1 + T^2 p^2}{1 + 4Tp + T^2 p^2} = \frac{1 + T^2 p^2}{(1 + T_1 p) \times (1 + T_2 p)}$	$A = \frac{ 1 - \omega^2 T^2 }{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}$ $\psi = - \operatorname{arctg} \frac{4T\omega}{1 - \omega^2 T^2} \quad \left(\omega < \frac{1}{T} \right)$ $\psi = \pm 180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{4T\omega}{1 - \omega^2 T^2} \quad \left(\omega > \frac{1}{T} \right)$

Продолжение табл. 5.7

Параметры	Л. а. х. и л. ф. х.
$T = \sqrt{LC}, \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$	
$T = \sqrt{LC}, \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$	
$T = RC$ $T_1 = T(2 + \sqrt{3})$ $T_2 = T(2 - \sqrt{3})$	

Здесь $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ — операторные сопротивления ветвей электрического контура.

В случае малого сопротивления источника ($R_n \approx 0$) и большого входного сопротивления ($R_B \rightarrow \infty$) формула (5.212) вырождается в передаточную функцию делителя напряжения

$$W_{\text{пз}}(p) = \frac{U_2(p)}{E(p)} \approx \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}. \quad (5.213)$$

Передаточная функция (5.213), как правило, соответствует звеньям с лучшими корректирующими свойствами по сравнению с формулой (5.212).

Пассивные дифференцирующие звенья имеют свойства подавлять низкие частоты. Если восстановить на низких частотах прежний коэффициент усиления, что достигается введением дополнительного усиления $k_d = G_0^{-1}$, то передаточная функция дифференцирующего звена совместно с дополнительным усилителем равна

$$W_{\text{пз}}(p) = \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p} \quad (T_1 > T_2). \quad (5.214)$$

Такое звено обладает свойством поднимать верхние частоты в T_1/T_2 раз. Пассивные интегрирующие звенья подавляют высокие частоты, а интегро-дифференцирующие звенья подавляют некоторый диапазон средних частот.

Фазосдвигающие звенья обладают свойством вносить отрицательный фазовый сдвиг при равенстве единице модуля частотной передаточной функции, $A(\omega) = 1$. В связи с последним обстоятельством они иногда называются звеньями с бесконечной полосой пропускания.

Антивибраторы по своим свойствам противоположны консервативным звеньям и на резонансной частоте имеют коэффициент передачи, равный нулю.

Параллельные корректирующие устройства используются обычно для введения в закон управления интегралов и производных. Для повышения порядка астатизма служат изодромные устройства (рис. 5.38, а), представляющие собой интегратор, включенный параллельно основному каналу. В качестве интегратора может быть использован интегрирующий привод [7] либо операционный усилитель в режиме интегрирования.

Передаточная функция изодромного устройства имеет вид

$$W_{\text{и}}(p) = 1 + W_{\text{п}}(p) = 1 + \frac{k_{\text{и}}}{p} = 1 + \frac{1}{T_{\text{и}}p} = \frac{1 + T_{\text{и}}p}{T_{\text{и}}p}, \quad (5.215)$$

где $T_{\text{и}} = k_{\text{и}}^{-1}$ — постоянная времени изодромного устройства. Логарифмические характеристики, соответствующие (5.215), изображены на рис. 5.38, б. Как видно из этих характеристик, воздействие на амплитуду и фазу сигнала наблюдается только для частот $\omega < T_{\text{и}}^{-1}$. Поэтому введение подобного звена в канал управления деформирует л. а. х. и л. ф. х. системы только в области низких частот. Это показано на рис. 5.38, в, где $L_0(\omega)$ и $\psi_0(\omega)$ соответствуют асимптотической л. а. х. и л. ф. х. исходной системы. Штриховой линией показаны результирующие характеристики.

При соответствующем выборе величины постоянной времени $T_{\text{и}}$ результирующие л. а. х. и л. ф. х. в среднечастотной области (в районе пересечения л. а. х. оси нуля децибел) могут практически не отличаться от исходных, что позволяет повысить порядок астатизма системы (ввести интеграл в закон регулирования) без заметного снижения запаса устойчивости.

Для введения в закон управления двух или более интегралов могут использоваться два и более изодромных устройства (рис. 5.39, а). В случае использования двух изодромных устройств их результирующая передаточная функция равна

$$W_{\text{и}}(p) = \left(1 + \frac{1}{T_{\text{и}1}p}\right) \left(1 + \frac{1}{T_{\text{и}2}p}\right) = \frac{(1 + T_{\text{и}1}p)(1 + T_{\text{и}2}p)}{T_{\text{и}1}T_{\text{и}2}p^2}. \quad (5.216)$$

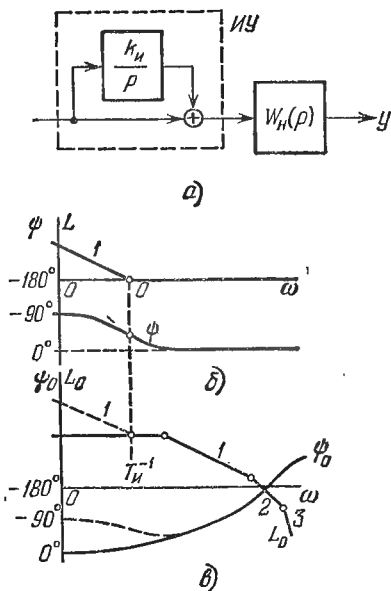


Рис. 5.38. Изодромное устройство и его характеристики.

Асимптотическая л. а. х. и л. ф. х. для систем с передаточной функцией (5.216) изображены на рис. 5.39, б. Как и ранее, при выборе достаточно больших значений $T_{и1}$ и $T_{и2}$ можно получить повышение порядка астатизма на две единицы без заметного снижения запаса устойчивости системы регулирования.

Однако следует заметить, что постоянные времени изодромных устройств (как в случае включения одного,

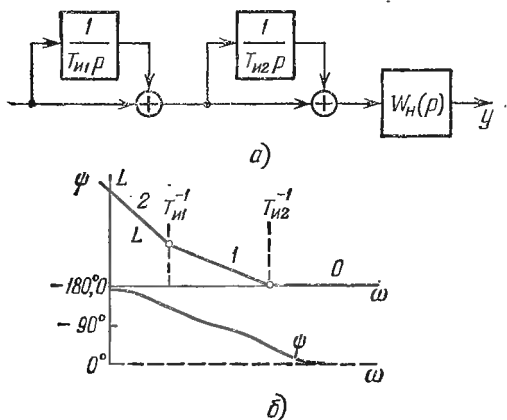


Рис. 5.39. Двойное изодромное устройство и его характеристики.

так и в случае двух) не могут выбираться без учета положения запретной зоны для системы управления по точности (рис. 5.5).

Структурная схема введения производной в канал управления показана на рис. 5.40, а для идеального дифференцирующего звена и на рис. 5.40, б для реального звена с замедлением. На этих же рисунках показаны логарифмические амплитудные частотные характеристики приведенных схем.

Как уже отмечалось выше, обратные связи в линейных системах могут быть сделаны эквивалентными по своему действию последовательным и параллельным корректирующим средствам, что устанавливается формулами перехода (5.211). Однако отрицательные обратные связи имеют ряд преимуществ при работе в нелинейных

системах, при технической реализации и при работе в условиях неустойчивости параметров объекта и регулятора.

Отрицательные обратные связи имеют свойство снижать влияние нелинейных характеристик тех участков цепи управления, которые охватываются обратными связями.

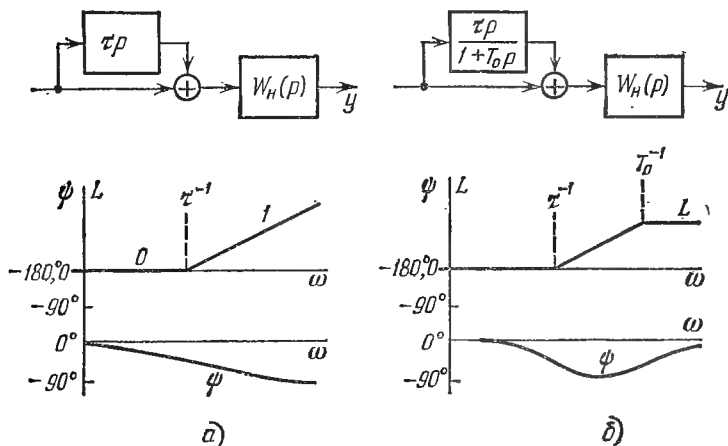


Рис. 5.40. Введение производной по параллельному каналу.

Важным свойством отрицательных обратных связей является способность уменьшать постоянные времени тех звеньев, которые они охватывают. Если апериодическое звено первого порядка с передаточной функцией

$$W_c(p) = \frac{k_c}{1 + T_c p}$$

охватывается жесткой отрицательной обратной связью с передаточной функцией $W_{oc}(p) = k_{oc}$, то результирующая передаточная функция равна

$$W_{ск}(p) = \frac{W_c(p)}{1 + W_c(p) W_{oc}(p)} = \frac{k_c}{1 + k_c k_{oc}} \frac{1}{1 + \frac{T_c p}{1 + k_c k_{oc}}} = \frac{k_{ск}}{1 + T_{ск} p}, \quad (5.217)$$

где новые параметры звена вместе с обратной связью имеют вид

$$\left. \begin{aligned} k_{\text{ск}} &= \frac{k_c}{1 + k_c k_{\text{ос}}}, \\ T_{\text{ск}} &= \frac{T_c}{1 + k_c k_{\text{ос}}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.218)$$

Из последних выражений видно, что обратная связь в $1 + k_c k_{\text{ос}}$ раз уменьшает коэффициент передачи и постоянную времени охватываемого звена.

Если отрицательная обратная связь с передаточной функцией $W_{\text{ос}}(p) = k_{\text{ос}}$ охватывает апериодическое звено второго порядка с передаточной функцией

$$W_c(p) = \frac{k_c}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)},$$

то результирующая передаточная функция равна

$$W_{\text{ск}}(p) = \frac{k_c}{1 + k_c k_{\text{ос}}} \frac{1}{1 + \frac{T_1 + T_2}{1 + k_c k_{\text{ос}}} p + \frac{T_1 T_2}{1 + k_c k_{\text{ос}}} p^2}. \quad (5.219)$$

Из формулы (5.219) следует, что в этом случае в $1 + k_c k_{\text{ос}}$ раз уменьшается коэффициент передачи и эквивалентная сумма постоянных времени. Если в первую формулу (5.218) ввести малую вариацию коэффициента передачи исходного звена $k_c + \Delta k_c$, то приращение коэффициента передачи звена, замкнутого обратной связью, будет равно

$$\Delta k_{\text{ск}} = \frac{\partial k_{\text{ск}}}{\partial k_c} \Delta k_c = \frac{\Delta k_c}{(1 + k_c k_{\text{ос}})^2}. \quad (5.220)$$

Относительное приращение результирующего коэффициента передачи оказывается в $1 + k_c k_{\text{ос}}$ раз меньше относительного приращения коэффициента передачи исходного звена:

$$\frac{\Delta k_{\text{ск}}}{k_{\text{ск}}} = \frac{1}{1 + k_c k_{\text{ос}}} \frac{\Delta k_c}{k_c}.$$

Аналогичный эффект получается и при охвате жесткой отрицательной обратной связью более сложных звеньев.

Обратные связи могут давать в системе управления в динамическом отношении различные эффекты. Однако,

так же как и в случае использования последовательных корректирующих звеньев, здесь можно наметить три основных вида отрицательных обратных связей:

1) обратные связи, подавляющие высокие частоты (аналоги пассивного последовательного интегрирующего звена);

2) обратные связи, подавляющие низкие частоты (аналоги пассивного последовательного дифференцирующего звена);

3) обратные связи, подавляющие средние частоты (аналоги пассивного последовательного интегро-дифференцирующего звена).

Установить аналогию обратной связи с тем или иным последовательным корректирующим звеном можно по формулам перехода (5.211). Особенно важно иметь возможность перехода от последовательного корректирующего звена к эквивалентной обратной связи. Это определяется тем, что расчетным путем наиболее просто определить параметры последовательного корректирующего звена, а с точки зрения совокупности всех свойств выгодно применять обратные связи.

Расчет непрерывных корректирующих средств. В цифровых системах управления возможно использование всех рассмотренных выше непрерывных корректирующих средств: последовательных, параллельных и обратных связей. Как и в случае непрерывных систем, наиболее просто определяются параметры последовательного корректирующего средства.

Если желаемая л. а. х. проектируемой системы построена так, что удовлетворяются требования по точности и запасу устойчивости, то оказывается известной желаемая передаточная функция разомкнутой системы $W_{\text{ж}}(z) = W_{\text{пк}} W_0(z)$. Здесь $W_{\text{пк}} W_0(z)$ представляет собой дискретную передаточную функцию включенных последовательно последовательного корректирующего устройства с передаточной функцией $W_{\text{пк}}(p)$ и непрерывной части (объект с исполнительным устройством) с передаточной функцией $W_{\text{н}}(p)$. Следует иметь в виду, что $W_{\text{пк}} W_0(z) \neq W_{\text{пк}}(z) W_0(z)$. Поэтому расчет последовательных корректирующих устройств в дискретной системе, вообще говоря, не может выполняться делением желаемой передаточной функции на передаточную функцию исходной системы.

Однако в главе 2 было показано, что частотные характеристики дискретных систем, построенных в функции абсолютной псевдочастоты λ , для частот $\lambda < 2T^{-1}$ практически сливаются с частотными характеристиками непрерывной части. Поэтому можно воспользоваться известными приемами расчета последовательных корректирующих средств. Условием определения л. а. х. корректирующих средств $L_{\text{пк}}^*(\lambda) = L_{\text{ж}}^*(\lambda) - L^*(\lambda)$ посредством вычитания из желаемой характеристики $L_{\text{ж}}^*(\lambda)$ располагаемой $L^*(\lambda)$ является требование того, чтобы операции над частотными характеристиками производились в области частот $\lambda < 2T^{-1}$. В этой области подобный метод оказывается практически точным, и он может использоваться.

При расчете непрерывных корректирующих средств импульсных и дискретных систем управления можно использовать частотные характеристики непрерывной части системы, построенные в функции обычной круговой частоты ω . Если в результате такого расчета построена желаемая л. а. х. $L_{\text{ж}}(\omega)$ непрерывной части, то определение корректирующих средств можно осуществлять вычитанием $L_{\text{пк}}(\omega) = L_{\text{ж}}(\omega) - L(\omega)$, где $L_{\text{пк}}(\omega)$ и $L(\omega)$ соответствуют л. а. х. последовательного корректирующего устройства и исходной л. а. х. Этот метод является достаточно точным, и во многих случаях его использование является весьма удобным.

Пример 5.1. Произведем расчет системы с астатизмом первого порядка, с ЦВМ в контуре по следующим исходным данным: максимальная скорость входного воздействия $\dot{g}_{\text{max}} = 30 \text{ с}^{-1}$, максимальное ускорение входного воздействия $\ddot{g}_{\text{max}} = 15 \text{ с}^{-2}$, максимальная допустимая ошибка воспроизведения входного сигнала $e_{\text{max}}^v = 0,1$, допустимое значение показателя колебательности $M = 1,5$, период дискретности $T = 0,02 \text{ с}$, передаточная функция непрерывной части совместно с входным и выходным преобразователями имеет вид

$$W_n(p) = \frac{K_1}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_3 p)},$$

где $\tau_1 = 0,05 \text{ с}$, $\tau_2 = 0,003 \text{ с}$, $\tau_3 = 0,001 \text{ с}$. В системе используется экстраполятор нулевого порядка. Требуется определить вид и параметры непрерывного последовательного корректирующего устройства, которое должно быть вве-

дено в канал регулирования, а также необходимое значение общего коэффициента усиления K_1 .

На рис. 5.41 построены л. а. х. рассчитываемой системы. На рис. 5.41, а построена л. а. х. непрерывной части в функции круговой частоты ω . На рис. 5.41, б

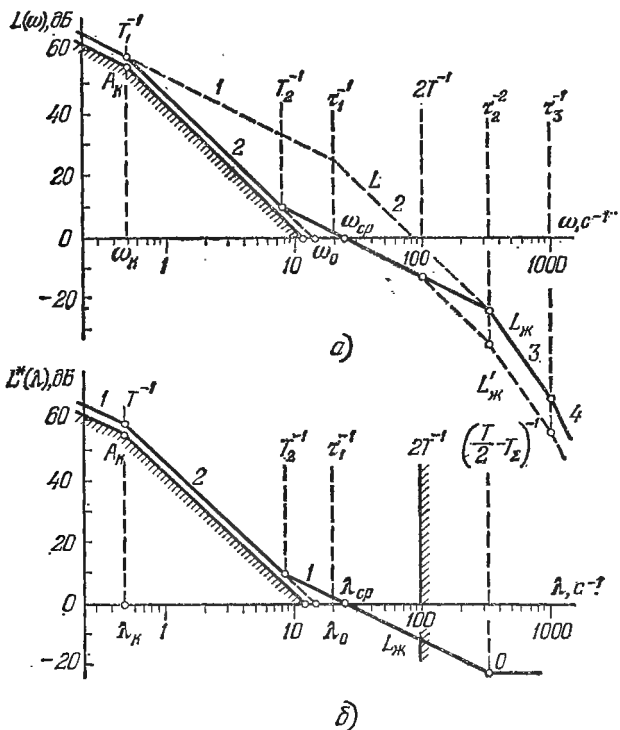


Рис. 4.41. Л. а. х. к расчетному примеру.

построена л. а. х. системы совместно с ЦВМ в функции псевдочастоты $\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$. Построенные л. а. х. $L(\omega)$ и $L^*(\lambda)$ совпадают в области низких частот, $\omega < 2T^{-1}$, когда можно считать, что $\omega \approx \lambda$.

Запретная область для л. а. х. строится по условиям обеспечения требуемой точности. Построение ее аналогично при использовании частот ω и λ . Ниже это

построение производится в функции псевдочастоты. Эквивалентная частота

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{\ddot{g}_{\text{max}}}{\dot{g}_{\text{max}}} = \frac{15}{30} = 0,5 \text{ с}^{-1}.$$

Базовая частота для запретной области

$$\lambda_{\text{ов}} = \sqrt{\frac{\ddot{g}_{\text{max}}}{e_{\text{max}}^0}} = \sqrt{\frac{15}{0,1}} = 12,2 \text{ с}^{-1}.$$

Желаемая асимптотическая л. а. х. в низкочастотной области формируется так, чтобы она проходила в точке излома выше контрольной точки A_k на 3 дБ. Она состоит из отрезков прямых с наклонами 1—2—1. Это дает желаемую частотную передаточную функцию в низкочастотной области

$$W_{\text{ж}}^*(j\lambda) = \frac{K(1+j\lambda T_2)}{j\lambda(1+j\lambda T_1)}.$$

Параметры желаемой передаточной функции определяются следующим образом. Базовая частота л. а. х.

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\ddot{g}_{\text{max}}}{V_2 e_{\text{max}}^0}} = \sqrt{\frac{1,41 \cdot 15}{0,1}} = 14,5 \text{ с}^{-1}.$$

Постоянная времени корректирующего устройства, формирующая первый излом л. а. х., равна

$$T_1 = \frac{1}{\lambda_{\text{в}}} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ с}.$$

Вторая постоянная времени (см. § 5.3)

$$T_2 = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{14,5} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,12 \text{ с}.$$

Требуемое значение общего коэффициента усиления

$$K_1 = \sqrt{2} \frac{\dot{g}_{\text{max}}}{e_{\text{max}}^0} = 1,41 \frac{30}{0,1} = 420 \text{ с}^{-1}.$$

Частота среза л. а. х.

$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{K_1 T_2}{T_1} = \frac{420 \cdot 0,12}{2} = 25,2 \text{ с}^{-1}.$$

Для получения заданного показателя колебательности в соответствии с формулой (5.122) сумма малых постоянных времени должна быть ограничена величиной

$$\frac{T}{2} + \sum_{i=3}^n T_i \leq \frac{1}{\lambda_{\text{ср}}} \frac{M}{M+1} = \frac{1}{25,2} \frac{1,5}{1,5+1} = 0,024 \text{ с.}$$

Допустимая сумма постоянных времени непрерывной системы равна

$$\sum_{i=3}^n T_i = 0,024 - \frac{T}{2} = 0,024 - 0,01 = 0,014 \text{ с.}$$

На рис. 5.41, а пунктиром показана л. а. х. непрерывной части некорректированной системы, сплошной линией — желаемая (скорректированная) л. а. х. непрерывной части. В низкочастотной области (до частоты среза $\omega_{\text{ср}}$) она совпадает с л. а. х. дискретной системы (см. рис. 5.41, б). В области высоких частот вид желаемой л. а. х. непрерывной части, вообще говоря, может быть произвольным. Важно только, чтобы сумма постоянных времени T_{Σ} не превышала допустимого значения.

Наиболее простые корректирующие звенья получаются в тех случаях, когда сопрягающие частоты л. а. х. нескорректированной системы и желаемой л. а. х. совпадают между собой. В рассматриваемом примере

$$T_{\Sigma} = T_3 + T_4 + T_5.$$

Можно принять

$$T_4 = \tau_2 = 0,003 \text{ с, } T_5 = \tau_3 = 0,001 \text{ с.}$$

Тогда

$$T_3 = T_{\Sigma} - T_4 - T_5 = 0,014 - 0,003 - 0,001 = 0,01 \text{ с.}$$

Желаемая л. а. х. для этого случая, $L'_{\text{ж}}(\omega)$, построена на рис. 5.41, а. Однако более целесообразно уменьшить постоянную времени до значения $T_3 = \tau_2 = 0,003 \text{ с}$. Тогда желаемая л. а. х. будет иметь более благоприятный вид, так как она будет ближе к исходной л. а. х. $L(\omega)$, и корректирующее звено получится более простым. В данном случае оно сводится к интегро-дифференцирующему

звену с передаточной функцией

$$W_{\text{пк}}(p) = \frac{(1 + T_{2\text{к}}p)(1 + T_{3\text{к}}p)}{(1 + T_{1\text{к}}p)(1 + T_{4\text{к}}p)},$$

где $T_{1\text{к}} = T_1 = 2$ с, $T_{2\text{к}} = T_2 = 0,12$ с, $T_{3\text{к}} = \tau_1 = 0,05$ с, $T_{4\text{к}} = T_3 = 0,003$ с.

В случае необходимости полученное корректирующее устройство последовательного типа может быть пересчитано по формулам (5.211) в эквивалентное звено параллельного типа или эквивалентную обратную связь.

Из приведенного примера видно, что при синтезе непрерывных последовательных корректирующих устройств метод логарифмических частотных характеристик не теряет своей простоты и наглядности.

Дискретные корректирующие средства. Корректирующие средства могут быть реализованы на цифровой вычислительной машине, включенной в контур управления. Это усложняет алгоритм работы ЦВМ, но позволяет избавиться от необходимости использовать непрерывные корректирующие устройства.

Требуемый алгоритм работы ЦВМ определяется передаточной функцией $D(z)$. Дискретные корректирующие средства могут быть также осуществлены на дискретных фильтрах, построенных на различных ячейках памяти.

Пусть тем или иным путем найдена желаемая дискретная передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{\text{ж}}(z) = \frac{H_{\text{ж}}(z)}{1 - H_{\text{ж}}(z)} = D(z) W_0(z), \quad (5.221)$$

где $H_{\text{ж}}(z)$ — желаемая передаточная функция замкнутой системы, а $W_0(z)$ — передаточная функция исходной нескорректированной системы. Тогда искомая передаточная функция ЦВМ или дискретного фильтра имеет вид

$$D(z) = \frac{W_{\text{ж}}(z)}{W_0(z)} = \frac{H_{\text{ж}}(z)}{1 - H_{\text{ж}}(z)} \frac{1}{W_0(z)}. \quad (5.222)$$

Формирование желаемой функции $H_{\text{ж}}(z)$ должно производиться с учетом некоторых ограничений. Необходимо, чтобы передаточная функция $H_{\text{ж}}(z)$ содержала в качестве своих нулей все те нули передаточной функции $W_0(z)$, модуль которых равен или больше единицы. Кроме того, необходимо, чтобы выражение $1 - H_{\text{ж}}(z)$ содержало в ка-

честве своих нулей все те полюсы $W_0(z)$, модуль которых равен или больше единицы.

Невыполнение этих условий вызывает нарушение требований к грубости системы и вызывает ее неустойчивость, так как приводит к неустойчивым линейным программам ЦВМ, которые должны реализовать получающуюся по формуле (5.222) передаточную функцию $D(z)$. Кроме того, получающаяся дробно-рациональная передаточная функция $D(z)$ не должна иметь степень числителя выше, чем знаменателя, так как это приводит к необходимости знания будущего значения входного сигнала, что не может быть реализовано.

Вместо формулы (5.222) может применяться соотношение, связывающее дискретные частотные передаточные функции

$$W_{\text{пк}}^*(j\lambda) = \frac{W_{\text{ж}}^*(j\lambda)}{W_0^*(j\lambda)} \quad (5.223)$$

или соответствующие им логарифмические частотные характеристики

$$L_{\text{пк}}^*(\lambda) = L_{\text{ж}}^*(\lambda) - L^*(j\lambda). \quad (5.224)$$

После определения $W_{\text{пк}}^*(j\lambda)$ подстановкой $j\lambda = 2\omega T^{-1}$ можно получить передаточную функцию $W^*(2\omega T^{-1})$, а затем путем подстановки $\omega = (z-1)(z+1)^{-1}$ — передаточную функцию $W_{\text{пк}}(z) = D(z)$.

Сформулированные выше ограничения по отношению к выражению (5.223) имеют следующий вид. Необходимо, чтобы передаточная функция $W_{\text{ж}}^*(j\lambda)$ содержала в качестве своих нулей и полюсов по переменной $x = j\lambda$ все те нули и полюсы передаточной функции $W_0^*(j\lambda)$, которые лежат в правой полуплоскости. Кроме того, необходимо, чтобы получающаяся дробно-рациональная функция $W_{\text{пк}}^*(j\lambda)$ имела степень числителя не больше, чем степень знаменателя.

Пример 5.2. Пусть в цифровой системе с экстраполятором нулевого порядка передаточная функция непрерывной части совместно с входным и выходным преобразователями соответствует интегрирующему звену второго порядка:

$$W_{\text{н}}(p) = \frac{K_2}{p^2}. \quad (5.225)$$

Дискретная передаточная функция имеет вид

$$W_0(z) = \frac{z-1}{z} \approx \left\{ \frac{K_2}{p^3} \right\} = \frac{K_2 T^2 (z+1)}{2(z-1)^2}. \quad (5.226)$$

Дискретная частотная передаточная функция —

$$W_0^*(j\lambda) = \frac{K_2 \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)}{(j\lambda)^2}. \quad (5.227)$$

Соответствующая л. а. х. $L^*(\lambda)$ построена на рис. 5.42.

Примем в качестве желаемой л. а. х. $L_{ж1}^*$, изображенную на рис. 5.42. Она соответствует передаточной функции (см. таблицу 5.3 и рис. 5.33) разомкнутой системы

$$W_{ж1}^*(j\lambda) = \frac{K_2 (1 + j\lambda T_2) \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)}{(j\lambda)^2} \quad (5.228)$$

при условии, что $T_i = 0$, где $i = 3, 4, \dots, n$. Дискретная частотная передаточная функция последовательного корректирующего устройства имеет вид

$$W_{пк}^*(j\lambda) = \frac{W_{ж1}^*(j\lambda)}{W_0^*(j\lambda)} = 1 + j\lambda T_2. \quad (5.229)$$

Переход к передаточной функции ЦВМ дает

$$W_{пк}(z) = D(z) = \frac{\left(1 + \frac{2T_2}{T}\right)z + \left(1 - \frac{2T_2}{T}\right)}{z+1}. \quad (5.230)$$

Последнее выражение определяет неустойчивую программу, так как полюс передаточной функции $z_1 = -1$ соответствует колебательной границе устойчивости.

Заметим, что получившаяся частотная передаточная функция корректирующего устройства (5.229) не может быть реализована, вообще говоря, и в непрерывном варианте. Эта функция соответствует бесконечному подъему усиления при росте частоты до бесконечности. При ре-

ализации в дискретном варианте эта функция приводит к неустойчивой программе ЦВМ. Для исключения этого

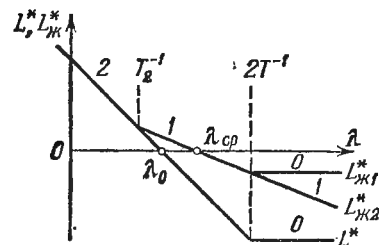


Рис. 5.42. Варианты выбора желаемой л. а. х.

явления примем желаемую л. а. х. $L_{ж2}^*$ в другом виде (рис. 5.42). Желаемая передаточная функция

$$W_{ж2}^*(j\lambda) = \frac{K_2 (1 + j\lambda T_2) \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)}{(j\lambda)^2 \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)} \quad (5.231)$$

соответствует типовой функции в таблице 5.5. Передаточная функция корректирующего устройства в этом случае имеет вид

$$W_{пк}^*(j\lambda) = \frac{W_{ж2}^*(j\lambda)}{W_0^*(j\lambda)} = \frac{1 + j\lambda T_2}{1 + j\lambda \frac{T}{2}} \quad (5.232)$$

Переход к передаточной функции ЦВМ дает

$$W_{пк}(z) = D(z) = \frac{\left(1 + \frac{2T_2}{T}\right)z + \left(1 - \frac{2T_2}{T}\right)}{2z} = \frac{z - a}{(1 - a)z}, \quad (5.233)$$

где $a = (2T_2 - T)(2T_2 + T)^{-1}$. Этой передаточной функции соответствует устойчивая программа ЦВМ.

Для рассмотренного примера произведем числовой расчет. Пусть по условиям точности $K_2 = 100 \text{ с}^{-2}$, а показатель колебательности $M = 1,5$. Дальнейший расчет произведем в соответствии с формулами (5.115) и (5.116). Базовая частота л. а. х.

$$\lambda_0 = \sqrt{K_2} = \sqrt{100} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Требуемое значение постоянной времени равно

$$T_2 = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,173 \text{ с}.$$

Допустимое значение суммы малых постоянных времени для передаточной функции (5.231) равно периоду дискретности:

$$\frac{T}{2} + \frac{T}{2} = T \leq \frac{1}{\lambda_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1} = \frac{1}{10} \frac{\sqrt{1,5(1,5-1)}}{1,5+1} = 0,0346 \text{ с}.$$

Примем период дискретности $T = 0,0346 \text{ с}$. Передаточная функция ЦВМ (5.233) имеет вид

$$D(z) = \frac{\left(1 + \frac{2 \cdot 0,173}{0,0346}\right)z + 1 - \frac{2 \cdot 0,173}{0,0346}}{2z} = 5,5 (1 - 0,82z^{-1}).$$

Множитель 5,5 может быть присоединен к непрерывной части.

В таблице 5.8 приведены некоторые простейшие дискретные корректирующие средства, которые могут реализоваться на ЦВМ или дискретных фильтрах. Переходные характеристики в таблице 5.8 построены для случая использования экстраполятора нулевого порядка.

В самом общем случае передаточная функция корректирующего устройства имеет вид

$$D(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_k z^{-k}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{1 + A(z)}. \quad (5.234)$$

Эта передаточная функция соответствует так называемому рекурсивному фильтру. Если $A(z) = 0$, то будет получен нерекурсивный фильтр.

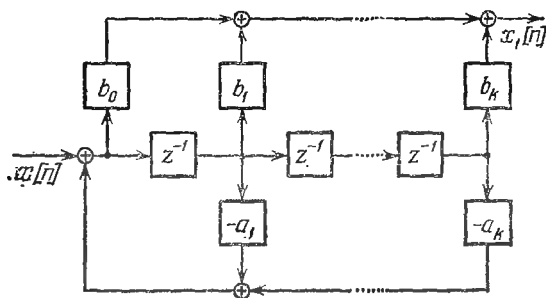
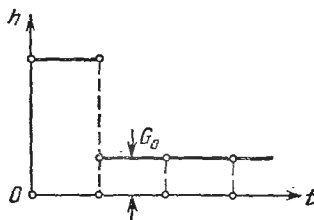
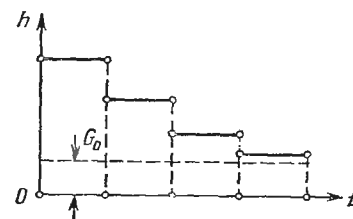


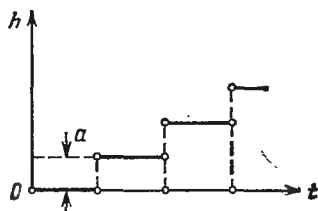
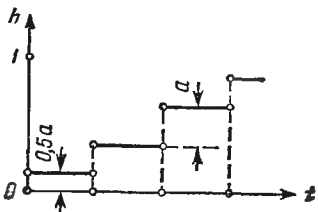
Рис. 5.43. Первая каноническая схема дискретного фильтра.

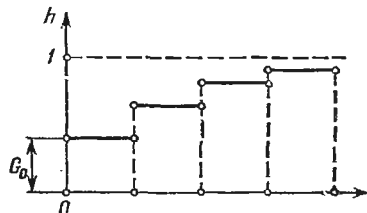
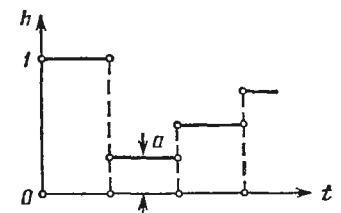
Структурная схема реализации на ЦВМ передаточной функции (5.234) была приведена на рис. 3.12. Она соответствует так называемому *прямому программированию*. Как следует из структурной схемы, при реализации ее не на ЦВМ, а в виде отдельного дискретного фильтра, требуется $2k$ линий задержки.

Более экономными в этом смысле оказываются канонические схемы дискретного фильтра. Первая форма канонической схемы, к которой может быть преобразована схема прямого программирования, изображена на рис. 5.43. Она содержит только k линий задержки. В отличие от исходной схемы (рис. 3.12), на ней не

Простейшие последовательные дискретные корректирующие звенья

Тип звена	Передаточная функция непрерывного аналога	Дискретная передаточная функция	Частотная передаточная функция	Переходная характеристика
Дифференцирующее	$1 + T_1 p$	$\frac{1}{1-a} \frac{z-a}{z}$ $0 < a \leq 1$	$\frac{1 + j\tau\lambda}{1 + j\frac{T}{2}\lambda}$ $G_0 = 1, \tau = \frac{1+a}{1-a} \frac{T}{2}$	
Аналог пассивного дифференцирующего	$\frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p}, T_1 > T_2$	$\frac{1-b}{1-a} \frac{z-a}{z-b}$ $0 < a < 1,$ $0 < b < 1,$ $a > b$	$G_0 \frac{1 + j\tau_1\lambda}{1 + j\tau_2\lambda}, G_0 = 1,$ $\tau_1 = \frac{1+a}{1-a} \frac{T}{2},$ $\tau_2 = \frac{1+b}{1-b} \frac{T}{2}$	

Тип звена	Передаточная функция непрерывного аналога	Дискретная передаточная функция	Частотная передаточная функция	Переходная характеристика
Интегрирующее (метод прямоугольников)	$\frac{k}{p} = \frac{1}{T_1 p}$	$\frac{a}{z-1}$	$\frac{a}{T} \frac{1-j\frac{T}{2}\lambda}{j\lambda}$	
Интегрирующее (метод трапеций)	$\frac{k}{p} = \frac{1}{T_1 p}$	$\frac{a}{2} \frac{z+1}{z-1}$	$\frac{a}{T} \frac{1}{j\lambda}$	

Тип звена	Передаточная функция непрерывного аналога	Дискретная передаточная функция	Частотная передаточная функция	Переходная характеристика
Аналог пассивного интегрирующего	$\frac{1+T_2 p}{1+T_1 p}$ $T_1 > T_2$	$\frac{(1+a)z+1-a}{(1+b)z+1-b}$ $a > 1, \quad b > 1,$ $a < b$	$\frac{1+j\tau_2\lambda}{1+j\tau_1\lambda}$ $\tau_1 = \frac{bT}{2}, \quad \tau_2 = \frac{aT}{2}$ $G_0 = \frac{1+a}{1+b}$	
Интегро-дифференцирующее	$1 + \frac{1}{T_1 p} + T_2 p$	$\frac{a}{z-1} + \frac{z-1}{z}$ $a < 1$	$\frac{a + \left(1 - \frac{a}{4}\right) T^2 (j\lambda)^2}{jT\lambda \left(1 + j\frac{T}{2}\lambda\right)}$	

показаны внутренние источники шумов квантования. Вторая форма канонической схемы показана на рис. 5.44. Так же как и предыдущая, она содержит только k линий задержки.

Требования к точности задания коэффициентов дискретных фильтров. Рассмотрим простейший случай воспроизведения в дискретной форме апериодического звена

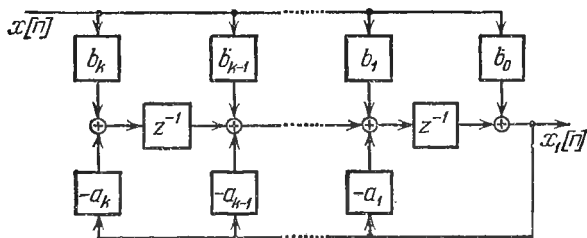


Рис. 5.44. Вторая каноническая схема дискретного фильтра.

первого порядка с дискретной частотной передаточной функцией

$$D^*(j\lambda) = \frac{1}{1 + j\lambda T_1}. \quad (5.235)$$

Ей соответствует дискретная передаточная функция

$$D(z) = \frac{1 - a}{2} \frac{z + 1}{z - a}. \quad (5.236)$$

Параметры передаточных функций:

$$a = \frac{2T_1 - T}{2T_1 + T} < 1, \quad (5.237)$$

$$T_1 = \frac{1 + a}{1 - a} \frac{T}{2}. \quad (5.238)$$

При реализации дискретного фильтра с передаточной функцией (5.236) неизбежно округление коэффициента (5.237) вследствие ограниченности разрядной сетки цифровой части. Если этот коэффициент может быть реализован с точностью Δa , то постоянная времени (5.238) будет реализована с точностью

$$\Delta T_1 \approx \frac{\partial T_1}{\partial a} \Delta a = \frac{(2T_1 - T)^2}{4T} \Delta a. \quad (5.239)$$

Относительная точность реализации заданного значения постоянной времени

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} \approx \frac{(2T_1 - T)^2}{4TT_1} \Delta a \approx \frac{T_1}{T} \Delta a. \quad (5.240)$$

Последнее выражение может служить для формулирования требований к точности реализации требуемого коэффициента (5.237) в цифровой части и, в частности, к допустимому округлению этого коэффициента за счет ограниченности разрядной сетки. Эти требования ужесточаются при снижении периода дискретности.

В более сложном случае реализации аperiodического звена второго порядка с дискретной частотой передаточной функцией

$$D^*(j\lambda) = \frac{1}{(1 + j\lambda T_1)(1 + j\lambda T_2)} \quad (T_1 > T_2) \quad (5.241)$$

дискретная передаточная функция

$$D(z) = \frac{(1-a)(1-b)(z+1)^2}{4(z-a)(z-b)} = \frac{c(z^2 + 2z + 1)}{z^2 - a_1 z + a_2}. \quad (5.242)$$

Параметры передаточных функций:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad a &= \frac{2T_1 - T}{2T_1 + T}, & 2) \quad b &= \frac{2T_2 - T}{2T_2 + T}, \\ 3) \quad T_1 &= \frac{1+a}{1-a} \frac{T}{2}, & 4) \quad T_2 &= \frac{1+b}{1-b} \frac{T}{2}, \\ 5) \quad a &= \frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}, & 6) \quad b &= \frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.243)$$

Найдем связь между отклонениями Δa_1 и Δa . Из равенства (5) выражений (5.243) следует:

$$\Delta a \approx \frac{\partial a}{\partial a_1} \Delta a_1 \approx \frac{\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}}{2 \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}} \Delta a_1. \quad (5.244)$$

При близких значениях коэффициентов a и b знаменатель в формуле (5.244) может значительно превышать числитель. Это приведет к тому, что будет выполняться неравенство $\Delta a \gg \Delta a_1$. В результате требования по реализации коэффициента a_1 оказываются значительно более жесткими, чем требования по реализации коэффициентов a и b . При росте порядка знаменателя передаточной

функции $D(z)$ требования могут настолько стать жесткими, что реализация ее может привести к невыполнимым требованиям по числу разрядов цифровой части системы.

Для устранения этого недостатка можно перейти от прямого к последовательному или параллельному программированию. При последовательном программировании передаточная функция (5.234) разбивается на элементарные множители первого или второго порядка:

$$D(z) = b_0 \prod_{i=1}^N \frac{1 + a_i z^{-1}}{1 + b_i z^{-1}} \prod_{j=1}^L \frac{1 + a_{1j} z^{-1} + a_{2j} z^{-2}}{1 + b_{1j} z^{-1} + b_{2j} z^{-2}}, \quad (5.245)$$

содержащие вещественные коэффициенты. Структурная схема реализации передаточной функции $D(z)$ будет представлять при этом последовательно соединенные дискретные фильтры с элементарными передаточными функциями. Так, например, передаточная функция (5.241) будет представлена в виде

$$\left. \begin{aligned} D(z) &= D_1(z) D_2(z), \\ D_1(z) &= \frac{1 - a}{2} \frac{z + 1}{z - a} = \frac{1 - a}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - a z^{-1}}, \\ D_2(z) &= \frac{1 - b}{2} \frac{z + 1}{z - b} = \frac{1 - b}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - b z^{-1}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.246)$$

Требования к точности реализации коэффициентов a и b оказываются здесь такими же, как и в простейшем случае (5.240).

При параллельном программировании передаточная функция (5.234) представляется в виде суммы элементарных дробей. При однократных корнях эта сумма

$$D(z) = \frac{b_k}{a_k} + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 + b_i z^{-1}} + \sum_{j=1}^L \frac{A_{1j} + A_{2j} z^{-1}}{1 + b_{1j} z^{-1} + b_{2j} z^{-2}}. \quad (5.247)$$

Структурная схема цифрового фильтра может быть представлена в виде параллельного соединения элементарных цифровых фильтров, входящих в (5.247), каждый из которых может быть реализован в соответствии со структурными схемами на рис. 5.43 или рис. 5.44. Как и при последовательном программировании, требования к точности воспроизведения отдельных коэффициентов оказываются не столь жесткими, как при прямом программировании. Кроме того, при реализации цифровой

части системы на дискретных элементах последовательная и параллельная схемы позволяют более просто использовать модульные конструкции, выполненные, в частности, на интегральных микросхемах.

Корректирующие обратные связи. Дискретная коррекция может применяться и при использовании обратных связей в соответствии с рис. 2.23, в. Передаточная функция такой обратной связи может быть определена из известных, найденных для схемы на рис. 2.23, а передаточных функций $D_0(z)$ или $D_0^*(j\lambda)$ на основе формул пересчета (5.211) для схемы на рис. 2.23, в в случае, которому соответствуют формулы (2.175),

$$B_0(z) = \frac{1 - D_0(z)}{D_0(z) W_0(z)}, \quad B_0^*(j\lambda) = \frac{1 - D_0^*(j\lambda)}{D_0^*(j\lambda) W_0^*(j\lambda)}. \quad (5.248)$$

Передаточную функцию обратной связи $B_0(z)$ или $B_0^*(j\lambda)$, полученную из (5.248), следует рассматривать лишь как первое приближение искомой передаточной функции $B(z)$ или $B^*(j\lambda)$. Для окончательного определения искомой передаточной функции следует учесть требования, которым она должна отвечать. Эти требования следующие.

1. Передаточной функции $B(z)$ должна соответствовать устойчивая программа вычислений на ЦВМ в том смысле, что полюсы этой передаточной функции должны находиться внутри круга единичного радиуса.

2. Степень числителя $B(z)$ не должна превышать степени знаменателя. Нарушение этого условия означает, что при вычислении необходимо будет знать будущие значения управляемой величины, поступающей на вход звена с передаточной функцией $B(z)$.

3. Желательно, чтобы степень числителя $B^*(j\lambda)$ была не больше степени знаменателя. Невыполнение этого условия может привести к возрастанию шумовой помехи на выходе звена с передаточной функцией $B^*(j\lambda)$ от квантования по уровню управляемой величины. Дисперсия этой помехи в канале ошибки ЦВМ может быть подсчитана по формуле

$$D_k = \frac{\delta_1^2}{12} \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|B^*(j\lambda) [1 + W_0^*(j\lambda)]|^2 d\lambda}{\left| \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right) \{1 + [1 + B^*(j\lambda)] W_0^*(j\lambda)\} \right|^2},$$

где δ_1 — цена единицы младшего разряда входного преобразователя. При инерционном объекте можно записать приближенно

$$D_K \approx \frac{\delta_1^2}{12} \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|B^*(j\lambda)|^2 d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2}.$$

Из последнего выражения и вытекает сформулированное требование.

4. Для сохранения устойчивости по цепи корректирующей обратной связи необходимо, чтобы выполнялось требование нахождения внутри круга единичного радиуса корней характеристического уравнения $1 + B(z) W_0(z) = 0$. С учетом (5.248) это требование сводится к тому, чтобы нули исходной функции $D(z)$ находились внутри круга единичного радиуса.

Так как эти требования могут не выполняться в передаточной функции, полученной по формуле (5.248), то при определении окончательного вида $B(z)$ или $B^*(j\lambda)$ необходимо ввести коррективы.

При невыполнении первого требования (условия устойчивости программы вычисления) можно использовать отбрасывание множителей, соответствующих неустойчивым полюсам, или замену их близкими множителями, но с устойчивыми полюсами.

При невыполнении второго требования (условия ограничения текущим и предыдущими значениями управляемой величины) возможно домножение передаточной функции $B_0(z)$ на z^{-1} в соответствующей степени.

При невыполнении третьего требования (условия ограничения полосы пропускания цепи обратной связи) возможно домножение передаточной функции $B_0^*(j\lambda)$ на множитель $\left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)^{-1}$ в соответствующей степени. Этому соответствует домножение передаточной функции $B_0(z)$ на множитель $0,5(z+1)z^{-1}$ в той же степени.

Естественно, что эти изменения в полученной по формуле (5.248) передаточной функции $B_0(z)$ или $B_0^*(j\lambda)$ приводят к изменению исходной передаточной функции $D_0(z)$ или $D_0^*(j\lambda)$, которая была получена в процессе синтеза. Поэтому из уточненного выражения передаточной функции обратной связи следует перейти к новым

значениям

$$D(z) = \frac{1}{1+B(z)W_0(z)}, \quad D^*(j\lambda) = \frac{1}{1+B^*(j\lambda)W_0^*(j\lambda)}. \quad (5.249)$$

Для этих передаточных функций последовательного корректирующего звена должна быть вновь просмотрена задача формирования типовой л. а. х., удовлетворяющей принятым требованиям. При выполнении принятых требований уточненное значение $B(z)$ может быть принято как окончательное. При невыполнении принятых требований приходится возвращаться к вопросу уточнения вида $B(z)$ или принять новые требования и исходные данные к динамическим свойствам проектируемой системы (увеличить допустимый показатель колебательности, снизить имеющиеся в системе постоянные времени, увеличить допустимую ошибку и т. п.).

Для иллюстрации вернемся к рассмотрению примера 5.2. Для него были получены передаточные функции

$$W_0(z) = \frac{K_2 T (z+1)}{2(z-1)^2}, \quad D_0(z) = \frac{z-a}{(1-a)z}.$$

Использование формулы (5.248) дает здесь

$$B_0(z) = -\frac{2a}{K_2 T^2} \frac{(z-1)^3}{(z+1)(z-a)},$$

$$B_0^*(j\lambda) = -\frac{2aT}{(1-a)K_2} \frac{(j\lambda)^3}{(1+j\lambda T_2)\left(1-j\lambda \frac{T}{2}\right)}.$$

Из этих выражений видно, что сформулированные выше условия 1, 2 и 3 не выполняются. Уточнение передаточных функций можно сделать домножением на множитель $0,5(z+1)z^{-1}$, что уравнивает степени числителя и знаменателя в частотной передаточной функции и одновременно исключает множитель $(z+1)$, которому соответствует полюс $z_1 = -1$, а также дополнительным умножением на множитель z^{-1} , что уравнивает степени числителя и знаменателя $B(z)$. В результате имеем

$$B(z) = -\frac{a}{K_2 T^2} \frac{(z-1)^3}{z^2(z-a)},$$

$$B^*(j\lambda) = -\frac{aT}{(1-a)K_2} \frac{(j\lambda)^3}{(1+j\lambda T_2)\left(1+j\lambda \frac{T}{2}\right)}.$$

Пересчет этой передаточной функции на передаточную функцию последовательного звена (5.249) дает

$$D^*(j\lambda) = \frac{(1 + j\lambda T_2) \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)^2}{1 + j\lambda \frac{3}{2} T + (j\lambda)^2 \frac{3}{2} T_2 T + (j\lambda)^3 \frac{T_2 T^2}{4}}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы при использовании принятого значения $B^*(j\lambda)$

$$\begin{aligned} W^*(j\lambda) &= D^*(j\lambda) W_0^*(j\lambda) = \\ &= \frac{K_2 (1 + j\lambda T_2) \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)^2}{(j\lambda)^2 \left[1 + j\lambda \frac{3}{2} T + (j\lambda)^2 \frac{3}{2} T_2 T + (j\lambda)^3 \frac{T_2 T^2}{4}\right]}. \end{aligned}$$

Ориентировочное значение эквивалентной суммы малых постоянных времени здесь оказывается равным $T_s \approx T$, что совпадает со случаем использования последовательного корректирующего звена. Это говорит о возможности

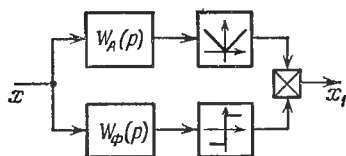


Рис. 5.45. Псевдолинейное корректирующее звено.

использования уточненной передаточной функции $B(z)$ вместо исходной $B_0(z)$. При необходимости может быть сделан более точный расчет с построением л. а. х. и л. ф. х. для полученной передаточной функции $W^*(j\lambda)$.

Псевдолинейные корректирующие устройства. Теория

использования нелинейных корректирующих устройств наиболее полно разработана в настоящее время для так называемых псевдолинейных устройств, характеристики которых не зависят от амплитуды входного гармонического сигнала. Это делает их похожими на линейные звенья. Вместе с тем они позволяют формировать отдельно амплитудную и фазовую частотные характеристики устройства, что невозможно для линейных систем.

Структурная схема псевдолинейного устройства изображена на рис. 5.45. Верхний канал содержит элемент взятия модуля, а нижний — элемент определения знака сигнала.

В верхний канал введено звено формирования амплитудной характеристики с передаточной функцией $W_a(p)$,

а нижний канал — звено формирования фазовой характеристики с передаточной функцией $W_\phi(p)$. Выходной сигнал получается перемножением сигналов двух каналов устройства.

Исследование подобного устройства проще всего можно провести посредством использования метода гармонической линеаризации [79]. Коэффициенты гармонической линеаризации при выполнении условий для фазовых сдвигов фазового и амплитудного каналов

$$0 \leq \varphi_\phi \leq \pi, \quad -\pi \leq \varphi_a \leq 0, \quad \pi - \varphi_\phi \geq |\varphi_a| \quad (5.250)$$

должны определяться в соответствии с выражениями

$$q = \frac{2}{\pi} |W_a(j\omega)| \left[\left(\frac{1}{2\pi} - |\varphi_a| - \varphi_\phi \right) \cos \varphi_a + \sin |\varphi_a| + \right. \\ \left. + \sin \varphi_\phi \cos (|\varphi_a| + \varphi_\phi) \right], \quad (5.251)$$

$$q' = \frac{2}{\pi} |W_a(j\omega)| \left[\left(-\frac{1}{2\pi} + |\varphi_a| + \varphi_\phi \right) \sin |\varphi_a| + \right. \\ \left. + \sin \varphi_\phi \sin (|\varphi_a| + \varphi_\phi) \right]. \quad (5.252)$$

При выполнении условий

$$0 \leq \varphi_\phi \leq \pi, \quad -\pi \leq \varphi_a \leq 0, \quad -\pi - \varphi_\phi \leq |\varphi_a|$$

— в соответствии с выражениями

$$q = \frac{2}{\pi} |W_a(j\omega)| \left[\left(-\frac{3}{2\pi} + |\varphi_a| + \varphi_\phi \right) \cos \varphi_a - \sin |\varphi_a| - \right. \\ \left. - \sin \varphi_\phi \cos (|\varphi_a| + \varphi_\phi) \right], \quad (5.253)$$

$$q' = \frac{2}{\pi} |W_a(j\omega)| \left[\left(\frac{3}{2\pi} - |\varphi_a| - \varphi_\phi \right) \sin |\varphi_a| - \right. \\ \left. - \sin \varphi_\phi \sin (|\varphi_a| + \varphi_\phi) \right]. \quad (5.254)$$

Приведенные формулы соответствуют наиболее важному случаю, когда амплитудный канал создает подавление сигнала и вводит отрицательные фазовые сдвиги, а фазовый канал дает фазовое упреждение. Это позволяет получать необходимые запасы устойчивости в замкнутой системе при амплитудном подавлении сигнала.

Можно показать [79], что для приближенных представлений амплитудной и фазовой характеристик псевдолиней-

ного устройства допустимо использовать приближенные формулы

$$|W_{\text{пл}}(j\omega)| = \sqrt{q^2(\omega) + [q'(\omega)]^2} \approx |W_a(j\omega)| \times \\ \times [0,64 + 0,36 |\cos(|\varphi_a| + \varphi_\Phi)|] \approx |W_a(j\omega)|, \quad (5.255)$$

$$\varphi_{\text{пу}}(\omega) = \arctg \frac{q'(\omega)}{q(\omega)} \approx \varphi_\Phi - 0,42 \sin 2(\varphi_\Phi + |\varphi_a|). \quad (5.256)$$

Независимость всех рассмотренных характеристик от амплитуды входного сигнала и послужила поводом для введения термина «псевдолинейное устройство».

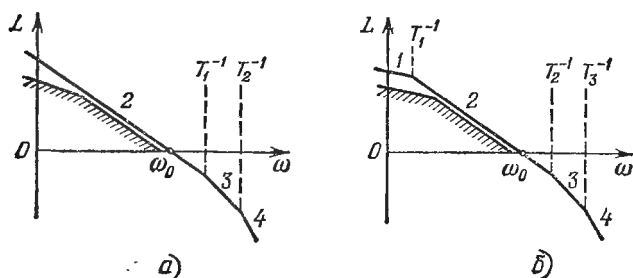


Рис. 5.46. Примеры типовых л. а. х. при псевдолинейной коррекции.

Для случая введения псевдолинейных корректирующих средств желаемые передаточные функции с заданным запасом устойчивости отличаются от тех, которые были рассмотрены в § 5.3. На рис. 5.46 приведены возможные типовые л. а. х. Пересечение оси нуля децибел происходит при наклоне асимптоты л. а. х. — 40 дБ/дек. По сравнению с л. а. х. типа 2—1—2—3 и 1—2—1—2—3..., рассмотренными в § 5.3, здесь значительно подавлены высокие частоты, что позволяет получить лучшую фильтрацию помех (рис. 5.34). Непрерывная часть системы в случае астатизма второго порядка (рис. 5.46, а) имеет передаточную функцию

$$W_n(p) = \frac{k_n}{p^2 \prod_{i=1}^q (1 + T_i p)}. \quad (5.257)$$

Амплитудный канал псевдолинейного корректирующего устройства содержит при этом звено с передаточной

функцией $W_a(p) = 1$, а фазовый канал — звено с передаточной функцией

$$W_\phi(p) = \frac{\tau_2}{\tau_1} \frac{1 + \tau_1 p}{1 + \tau_2 p} \quad (\tau_1 > \tau_2). \quad (5.258)$$

В этом случае амплитудная характеристика разомкнутой системы в соответствии с выражением (5.257) будет

$$|W(j\omega)| \approx \frac{K_2}{\omega^2 \prod_{i=1}^q \sqrt{1 + \omega^2 T_i^2}}. \quad (5.259)$$

Фазовая характеристика

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) = \varphi_n(\omega) + \varphi_{ny}(\omega) = -180^\circ + \\ + \operatorname{arctg} \omega \tau_1 - \operatorname{arctg} \omega \tau_2 - \sum_{i=1}^q \operatorname{arctg} \omega T_i + \Delta\varphi, \end{aligned} \quad (5.260)$$

где дополнительный фазовый сдвиг

$$\Delta\varphi = -24^\circ \sin 2\varphi_\phi = -24^\circ \sin 2(\operatorname{arctg} \omega \tau_1 - \operatorname{arctg} \omega \tau_2).$$

Приближенное выражение для запаса по фазе:

$$\mu = 180^\circ + \varphi(\omega) \approx \operatorname{arctg} \omega \tau_1 - \operatorname{arctg} \omega (\tau_2 + T_\Sigma), \quad (5.261)$$

где $T_\Sigma = \sum_{i=1}^q T_i$. Исследование запаса по фазе на максимум дает

$$\left. \begin{aligned} \mu_{\max} &= \operatorname{arctg} \frac{h-1}{2\sqrt{h}} + \Delta\varphi, \\ h &= \frac{\tau_1}{\tau_2 + T_\Sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (5.262)$$

Далее можно воспользоваться методикой, изложенной в § 5.3. Тогда для получения заданного запаса устойчивости, определяемого по величине показателя колебательности, необходимо выполнить условия

$$\tau_1 \geq \frac{1}{\omega_0} \sqrt[4]{h \sqrt{\frac{M^2}{M^2 - 1}}}, \quad \tau_2 + T_\Sigma \leq \frac{1}{\omega_0} \sqrt[4]{\frac{M^2}{(M^2 - 1) \sqrt{h}}}, \quad (5.263)$$

где базовая частота $\omega_0 = \sqrt{K_2}$, а величина h определяется из выражения

$$\frac{h-1}{2\sqrt{h}} = \operatorname{tg} \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{M^2-1}} - \Delta\varphi \right]. \quad (5.264)$$

В таблице 5.9 приведены требуемые величины h при различных значениях показателя колебательности M .

Т а б л и ц а 5.9

M	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
h	91	40	26,6	18,8	14,9	12,2	10,7	9,5	8,4

Для типовой л. а. х., изображенной на рис. 5.46, б, непрерывная часть системы описывается передаточной функцией

$$W_{\text{н}}(p) = \frac{k_{\text{н}}}{p \prod_{i=1}^q (1 + T_i p)}. \quad (5.265)$$

Расчет здесь можно вести аналогично, если использовать вместо базовой частоты $\omega_0 = \sqrt{K_2}$ (рис. 5.46, а) базовую частоту $\omega_0 = \sqrt{K_1 T_1^{-1}}$.

Условия применимости полученных результатов в цифровых системах остаются подобными тем, которые были изложены в начале настоящего параграфа. Если период дискретности T выбран достаточно малым так, что в районе малых и средних частот выполнялось бы условие $\lambda \approx \omega$, то все расчеты сохраняют свою силу.

Реализация псевдолинейного корректирующего устройства производится следующим образом. Дискретная частотная передаточная функция фазового канала в соответствии с таблицей 5.8 имеет здесь вид

$$W_{\Phi}^*(j\lambda) = \frac{1-a}{1-b} \frac{1+j\lambda\tau_1}{1+j\lambda\tau_2}. \quad (5.266)$$

Ей соответствует дискретная передаточная функция

$$W_{\Phi}(z) = \frac{z-a}{z-b} = \frac{1-az^{-1}}{1-bz^{-1}}. \quad (5.267)$$

Структурная схема рассматриваемого псевдолинейного устройства в дискретном варианте изображена на рис. 5.47.

Псевдолинейные корректирующие устройства имеют крупный недостаток, который ограничивает их использование в системах автоматического управления. Он заключается в том, что все приведенные выше характеристики и расчеты справедливы лишь для случая, когда постоянная составляющего сигнала на входе равна нулю. Появление даже сравнительно небольшой постоянной составляющей может вызвать резкое ухудшение всех характеристик и потерю устойчивости системы. Это приводит к тому, что использовать эти устройства можно лишь в тех случаях, когда система обладает астатизмом по отношению к возможным воздействиям на нее или когда этот астатизм специально обеспечивается введением в систему изодромных устройств.

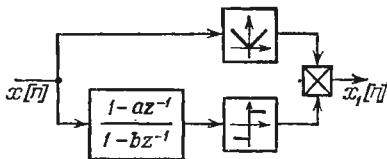


Рис. 5.47. Дискретное псевдолинейное звено с положительным фазовым сдвигом.

§ 5.6. Комбинированное управление

Использование комбинированного управления позволяет снизить требования к основному каналу и получить лучшие качественные показатели системы управления. Комбинированное управление особенно удобно применять в тех случаях, когда задающее воздействие вычисляется на ЦВМ. Тогда вычисление производных задающего воздействия

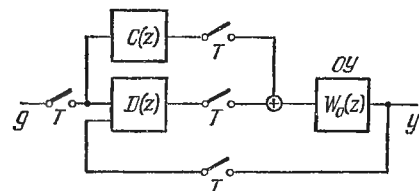


Рис. 5.48. Система комбинированного управления.

оказывается наиболее простым. Подобное положение может быть, например, при слежении за любыми объектами по счислимым координатам.

Структурная схема цифровой системы комбинированного регулирования изображена на рис. 5.48. Дополни-

тельный канал с передаточной функцией $C(z)$ служит для введения производных от задающего воздействия. В статических системах регулирования по этому каналу можно вводить также составляющую, пропорциональную $g(t)$, для компенсации статической ошибки. Эквивалентная передаточная функция замкнутой системы с учетом дополнительного канала имеет вид

$$H_3(z) = \frac{W_0(z) [D(z) + C(z)]}{1 + W_0(z) D(z)}, \quad (5.268)$$

где $W_0(z)$ — дискретная передаточная функция непрерывной части. Эквивалентная передаточная функция для ошибки равна

$$H_{3e}(z) = 1 - H_3(z) = \frac{1 - W_0(z) C(z)}{1 + W_0(z) D(z)}. \quad (5.269)$$

Эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы

$$W_3(z) = \frac{H_3(z)}{1 - H_3(z)} = \frac{W_0(z) [D(z) + C(z)]}{1 - W_0(z) C(z)}. \quad (5.270)$$

Из формулы (5.269) можно получить условие полной инвариантности. При $H_{3e}(z) = 0$ имеем

$$C(z) = \frac{1}{W_0(z)} = \frac{C_1(z)}{C_2(z)}. \quad (5.271)$$

Для большинства реальных систем степень числителя $W_0(z)$ на единицу меньше степени знаменателя. Поэтому степень полинома $C_1(z)$ оказывается на единицу больше степени полинома $C_2(z)$. Формулу (5.271) можно представить в виде

$$C(z) = cz + \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}. \quad (5.272)$$

Слагаемое $cz = ce^{pT}$ означает, что при формировании сигнала по дополнительному каналу необходимо знать упрежденное значение входной величины, т. е. значение, сдвинутое на один такт вперед. Это связано с необходимостью применения прямых разностей, которые в дискретном плане заменяют процесс дифференцирования (см. главу 2).

Здесь возможны следующие задачи.

1. Если ЦВМ вычисляет значение задающей величины по некоторым заложенным в нее данным и использует

при этом прогнозирование (например, при вычислении текущих координат небесных тел, спутников, ракет др.), то вычисление будущего значения интересующей величины может быть легко сделано со сдвигом на практически любое число тактов. В этом случае реализация формулы (5.272) в принципе возможна. Однако практические трудности в реализации слишком сложных алгоритмов и ограничения в элементах не дают возможности получить полную инвариантность.

2. Если ЦВМ вычисляет задающую величину не по принципу прогнозирования, а в результате обработки поступающей текущей информации, то точная реализация формулы (5.272) оказывается невозможной. Тогда приходится ограничиваться приближенной реализацией формулы (5.271) либо вводить в прямой канал дополнительное запаздывание на один или более тактов. В первом случае условие полной инвариантности (5.271) нарушается, во втором — вводится постоянное временное запаздывание в обработку задающего воздействия, что тоже нарушает условие инвариантности.

Таким образом, при использовании комбинированного регулирования приходится ориентироваться не на полную инвариантность, а на некоторое, во многих случаях весьма существенное, повышение точности.

Поскольку точность систем управления определяется низкочастотной частью л. а. х., а низкочастотная часть л. а. х. дискретных систем практически сливается с л. а. х. непрерывной части системы, то расчет дискретных систем комбинированного регулирования может производиться аналогично расчету непрерывных систем [7], с использованием дискретных частотных передаточных функций от псевдочастоты. Условие полной инвариантности (5.271) приобретает в этом случае вид

$$C^*(j\lambda) = \frac{1}{W_0^*(j\lambda)} = \frac{C_1^*(j\lambda)}{C_2^*(j\lambda)}. \quad (5.273)$$

Для систем управления с астатизмом первого порядка передаточная функция непрерывной части в низкочастотной области обычно сводится к выражению

$$W_n(p) = \frac{k_n}{p(1 + T_1 p)}. \quad (5.274)$$

Ей соответствует дискретная частотная передаточная функция

$$W_0^*(j\lambda) = \frac{K_1}{j\lambda(1+j\lambda T_1)}, \quad (5.275)$$

где $K_1 = k_n \delta \delta_1^{-1}$ — общий коэффициент усиление разомкнутого канала с учетом коэффициентов передачи преобразователей. Условие инвариантности в этом случае

$$C^*(j\lambda) = \frac{1}{W_0^*(j\lambda)} = \frac{j\lambda}{K_1} + \frac{(j\lambda)^2 T_1}{K_1} \quad (5.276)$$

или

$$C(z) = \frac{2}{K_1 T} \frac{z-1}{z+1} + \frac{4T_1}{K_1 T^2} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2. \quad (5.277)$$

Формулы (5.276) и (5.277) соответствуют введению по дополнительному каналу первой и второй производных от задающего воздействия. В более сложных случаях появляется необходимость введения производных более высоких порядков. В статических системах приходится, кроме того, вводить сигнал, пропорциональный задающему воздействию.

Однако оба слагаемых (5.277) не могут быть реализованы в той форме, как они записаны, так как они соответствуют неустойчивой программе ЦВМ, содержащей корень $z_1 = -1$ на границе колебательной устойчивости. Это получилось вследствие того, что слагаемые (5.276) не отвечают требованию, сформулированному в § 5.5 для дискретных корректирующих фильтров.

Ограничимся случаем введения первого слагаемого (5.276), что имеет целью компенсацию скоростной ошибки и получение астатизма второго порядка, но используем передаточную функцию, не приводящую к неустойчивой программе ЦВМ:

$$C^*(j\lambda) = \frac{j\lambda}{K_1 \left(1 + j\lambda \frac{T}{2} \right)}, \quad (5.278)$$

$$C(z) = \frac{z-1}{K_1 T z}. \quad (5.279)$$

В соответствии с выражением (5.270) эквивалентная частотная передаточная функция разомкнутой системы

в рассматриваемом случае имеет вид

$$W_*^*(j\lambda) = \frac{W_0^*(j\lambda) [D^*(j\lambda) + C^*(j\lambda)]}{1 - C^*(j\lambda) W^*(j\lambda)} = \frac{K_1 \left[D^*(j\lambda) \left(1 + j\lambda \frac{T}{2} \right) + j\lambda K_1^{-1} \right]}{(j\lambda)^2 \left(T_1 + \frac{T}{2} \right) \left[1 + j\lambda \frac{TT_1}{2 \left(T_1 + \frac{T}{2} \right)} \right]}. \quad (5.280)$$

Эта функция соответствует астатизму второго порядка даже в тех случаях, когда программой $D^*(z)$ не предусматривается введение в закон управления интегралов.

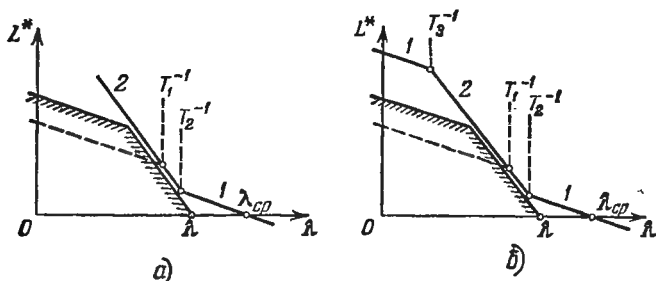


Рис. 5.49. Деформация л. а. х. при использовании комбинированного управления.

Полученные результаты иллюстрирует рис. 5.49. На рис. 5.49, а исходная л. а. х. системы без введения дополнительного канала с передаточной функцией (5.278) показана пунктиром. Она может заходить в запретную область по точности. Асимптотическая л. а. х., соответствующая эквивалентной передаточной функции (5.280), показана сплошной линией. При ее построении принято, что корректирующая программа $D^*(j\lambda)$ вводит звено с постоянной времени T_2 , формирующее типовой переход оси нуля децибел.

Однако условие инвариантности даже в том приближенном виде, который был принят в рассматриваемом примере, может нарушаться вследствие отклонения значений K_1 и T от номинальных. Если принять для коэффициента усиления и периода дискретности следующие

ЗАВИСИМОСТИ:

$$T = T_0 \pm \Delta T = T_0 \left(1 \pm \frac{\Delta T}{T_0} \right), \quad (5.281)$$

$$K_1 = K_{10} \pm \Delta K_1 = K_{10} \left(1 \pm \frac{\Delta K_1}{K_{10}} \right), \quad (5.282)$$

то эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы (5.280) приобретает здесь вид

$$W_s^*(j\lambda) \approx \frac{K_{10} \left[D^*(j\lambda) \left(1 + j\lambda \frac{T}{2} \right) + j\lambda K_{10}^{-1} \right]}{j\lambda \left[\left(\pm \frac{\Delta T}{T_0} \pm \frac{\Delta K_1}{K_{10}} \right) + \left(T_1 + \frac{T}{2} \right) j\lambda \right] \left(1 + j\lambda \frac{T}{2} \right)}. \quad (5.283)$$

Рассматривая изменения K_1 и T как случайные и независимые, можно представить эквивалентную передаточную функцию разомкнутой системы в виде

$$W_s^*(j\lambda) \approx \frac{K_{10}^0 \left[D^*(j\lambda) \left(1 + (j\lambda) \frac{T}{2} \right) + j\lambda K_{10}^{-1} \right]}{j\lambda (1 + j\lambda T_s) \left(1 + j\lambda \frac{T}{2} \right)}. \quad (5.284)$$

Параметры этой передаточной функции:

$$K_{10}^0 = \frac{K_{10}}{\Delta_0}, \quad T_s = -\frac{T_1 + \frac{T}{2}}{\Delta_0}, \quad (5.285)$$

где

$$\Delta_0 = \sqrt{\frac{D_T}{T_0^2} + \frac{D_K}{K_{10}^2}}. \quad (5.286)$$

Здесь D_T и D_K — дисперсии периода дискретности и общего коэффициента усиления.

Таким образом, при нестабильности общего коэффициента усиления и периода дискретности удастся достичь не астатизма второго порядка, а только увеличения общего коэффициента усиления в $(\Delta_0)^{-1}$ раз. Это иллюстрирует рис. 5.49, б. При сохранении положения второй асимптоты л. а. х. ее первая асимптота, имеющая единичный наклон, будет проходить выше в соответствии с новым значением коэффициента усиления и новым значением первой большой постоянной времени (5.285). Чем выше стабильность K_1 и T , тем большего увеличения общего коэффициента усиления можно добиться введением дополнительного канала управления по скорости.

Аналогичным образом можно показать, что при введении двух членов формулы (5.276) в виде

$$C^*(j\lambda) = \frac{j\lambda}{K_1 \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)} + \frac{(j\lambda)^2 T_1}{K_1 \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)^2} \quad (5.287)$$

не удастся достичь астатизма второго или третьего порядков. Результирующая добротность по скорости может быть увеличена до величины $K_{10}\Delta_0^{-1}$, а эквивалентная постоянная $T_{\text{в}}$ — увеличена до значения $T_1\Delta_0^{-1}\Delta_1$, где

$$\Delta_1 = \sqrt{\frac{D_T}{T_0^2} + \frac{D_k}{K_{10}^2} + \frac{D_{T_1}}{T_{10}^2}}. \quad (5.288)$$

Здесь D_{T_1} — дисперсия разброса исходной постоянной времени T_1 при ее номинальном значении T_{10} . Уменьшение эквивалентной постоянной времени $T_{\text{в}}$ (рис. 5.49, б) позволяет сдвинуть вправо вторую асимптоту, имеющую двойной наклон, и тем улучшить точность системы при сохранении общего коэффициента усиления основного канала.

В системах с астатизмом второго порядка дополнительный канал должен иметь передаточную функцию

$$C(j\lambda) = \frac{(j\lambda)^2}{K_2 \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)^2}. \quad (5.289)$$

Это дает возможность увеличить результирующую добротность по ускорению до значения

$$K_{20}^0 = \frac{K_{20}}{\sqrt{\frac{D_T}{T_0^2} + \frac{D_k}{K_{20}^2}}}, \quad (5.290)$$

где K_{20} — номинальное значение общего коэффициента усиления, а D_k — его дисперсия, при сохранении неизменным общего коэффициента усиления основного канала K_{20} .

Повышение результирующих значений общего коэффициента усиления при астатизме любого порядка (в том числе и при нулевом порядке) без увеличения коэффициента усиления основного канала может дать весьма большой эффект и в значительной мере упростить построение всей системы. Так, например, если в системе с астатизмом первого порядка величина Δ_0 такова, что дополнительный

канал управления по скорости может быть реализован с точностью до 1%, то на основной канал будет ложиться задача отработки только 1% входной скорости, что позволяет снизить требования по его добротности в 100 раз.

Снижение требований к ЦВМ. Важнейшим следствием использования комбинированного управления является возможность снижения требований к ЦВМ в части ограничения периода дискретности. Это связано с понижением требований к каналу управления по отклонению при введении дополнительного канала с передаточной функцией $C(z)$.

Понижение требования к точности воспроизведения в канале управления по отклонению позволяют перейти к желаемым л. а. х. с меньшим значением частоты среза. Это дает возможность увеличить период дискретности T при сохранении необходимого запаса устойчивости.

Поясним сказанное на примере. Рассмотрим систему, в которой входное воздействие $g(t)$ вырабатывается ЦВМ, например, в результате прогноза какого-либо движения. Пусть система должна воспроизводить входное воздействие, имеющее максимальную скорость изменения $\dot{g}_{\max}$ и максимальное ускорение $\ddot{g}_{\max}$, с ошибкой не более $e_{\max}^0$. Рассмотрим, например, типовую передаточную функцию (5.181), относящуюся к непрерывной части системы:

$$W_0(p) = \frac{K_1}{p \prod_{i=1}^n (1 + T_i p)}.$$

Предположим для простоты, что постоянные времени T_i ($i=1, 2, \dots, n$) достаточно малы. Необходимое значение добротности по скорости имеет вид $K_1 = \dot{g}_{\max}/e_{\max}^0$. Учитывая формулы (5.182) и (5.183), можно сформулировать следующее требование к периоду дискретности:

$$\frac{T}{2} \leq \frac{1}{K_1} \frac{M}{M+1} = \frac{e_{\max}^0}{\dot{g}_{\max}} \frac{M}{M+1}. \quad (5.291)$$

Используем комбинированное управление за счет введения канала управления по скорости входного воздействия $\dot{g}(t)$. Пусть этот канал при учете всех его элементов, от ЦВМ до исполнительного устройства, имеет относительную стабильность воспроизведения скорости, равную δ .

Тогда система управления по отклонению должна будет отрабатывать максимальную входную скорость, не превышающую значение $\delta \dot{g}_{\max}$. В результате вместо формулы (5.291) для определения допустимого периода дискретности достаточно будет воспользоваться неравенством

$$\frac{T}{2} \leq \frac{1}{K'_1} \frac{M}{M+1} = \frac{e_{\max}^0}{\delta \dot{g}_{\max}} \frac{M}{M+1}. \quad (5.292)$$

Чем точнее будет работать канал воспроизведения скорости, тем ниже будут требования по быстродействию, которые накладываются на ЦВМ.

Безграничному увеличению допустимого значения периода дискретности при снижении относительной погрешности δ препятствует наличие ускорения входного воздействия. Сдвиг желаемой л. а. х. влево, который получается при снижении требуемого коэффициента усиления K'_1 , ограничивается нижней точкой запретной области (рис. 5.5). Этой точке соответствует частота $\lambda_{\text{ок}} = \sqrt{K_2}$, где K_2 — требуемая добротность по ускорению. Кроме того, необходимо иметь в виду формулу (5.98), которая также ограничивает рост периода дискретности при наличии ускорения на входе. Вследствие этого, начиная с некоторого значения периода дискретности ЦВМ, дальнейшее его увеличение может быть достигнуто при дополнительном введении канала управления по ускорению. Рассуждения здесь оказываются аналогичными, и увеличение периода дискретности будет ограничиваться точностью работы этого дополнительного канала. При повышении точности для дальнейшего увеличения периода дискретности, возможно, потребуется введение регулирования по третьей производной от задающего воздействия $g(t)$.

Цифровое дифференцирование непрерывных сигналов. При реализации комбинированного управления приходится для введения производных прибегать к дифференцированию входного сигнала. Выше были рассмотрены простейшие алгоритмы, не учитывающие факта наличия квантования по уровню, приводящего к появлению шумов квантования, искажающих результат дифференцирования. Ниже рассматриваются более сложные алгоритмы управления, которые могут в значительной степени уменьшить влияние шумов квантования.

Рассмотрение проводится для задающего воздействия $g(t)$, однако оно остается справедливым и для управляемой величины $y(t)$.

При реализации алгоритмов дифференцирования в непрерывных системах может быть решена задача оптимизации на основе использования фильтров Винера или Калмана. Так, например, в простейшем случае, когда на входе действует помеха типа непрерывного белого шума, может быть получена формула, аналогичная формуле (4.47). Если положить требуемый оператор обработки в виде $H_0(p) = p\tau$ или $H_0(j\omega) = j\omega\tau$, где τ — некоторая постоянная времени, то передаточная функция оптимального фильтра для получения первой производной

$$H(j\omega) = j\omega\tau \left(1 - \frac{\sqrt{N}}{[S_g(\omega) + N]^+} \right). \quad (5.293)$$

Здесь $S_g(\omega)$ — спектральная плотность входного сигнала, а N — уровень белого шума. Формулы для получения производных более высокого порядка будут иметь аналогичный вид.

В дискретных системах подобным же образом может быть найдена оптимальная передаточная функция для получения первой и более высоких обратных разностей, которые представляют собой аналоги производных непрерывного сигнала. Так, например, в условиях действия помехи типа белого шума, к которой сводится помеха от квантования по уровню, может быть получена формула, аналогичная формуле (4.109). Если исходить из оператора получения первой обратной разности $H_0(z) = (z - 1)z^{-1}$, или $H_0^*(j\lambda) = j\lambda T (1 + j0,5\lambda T)^{-1}$, то оптимальная передаточная функция будет

$$H^*(j\lambda) = \frac{j\lambda T}{1 + j\lambda \frac{T}{2}} \left[1 - \frac{D_v}{\Psi^*(j\lambda) \Psi^*(2/T)} \right]. \quad (5.294)$$

Здесь $\Psi^*(j\lambda) = [S_g^*(\lambda) + D_v]^+$, где $S_g^*(\lambda)$ — спектральная плотность входного сигнала, а D_v — дисперсия дискретного белого шума. Формулы для получения обратных разностей более высокого порядка будут иметь аналогичный вид.

Однако при дифференцировании на ЦВМ непрерывных сигналов, поступающих на ее вход, задача не решается так просто. Дело в том, что сам требуемый алгоритм

дискретной обработки $H_0(z)$ или $H_0^*(j\lambda)$ нуждается в определении, так как ставится задача отыскания производной входного сигнала, а не какой-либо разности образованной из него решетчатой функции.

Пусть, например, требуется получить на ЦВМ первую производную непрерывного входного сигнала в дискретной форме так, чтобы она наилучшим образом приближалась бы к решетчатой функции, образованной из первой производной входного сигнала, при учете помех, вносимых квантованием по уровню. Если исходить из желаемого непрерывного алгоритма обработки в виде $p\tau$ или $j\omega\tau$, то при учете зависимости $z = \exp(pT)$ желаемый дискретный алгоритм обработки будет иметь вид

$$H_0(z) = \tau T^{-1} \ln z$$

или

$$H_0^*(j\lambda) = \tau T^{-1} \ln \left[\left(1 + j\lambda \frac{T}{2} \right) \left(1 - j\lambda \frac{T}{2} \right)^{-1} \right].$$

Разлагая последнее выражение в ряд, имеем

$$H_0^*(j\lambda) = \frac{2\tau}{T} \left[j\lambda \frac{T}{2} + \frac{\left(j\lambda \frac{T}{2} \right)^3}{3} + \frac{\left(j\lambda \frac{T}{2} \right)^5}{5} + \dots \right].$$

Однако подобный алгоритм приводит к нереализуемым на ЦВМ программам. Поэтому при отыскании алгоритмов получения как первой, так и более высоких производных следует, прежде всего, исходить из условия получения реализуемых программ. Ниже излагается один из возможных способов.

Для аналитического представления непрерывного сигнала $g(t)$, заданного после прохождения входного преобразователя ЦВМ значениями в дискретные моменты $t = nT$, где n — целое число, а T — период работы ЦВМ, можно воспользоваться различными интерполяционными формулами [30]. Так, например, вторая интерполяционная формула Ньютона позволяет построить интерполяционный полином по значениям входного сигнала и его обратных разностей в дискретные моменты времени:

$$g(u) = g[n] + u \nabla g[n] + \frac{u(u+1)}{2!} \nabla^2 g[n] + \dots \\ \dots + \frac{u(u+1) \dots (u+m-1)}{m!} \nabla^m g[n]. \quad (5.295)$$

Здесь $u = (t - nT) T^{-1}$ — относительное время, отсчитываемое от точки $t = nT$ назад, т. е. $u \leq 0$, а m — число используемых обратных разностей от $\nabla g[n]$ до $\nabla^m g[n]$. Обратные разности определяются по формулам (2.22), в которые входят биномиальные коэффициенты и предыдущие значения входного сигнала в моменты времени nT , $(nT - T)$, ..., $(nT - mT)$:

$$\left. \begin{aligned} \nabla g[n] &= g[n] - g[n-1], \\ \nabla^2 g[n] &= g[n] - 2g[n-1] + g[n-2], \\ \nabla^3 g[n] &= g[n] - 3g[n-1] + 3g[n-2] - g[n-3], \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (5.296)$$

Количество членов в формуле (5.295) зависит от требуемой точности интерполяции и вида действительной входной функции $g(t)$, которая заменяется интерполяционным многочленом. Формула (5.295) может быть использована и для экстраполирования. При этом $t > nT$ и $u > 0$.

Для получения алгоритма дифференцирования запишем разложение исходной входной непрерывной функции $g(t)$ в ряд Маклорена относительно точки $t = nT$ (или $u = 0$):

$$g(u) = g(0) + \dot{g}(0) uT + \ddot{g}(0) \frac{u^2 T^2}{2!} + \ddot{\ddot{g}}(0) \frac{u^3 T^3}{3!} + \dots$$

Формулу (5.295) сгруппируем по возрастающим степеням аргумента:

$$\begin{aligned} g(u) &= g[n] + \left(\nabla g[n] + \frac{\nabla^2 g[n]}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nabla^3 g[n]}{3} + \dots + \frac{\nabla^m g[n]}{m} \right) u + \\ &\quad + \left(\nabla^2 g[n] + \nabla^3 g[n] + \frac{11}{12} \nabla^4 g[n] + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{i} \nabla^m g[n] \right) \frac{u^2}{2!} + \left(\nabla^3 g[n] + \frac{3}{2} \nabla^4 g[n] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{35}{4} \nabla^5 g[n] + \dots \right) \frac{u^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Сравнение двух последних формул, а также учет того обстоятельства, что $dg/du = T dg/dt$, дает формулы для определения на ЦВМ производных в дискретных

точках $t = nT$, т. е. при $u = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{g}_m[n] &= \left(\nabla g[n] + \frac{\nabla^2[n]}{2} + \frac{\nabla^3[n]}{3} + \dots + \frac{\nabla^m g[n]}{m} \right) T^{-1}, \\ \ddot{g}_m[n] &= \left(\nabla^2 g[n] + \nabla^3 g[n] + \frac{11}{12} \nabla^4 g[n] + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{m} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i} \nabla^m g[n] \right) T^{-2}, \\ \ddot{\ddot{g}}_m[n] &= \left(\nabla^3 g[n] + \frac{3}{2} \nabla^4 g[n] + \frac{35}{4} \nabla^5 g[n] + \dots \right) T^{-3}. \end{aligned} \right\} \quad (5.297)$$

Количество членов, входящих в круглые скобки (5.297), будет ограниченным, если входной сигнал может быть представлен конечным числом степенных членов. Однако ряд (5.295) может быть и бесконечным. Это наблюдается, в частности, для сигналов гармонического, в общем случае периодического, вида. Так, например, если $g = A \sin \beta t$, то будут существовать обратные разности всех порядков. В этом случае достижение требуемой точности при ограниченном числе учитываемых обратных разностей может быть получено за счет уменьшения периода повторения T , так как на малом отрезке времени аппроксимация входной величины $g(t)$ может быть сделана с необходимой точностью при меньшем числе членов разложения в степенной ряд.

При реализации алгоритмов вычисления производных на ЦВМ удобнее оперировать не с обратными разностями, а со значениями входной функции в дискретные моменты времени nT , $(n-1)T$, ..., $(n-m)T$, хранящимися в ячейках памяти. Это можно сделать по формулам перехода (5.296) или на основании использования интерполяционного полинома Лагранжа [30], который в данном случае приобретает вид

$$\begin{aligned} g(u) &= \frac{(u+1)(u+2) \dots (u+m)}{m!} g[n] + \\ &\quad + \frac{u(u+2)(u+3) \dots (u+m)}{-1(m-1)!} g[n-1] + \dots \\ &\quad \dots + \frac{u(u+1) \dots (u+k-1)(u+k)(u+k+1) \dots (u+m)}{(-1)^k k! (m-k)!} g[n-k] + \dots \\ &\quad \dots + \frac{u(u+1)(u+2) \dots (u+m-1)}{(-1)^m m!} g[n-m]. \end{aligned} \quad (5.298)$$

Аналогично проделанному выше, из (5.298) можно получить формулы для вычисления по значениям входной величины в дискретные моменты времени первой производной:

$$\dot{g}_m[n] = T^{-1} \sum_{i=0}^m (-1)^i \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} C_{kg}^i [n-i] = T^{-1} \sum_{i=0}^m a_i g[n-i], \quad (5.299)$$

$$a_i = (-1)^i \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} C_{ik}^k,$$

где C_k^i — биномиальные коэффициенты, причем $C_k^i = 0$, если $i > k$. Формула (5.299) удобна для реализации на ЦВМ.

Рассмотрим теперь более подробно методическую ошибку вычисления на ЦВМ первой производной. Пусть имеется случайный стационарный сигнал $g(t)$, для которого известна корреляционная функция $K(\tau) = M[x(t)x(t+\tau)]$. Будем также считать известными [104] корреляционную функцию его первой производной $M[\dot{g}(t)\dot{g}(t+\tau)] = -\ddot{K}(\tau)$ и взаимную корреляционную функцию сигнала и его первой производной $M[g(t)\dot{g}(t+\tau)] = M[g(t-\tau)\dot{g}(t)] = \dot{K}(\tau)$. Ошибка определения производной в дискретные моменты времени $t = nT$ может быть вычислена как разность между ее действительным значением $\dot{g}[n]$ машинным значением $\dot{g}_m[n]$, определяемым по формуле (5.299):

$$\delta\dot{g}[n] = \dot{g}[n] - T^{-1} \sum_{i=0}^m a_i g[n-i]. \quad (5.300)$$

Возведем левую и правую части (5.300) в квадрат и определим математическое ожидание, равное среднему квадрату ошибки:

$$\begin{aligned} \sigma_m^2 = M\{(\dot{g}[n] - \dot{g}_m[n])^2\} &= -\ddot{K}[0] - \frac{2}{T} \sum_{i=0}^m a_i \dot{K}[iT] + \\ &+ \frac{2}{T^2} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^m a_i a_{i+j} K[jT] + \frac{1}{T^2} \sum_{i=0}^m a_i^2 K[0]. \end{aligned} \quad (5.301)$$

Относительная среднеквадратичная ошибка может быть получена делением σ_m на среднеквадратичное значение скорости изменения входного сигнала $\sigma_{\dot{g}}$:

$$\Delta_m = \frac{\sigma_m}{\sigma_{\dot{g}}}. \quad (5.302)$$

Пусть, например, требуется оценить точность вычисления первой производной сигнала типа нерегулярной качки по первой разности ($m=1$). Корреляционные функции:

$$K(\tau) = D_g e^{-\mu|\tau|} \left(\cos \beta \tau + \frac{\mu}{\beta} \sin \beta |\tau| \right),$$

$$\dot{K}(\tau) = -\frac{D_g}{\beta} (\mu^2 + \beta^2) e^{-\mu|\tau|} \sin \beta |\tau|,$$

$$-\ddot{K}(\tau) = D_g (\mu^2 + \beta^2) e^{-\mu|\tau|} \left(\cos \beta \tau - \frac{\mu}{\beta} \sin \beta |\tau| \right),$$

где β — преобладающая частота, μ — коэффициент нерегулярности, D_g — дисперсия входного сигнала, $D_g (\mu^2 + \beta^2)$ — дисперсия скорости изменения входного сигнала. В соответствии с формулой (5.299) при $m=1$ получаем $a_0=1$ и $a_1=-1$. Далее находим

$$\dot{g}_m[n] = (a_0 g[n] + a_1 g[n-1]) T^{-1} = (g[n] - g[n-1]) T^{-1}.$$

Дисперсия ошибки из формулы (5.301)

$$\begin{aligned} \sigma_m^2 &= -\ddot{K}[0] - \frac{2}{T} \left(a_0 \dot{K}[0] + a_1 \dot{K}[T] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2a_0 a_1}{T^2} K[T] + \frac{a_0^2 + a_1^2}{T^2} K[0] \right) = \\ &= -\ddot{K}[0] - \frac{2}{T} (\dot{K}[0] - \dot{K}[T]) + \frac{2}{T^2} (K[0] - K[T]) = \\ &= D_g (\mu^2 + \beta^2) - \frac{2D_g}{T} \frac{\mu^2 + \beta^2}{\beta} e^{-\mu T} \sin \beta T + \\ &\quad + \frac{2D_g}{T^2} \left[1 - e^{-\mu T} \left(\cos \beta T + \frac{\mu}{\beta} \sin \beta T \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.303)$$

Полученная формула (5.303) является точной. При выполнении условий $\mu T \ll 1$ и $\beta T \ll 1$ ее можно упростить, разлагая трансцендентные функции в степенные ряды и ограничиваясь членами низших степеней.

Весьма важен случай дифференцирования входного сигнала гармонического вида. К этому случаю могут быть

сведены многие практические задачи. Кроме того, здесь получаются весьма простые и легко обозримые формулы. Пусть рассматривается сигнал вида $g = A \sin(\beta t + \psi)$, где амплитуда A и частота β заданы, а ψ представляет собой случайную фазу с равномерным законом распределения в интервале от 0 до 2π . Для этого сигнала имеем

$$\sigma_g^2 = D_g = 0,5A^2, \quad \sigma_g^3 = 0,5\beta^2 A^2,$$

$$K(\tau) = 0,5A^2 \cos \beta\tau, \quad \dot{K}(\tau) = -0,5\beta A^2 \sin \beta\tau,$$

$$\ddot{K}(\tau) = -0,5\beta^2 A^2 \cos \beta\tau.$$

Если $m = 1$, то средний квадрат ошибки дифференцирования можно получить из (5.303) при $\mu = 0$. В результате имеем

$$\sigma_M^2 = \frac{A^2}{2} \left[\beta^2 - \frac{2\beta}{T} \sin \beta T + \frac{2}{T^2} (1 - \cos \beta T) \right] \approx \frac{A^2 \beta^4 T^2}{8}.$$

Далее можно определить:

$$\sigma_M = \frac{\beta^2 AT}{2\sqrt{2}}, \quad \sigma_M^{\max} = \sqrt{2} \sigma_M = \frac{\beta^2 AT}{2}, \quad \Delta_M = \frac{\sigma_M}{\sigma_g} = \frac{\sigma_M^{\max}}{\dot{g}_{\max}} \approx \frac{\beta T}{2}.$$

Если $m = 2$, то соответствующие формулы имеют вид

$$\dot{g}_M[n] = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} g[n] - 2g[n-1] + \frac{1}{2} g[n-2] \right) T^{-1},$$

$$\begin{aligned} \sigma_M^2 &= -\ddot{K}[0] - \frac{1}{T} (3\dot{K}[0] - 4\dot{K}[T] + \dot{K}[2T]) + \\ &+ \frac{1}{T^2} \left(\frac{13}{2} K[0] - 8K[T] + \frac{3}{2} K[2T] \right) \approx \frac{\beta^6 A^2 T^4}{18}, \\ \sigma_M &\approx \frac{\beta^3 AT^2}{3\sqrt{2}}, \quad \sigma_M^{\max} \approx \frac{\beta^3 AT^2}{3}, \quad \Delta_M = \frac{\beta^2 T^2}{3}. \end{aligned}$$

Продолжая рассмотрение для $m > 2$, можно показать, что для произвольного числа учитываемых обратных разностей в формуле (5.297) методическая погрешность определяется приближенными выражениями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_M^2 &\approx \frac{A^2 \beta^{2(m+1)} T^{2m}}{2(m+1)^2}, \\ \Delta_M &= \frac{\sigma_M}{\sigma_g} = \frac{\sigma_M^{\max}}{\dot{g}_{\max}} \approx \frac{\beta^m T^m}{m+1}. \end{aligned} \right\} \quad (5.304)$$

Полученные формулы позволяют выбирать период дискретности T по заданному значению методической ошибки при известном значении числа учитываемых обратных разностей или определять необходимое значение m при заданном значении периода дискретности T . Так, например, если заданы величины Δ_m и m , то период дискретности должен удовлетворять условию

$$T \leq \frac{1}{\beta} \sqrt[m]{(m+1) \Delta_m}. \quad (5.305)$$

В таблице 5.10 в качестве иллюстрации приведены требуемые значения периода дискретности при дифференцировании регулярной качки с частотой $\beta = 1$ рад/с и требуемым значением $\Delta_m = 0,001 = 0,1\%$.

Т а б л и ц а 5.10

m	1	2	3	4
$T, \text{с}$	0,002	0,055	0,159	0,266

Приближенную оценку (5.304) можно распространить на случай сигнала произвольной формы. Пусть непрерывный входной сигнал имеет $(m+1)$ производных, а в алгоритме дифференцирования используются обратные разности $\nabla g[n], \dots, \nabla^m g[n]$. Оценим ошибку от отбрасывания не равной нулю обратной разности $\nabla^{m+1} g[n]$. Ошибка дифференцирования

$$\delta \dot{g}[n] \approx \frac{T^{-1}}{m+1} \nabla^{m+1} g[n].$$

В соответствии с формулами (5.295) и (5.296) можно записать

$$\nabla^{m+1} g[n] \approx g^{(m+1)}[n] T^{m+1}.$$

Тогда

$$\delta \dot{g}[n] \approx \frac{g^{(m+1)}[n]}{m+1} T^m.$$

Возведя в квадрат левую и правую части последнего выражения и переходя к математическому ожиданию, получаем средний квадрат ошибки дифференцирования:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m^2 &\approx \frac{\sigma_{m+1}^2 T^{2m}}{(m+1)^2}, \\ \Delta_m &= \frac{\sigma_m}{\sigma_{\dot{g}}} \approx \frac{\sigma_{m+1} T^m}{(m+1) \sigma_{\dot{g}}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.306)$$

В последних выражениях σ_{m+1} — среднеквадратичное значение $(m+1)$ -й производной входного сигнала, σ_g — среднеквадратичное значение его первой производной. Подстановка в (5.306) значений $\sigma_{m+1}^2 = 0,5\beta^{2(m+1)}A^2$ и $\sigma_g^2 = 0,5\beta^2A^2$, справедливых для гармонического входного сигнала, дает формулы (5.304).

Рассмотрим теперь влияние шумов квантования. Квантование по уровню вызывает появление дополнительной ошибки, носящей случайный характер. Статическая характеристика входного преобразователя ЦВМ изображена на рис. 2.3, а. По оси абсцисс отложена непрерывная входная величина g , а по оси ординат — ее цифровое представление g_0 . Величина δ_1 соответствует цене единицы младшего разряда.

В процессе квантования входная величина округляется до ближайшего целого значения выходной величины преобразователя. Максимальная ошибка округления при этом не может превосходить $0,5\delta_1$.

Обычно принято исходить из равновероятного закона распределения ошибки квантования (см. главу 3). Дисперсия ошибки квантования при этом составляет $D_k = \delta_1^2/12$. Кроме того, будем считать, что ошибка квантования может быть представлена в виде дискретного белого шума с корреляционной функцией вида $K_k[iT] = D_k\delta[iT]$, где $\delta[iT]$ — единичная импульсная решетчатая функция. Тогда для дискретных моментов времени $t = iT$, где i — целое число, случайные ошибки квантования можно считать независимыми, что позволяет определить дисперсию результирующей ошибки квантования при вычислении производной суммированием дисперсий ошибок квантования в дискретные моменты времени.

Из формул (5.294), (5.297) и (5.299) можно получить значение суммарной дисперсии ошибки округления на входе ЦВМ:

$$D_k = \frac{\delta_1^2}{12T^2} \sum_{i=0}^m a_i^2 = \frac{\delta_1^2}{12T^2} F_0(m). \quad (5.307)$$

В таблице 5.11 приведены значения функции $F_0(m)$ и среднеквадратичной шумовой ошибки, отнесенной к величине $\delta_1 T^{-1}$, при различном числе учитываемых обратных

разностей или, что все равно, числе используемых предыдущих тактов.

Таблица 5.11

m	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_0(m)$	2	6,5	14,7	31	68	160	396	1030
$\frac{\sigma_k T}{\delta_1}$	0,407	0,738	1,11	1,61	2,38	3,66	5,75	9,26

Так, например, если $T=0,002$ с, $m=1$ (см. таблицу 5.10) и $\delta_1=1$ угл. мин, то среднеквадратичное значение шумовой ошибки от квантования по уровню на основании таблицы 5.11 составит

$$\sigma_k = \frac{0,407\delta_1}{T} = \frac{0,407 \cdot 1}{0,002} = 203 \text{ угл. мин/с} = 3,38 \text{ град/с.}$$

При $m=1$ закон распределения соответствует закону Симпсона. При $m>1$ на основании центральной предельной теоремы закон распределения будет тем точнее приближаться к нормальному, чем больше величина m . При $m=1$ максимальное значение ошибки $\sigma_k^{\max} = \sigma_k \sqrt{1,5} = 1,22\sigma_k$. При $m \gg 1$ приближенно можно положить $\sigma_k^{\max} \approx 3\sigma_k$.

При вычислении производной по формуле (5.297) необходимо осуществить операцию умножения на T^{-1} . Эта операция заключается в масштабировании сигнала выходного преобразователя. Цена его единицы младшего разряда может быть принята равной $\delta_{11} = \delta_1 T^{-1}$. Тогда операции округления в выходном преобразователе не будут происходить и вся ошибка от квантования по уровню будет определяться формулой (5.307). Общее число отличных от нуля уровней выходного преобразователя должно быть не менее величины $\dot{g}_{\max} \delta_{11}^{-1} = \dot{g}_{\max} \delta_1^{-1} T$. Этому соответствует требуемое число разрядов выходного преобразователя $\alpha_1 \gg 3,3 \lg(1 + \dot{g}_{\max} \delta_1^{-1} T)$.

С целью уменьшения числа разрядов выходного преобразователя возможно укрупнение цены его младшего разряда за счет отбрасывания нескольких младших

разрядов в вычисленном коде первой производной. Если отбрасывается α младших разрядов, то в выходном преобразователе будет $\delta_{11} = 2^\alpha \delta_1 T^{-1}$. Однако это вносит ошибку округления на выходе ЦВМ. Ошибка округления не будет влиять на точность, если выполняется неравенство

$$\frac{\delta_{11}^2}{12} < \frac{\delta_1^2}{12T^2} F_0(m), \quad (5.308)$$

которое сводится к неравенству

$$\alpha < 1,65 \lg F_0(m). \quad (5.309)$$

При невыполнении неравенства (5.309) вопрос об ошибке квантования на выходе ЦВМ должен быть дополнительно исследован.

Рассмотрим теперь возможность оптимизации алгоритма вычисления при дифференцировании гармонического сигнала. Такая постановка задачи возможна вследствие того, что изменение периода дискретности и числа учитываемых обратных разностей по-разному отражается на методической и шумовой ошибках.

Для гармонического входного сигнала эта задача имеет простое аналитическое решение. Потребуем минимизации результирующей среднеквадратичной ошибки, квадрат которой при дифференцировании сигнала $g(t) = A \sin(\beta t + \psi)$ будет

$$D = \sigma^2 = \sigma_m^2 + \sigma_k^2 = \frac{A^2 \beta^2 (m+1) T^{2m}}{12(m+1)^2} + \frac{\delta_1^2}{12T^2} F_0(m). \quad (5.310)$$

Дифференцирование этого выражения по периоду дискретности и приравнивание производной нулю дает оптимальное значение периода дискретности:

$$T'_{\text{опт}} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{(m+1)^2 \delta_1^2}{6m A^2} F_0(m) \right]^{\frac{1}{2(m+1)}}. \quad (5.311)$$

Подстановка найденного значения в (5.310), деление на дисперсию входной скорости $0,5\beta^2 A^2$ и извлечение квадратного корня дает минимальное значение результирующей относительной среднеквадратичной ошибки, которое может быть получено при оптимальном выборе

периода дискретности:

$$\Delta_s = \left(\frac{\delta_1}{A}\right)^{\frac{m}{m+1}} \left[\frac{m+1}{m^{\frac{m}{\sqrt{m+1}}}} \frac{1}{6} F_0(m) \right]^{\frac{m}{2(m+1)}} = \left(\frac{\delta_1}{A}\right)^{\frac{m}{m+1}} F_1(m). \quad (5.312)$$

Задаваясь различными значениями m , можно при заданном значении величины A/δ_1 вычислить Δ_s по формуле (5.312) для каждого значения m и в результате определить минимальное значение $\Delta_s^{\min}$ при вариации m . Решение этой задачи не представляет особого труда. Для облегчения расчетов в таблице 5.12 приведены значения функции $F_1(m)$.

Таблица 5.12

m	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1(m)$	0,64	0,90	1,21	1,87	2,46	3,72	5,59	9,14
$F_2(m)$	0,408	0,836	1,32	1,98	2,96	4,62	7,14	12
$F_3(m)$	1,31	2,02	2,88	4,07	5,78	8,70	13,1	19,4
$F_4(m)$	1,73	2,86	4,10	5,75	8,18	12,5	18,9	30,5

В практических расчетах больше интереса представляет решение обратной задачи — нахождение требуемого числа разрядов входного преобразователя или, что все равно, отношения A/δ_1 , при которых обеспечивается получение заданного значения относительной среднеквадратичной погрешности Δ . Если считать, что период опроса выбран оптимальным образом, то, положив $\Delta = \Delta_s$, из (5.292) находим

$$\delta_1 \leq A \Delta^{\frac{m+1}{m}} \left[\frac{m+1}{m^{\frac{m}{\sqrt{m+1}}}} \frac{1}{6} F_0(m) \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{A \Delta^{\frac{m+1}{m}}}{F_2(m)}. \quad (5.313)$$

Значения $F_2(m)$ приведены в таблице 5.12.

Возможна другая постановка вопроса оптимизации, если в качестве критерия оптимальности принять минимум максимальной ошибки вычисления производной. Тогда вместо (5.310) следует рассмотреть формулу для

максимальной ошибки

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{м}}^{\max} + \sigma_{\text{к}}^{\max} = \frac{A\beta^{m+1}T^m}{m+1} + \frac{3\delta_1}{T\sqrt{12}}\sqrt{F_0(m)}. \quad (5.314)$$

В выражении (5.314) принято, что максимальные ошибки $\sigma_{\text{м}}^{\max}$ и $\sigma_{\text{к}}^{\max}$ складываются, что не противоречит физике явления, так как частоты изменения методической и шумовой ошибок отличаются обычно на несколько порядков. Дифференцируя (5.314) по периоду дискретности и приравнивая производную нулю, можно получить оптимальное значение для этого случая:

$$T''_{\text{опт}} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{(m+1)3\delta_1}{mA\sqrt{12}}\sqrt{F_0(m)} \right]^{\frac{1}{m+1}}. \quad (5.315)$$

Далее, подставляя значение $T''_{\text{опт}}$ в (5.314) и деля на максимальное значение $\dot{g}_{\max} = \beta A$, получим минимальное значение максимальной относительной погрешности:

$$\Delta_{\text{э max}} = \left(\frac{\delta_1}{A}\right)^{\frac{m}{m+1}} \left[\left(\frac{m}{m+1}\right)^2 0,75F_0(m) \right]^{\frac{m}{2(m+1)}} = \left(\frac{\delta_1}{A}\right)^{\frac{m}{m+1}} F_3(m). \quad (5.316)$$

Для решения обратной задачи — выбора числа разрядов входного преобразователя при заданном значении $\Delta_{\max}$ — формулу (5.316) можно привести к виду

$$\delta_1 \leq A\Delta_{\max}^{\frac{m+1}{m}} \left[\left(\frac{m+1}{m}\right) 0,75F_0(m) \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{A\Delta_{\max}^{\frac{m+1}{m}}}{F_4(m)}. \quad (5.317)$$

Для удобства решения задачи минимизации $\Delta_{\text{э max}}$ или δ_1 при вариациях величины m функции $F_3(m)$ и $F_4(m)$ даны в таблице 5.12.

Пример 5.3. Определим потенциальную точность вычисления первой производной на ЦВМ, характеризующую максимальной ошибкой сигнала вида $g = A \sin(\beta t + \psi)$, требуемый алгоритм и период дискретности, если $A = 15^\circ$, $\beta = 1 \text{ с}^{-1}$, а $\delta_1 = 1$ угл. мин. В соответствии с формулой (5.317) минимальное амплитудное значение ошибки

$$\Delta_{\text{э max}} = \left(\frac{1}{15 \cdot 60}\right)^{\frac{m}{m+1}} F_3(m) = \left(\frac{1}{900}\right)^{\frac{m}{m+1}} F_3(m).$$

Задаваясь значениями $m=1, 2, \dots$ и используя таблицу 5.12, вычислим $\Delta_{э \max}$. Результаты представлены в таблице 5.13.

Таблица 5.13

m	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Delta_{э \max}, \%$	4,35	2,22	1,74	1,77	2,01	2,56	3,44	4,55

Из таблицы следует, что наивысшая точность достигнута при $m=3$. Тогда $\Delta_{э \max} = 1,74\%$. При этом в соответствии с формулой (5.315) требуемый период дискретности

$$T''_{\text{опт}} = \left[\frac{(3+1) \cdot 3 \cdot 1}{3 \cdot 15 \cdot 60} \sqrt{\frac{14,7}{12}} \right]^{\frac{1}{4}} = 0,15 \text{ с.}$$

Цена единицы младшего разряда выходного преобразователя составит при этом $\delta_{11} = \delta_1 T^{-1} = 1 \cdot 6,7 = 6,7$ угл. мин/с = 400 угл. сек/с. Так как $\dot{g}_{\max} = \beta A = 15^\circ/\text{с} = 54\,000$ угл. сек/с, то число разрядов выходного преобразователя должно быть при этом не меньше величины $\alpha_1 \geq 3,3 \lg(1 + 54\,000/400) = 3,3 \lg 136 = 7$.

С целью уменьшения числа разрядов в соответствии с формулой (5.309) можно определить $\alpha < 1,65 \lg 14,72 = 1,93$. Приняв $\alpha = 1$, получим цену младшего разряда выходного преобразователя $\delta_{11} = 2 \cdot 6,7 = 13,4$ угл. мин/с, а общее число разрядов при этом должно быть не менее величины $\alpha_1 \geq 7 - 1 = 6$.

Пример 5.4. Определим требования к входному преобразователю для обеспечения максимальной ошибки дифференцирования, не превышающей $0,1\%$, для условий предыдущего примера. В соответствии с формулой (5.317) имеем

$$\delta_1 \leq \frac{A \Delta^{\frac{m+1}{m}}}{F_4(m)} = \frac{900 \cdot 0,001^{\frac{m+1}{m}}}{F_4(m)}.$$

Задаваясь различными значениями m и используя таблицу 5.12, вычисляем требуемые значения δ_1 для различных m . Результаты расчета сведены в таблицу 5.14.

Таблица 5.14

m	1	2	3	4	5	6
δ_1 , угл. сек	0,03	0,60	1,32	2,98	1,72	0,13

Из таблицы следует, что в оптимальном случае при $m=4$ цена единицы младшего разряда входного преобразователя должна составлять 2,98 угл. сек.

Перейдем теперь к вопросу получения на ЦВМ второй производной входного сигнала. В соответствии с изложенным выше алгоритм дифференцирования, полученный на использовании второй интерполяционной формулы Ньютона, имеет вид

$$\ddot{g}_m[n] = \left(\nabla^2 g[n] + \nabla^3 g[n] + \frac{11}{12} \nabla^4[n] + \dots + \frac{2}{m} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i} \nabla^m g[n] \right) T^{-2}, \quad (5.318)$$

где $\nabla^2 g[n], \dots, \nabla^m g[n]$ — обратные разности от 2-го до m -го порядков, T — период дискретности ЦВМ. Переход к дискретным значениям входной величины в моменты времени $nT, (n-1)T, \dots, (n-m)T$ может быть сделан или по формулам перехода (5.294), или на основе использования интерполяционной формулы Лагранжа [30]:

$$\begin{aligned} \ddot{g}_m[n] &= T^{-2} \sum_{j=0}^m (-1)^j \sum_{k=2}^m \frac{2}{k} C_k^j \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} g[n-j] = \\ &= T^{-2} \sum_{j=0}^m b_j g[n-j], \end{aligned} \quad (5.319)$$

$$b_j = (-1)^j \sum_{k=2}^m \frac{2}{k} C_k^j \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i},$$

где C_k^j — биномиальные коэффициенты, причем $C_k^j = 0$, если $j > k$. Формула (5.319) удобна для реализации алгоритма дифференцирования на ЦВМ.

Рассмотрим методическую ошибку дифференцирования. Как и в случае получения производной, если входной сигнал имеет конечное число производных l , то максимальный порядок обратной разности в (5.318) должен быть равен $m=l$. Тогда методическая ошибка, связанная с дискретизацией во времени, будет равна нулю. При $m < l$ появляется методическая ошибка. При дифференцировании, например, сигналов морской качки $l \rightarrow \infty$. Поэтому методическая ошибка дифференцирования здесь будет существовать всегда. Представим входной сигнал $g(t)$ в виде случайного стационарного процесса, для которого известны корреляционные функции

$$\begin{aligned} M[g(t)g(t+\tau)] &= K(\tau), \\ M[g(t)\ddot{g}(t+\tau)] &= -K_1(\tau) \end{aligned}$$

и

$$M[\ddot{g}(t)\ddot{g}(t+\tau)] = K_2(\tau).$$

Ошибка определения второй производной может быть найдена как разность между ее действительным значением $\ddot{g}[n]$ и машинным $\ddot{g}_m[n]$, вычисляемым по формуле (5.318):

$$\delta\ddot{g}[n] = \ddot{g}[n] - \sum_{i=0}^m b_i g[n-i] T^{-2}. \quad (5.320)$$

Возведем левую и правую части (5.320) в квадрат и определим математическое ожидание, равное дисперсии ошибки:

$$\begin{aligned} \sigma_m^2 &= M\{(\ddot{g}[n] - \ddot{g}_m[n])^2\} = K_2[0] + 2T^{-2} \sum_{i=0}^m b_i K_1[iT] + \\ &+ 2T^{-4} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^m b_i b_{i+j} K[jT] + T^{-4} \sum_{i=0}^m b_i^2 K[0]. \end{aligned} \quad (5.321)$$

Относительная ошибка может быть найдена делением среднеквадратичного значения σ_m на среднеквадратичное значение второй производной входной величины:

$$\Delta_m = \frac{\sigma_m}{\sigma_{\ddot{g}}} = \frac{\sigma_m}{\sqrt{K_2[0]}}. \quad (5.322)$$

Рассмотрим, например, дифференцирование гармонического сигнала $g = A \sin(\beta t + \psi)$ со случайной начальной фазой с использованием только второй разности ($m=2$). Для этого сигнала $K(\tau) = 0,5A^2 \cos \beta\tau$, $K_1(\tau) = 0,5A^2\beta^2 \times \times \cos \beta\tau$ и $K_2(\tau) = 0,5A^2\beta^4 \cos \beta\tau$. В соответствии с формулами (5.318) и (5.319) алгоритм дифференцирования может быть записан для этого случая в виде

$$\ddot{g}_m[n] = \nabla^2 g[n] T^{-2} = (g[n] - 2g[n-1] + g[n-2]) T^{-2}.$$

Таким образом, здесь $b_0=1$, $b_1=-2$ и $b_2=1$. Подставляя известные значения в (5.300), имеем

$$\begin{aligned} \sigma_m^2 = & \frac{A^2\beta^4}{2} + \frac{A^2\beta^2}{T^2} (1 - 2\cos\beta T + \cos 2\beta T) + \\ & + \frac{A^2}{T^4} (-4\cos\beta T + \cos 2\beta T) + \frac{3A^2}{T^4}. \end{aligned} \quad (5.323)$$

Полученная формула (5.323) является точной. При условии, что $\beta T \ll 1$, ее можно значительно упростить, разлагая косинус в степенной ряд и ограничиваясь членами низших степеней. В результате имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m^2 &\approx \frac{A^2\beta^6 T^2}{2}, & \sigma_m &\approx \frac{A\beta^3 T}{\sqrt{2}}, \\ \sigma_m^{\max} &\approx A\beta^3 T, & \Delta_m = \frac{\sigma_m}{\sigma_{\ddot{g}}} = \frac{\sigma_m^{\max}}{\ddot{g}_{\max}} &\approx \beta T. \end{aligned} \right\} \quad (5.324)$$

Аналогичным образом для любого значения m можно получить приближенную формулу для относительной ошибки дифференцирования:

$$\Delta_m = \frac{\sigma_m}{\sigma_{\ddot{g}}} = \frac{\sigma_m^{\max}}{\ddot{g}_{\max}} \approx \frac{2}{m+1} \sum_{i=1}^m i^{-1} \beta^{m-1} T^{m-1} = \beta^{m-1} T^{m-1} q_1(m). \quad (5.325)$$

В формулу (5.325) введена функция $q_1(m)$, значения которой даны в таблице 5.15. Полученная формула позволяет выбрать период дискретности по заданному значению методической ошибки при известном числе учиты-

Таблица 5.15

m	$q_1 (m)$	$q_2 (m)$	$G_1 (m)$	$G_2 (m)$	$G_3 (m)$	$G_4 (m)$	$G_5 (m)$	$G_6 (m)$
2	1,0	6,0	1,12	1,62	1,32	2,31	1,74	5,3
3	0,917	46,0	1,32	1,59	2,24	5,02	4,90	24,1
4	0,834	197	1,41	1,58	3,63	8,55	8,04	31,6
5	0,761	692	1,47	1,57	6,05	14,8	13,9	51,3
6	0,700	$2,88 \cdot 10^3$	1,51	1,57	10,2	25,0	25,7	91,2
7	0,678	$7,35 \cdot 10^3$	1,54	1,58	16,8	41,7	40,1	132
8	0,630	$2,47 \cdot 10^4$	1,56	1,59	30,1	77,6	68,1	219
9	0,586	$8,01 \cdot 10^4$	1,58	1,60	50,5	133	121	398
10	0,550	$2,46 \cdot 10^5$	1,59	1,61	83,2	219	191	607

ваемых обратных разностей. Если задана величина Δ_m , то необходимо выполнить условие

$$T \leq \frac{1}{\beta} \left[\frac{\Delta_m}{\frac{2}{m+1} \sum_{i=1}^m i^{-1}} \right]^{\frac{1}{m-1}} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\Delta_m}{q_1(m)} \right]^{\frac{1}{m-1}}. \quad (5.326)$$

Для иллюстрации в таблице 5.16 приведены требуемые значения периода дискретности при дифференцировании гармонического сигнала с частотой $\beta = 1 \text{ с}^{-1}$ и $\Delta_m = 0,001 = 0,1 \%$.

Таблица 5.16

Приближенную оценку точности (5.325) можно распространить на случайный сигнал произвольного вида, имеющий $m+1$ конечных производных. Произведя действия, аналогичные изложенным выше, можно получить среднеквадратичную ошибку дифференцирования

m	2	3	4	5
$T, \text{ с}$	0,001	0,039	0,106	0,190

$$\sigma_m \approx \sigma_{m+1} T^{m-1} \frac{2}{m+1} \sum_{i=1}^m i^{-1} = \sigma_{m+1} T^{m-1} q_1(m) \quad (5.327)$$

и относительную среднеквадратичную ошибку дифференцирования

$$\Delta_m = \frac{\sigma_m}{\sigma_2} \approx \frac{\sigma_{m+1} T^{m-1}}{\sigma_2} \frac{2}{m+1} \sum_{i=1}^m i^{-1} = \frac{\sigma_{m+1} T^{m-1} g_1(m)}{\sigma_2}, \quad (5.328)$$

где σ_{m+1} — среднеквадратичное значение $(m+1)$ -й производной входного сигнала, $\sigma_2 = \sigma_{\ddot{g}}$. Из (5.328) может быть легко получена формула (5.325), если сделать справедливую для гармонического сигнала подстановку $\sigma_{m+1} = \beta^{m-1} \sigma_{\ddot{g}} = \beta^{m-1} \sigma_2$.

Примем предположение о независимости ошибок квантования, рассматриваемых в различные дискретные моменты времени $nT, (n-1)T, \dots, (n-m)T$. Тогда из формул (5.318) и (5.319) может быть получено выражение для суммарной дисперсии шумовой ошибки:

$$\sigma_k^2 = D_k = \frac{\delta_1^2}{12T_4} \sum_{j=0}^m b_j^2 = \frac{\delta_1^2}{12T^4} q_2(m), \quad (5.329)$$

где δ_1 — цена младшего разряда входного преобразователя. В формуле (5.329) введена функция $q_2(m)$, значения которой даны в таблице 5.15. В таблице 5.17 для

Таблица 5.17

m	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{\sigma_k T^2}{\delta_1}$	0,71	1,96	4,05	7,58	15,5	24,7	45,2

иллюстрации приведены значения среднеквадратичной ошибки от квантования по уровню σ_k , отнесенные к величине $\delta_1 T^{-2}$, при различных значениях числа учитываемых обратных разностей m . Так, если $T = 0,001$ с, $m = 2$ (см. таблицу 5.16) и $\delta_1 = 1$ угл. мин, то среднеквадратичное значение шумовой ошибки на основании таблицы 5.17 составит

$$\sigma_k = \frac{0,71 \delta_1}{T^2} = \frac{0,71 \cdot 1}{0,001^2} = 0,71 \cdot 10^6 \text{ угл. мин/с}^2.$$

Этот пример иллюстрирует сложность проблемы вычисления на ЦВМ второй производной входного сигнала, определяемую возрастанием уровня шумовых помех. Так как даже в простейшем случае, когда $m = 2$, закон распределения шумовой ошибки соответствует композиции трех случайных величин с равновероятным законом рас-

пределения, то при использовании более сложных алгоритмов ($m > 2$) можно приближенно считать, что для шумовой ошибки дифференцирования действует нормальное распределение. На выходе ЦВМ цена единицы младшего преобразователя составит

$$\delta_{12} = 2^\alpha \delta_1 T^{-2}, \quad (5.330)$$

где α — число младших разрядов, которые отбрасываются в полученном коде второй производной. Если $\alpha = 0$, то округления на выходе не производится и цена единицы младшего разряда $\delta_{12} = \delta_1 T^{-2}$. Если $\alpha > 0$, то происходит округление. Дисперсия дополнительной ошибки, которая вносится при этом, будет

$$\sigma_d^2 = \frac{\delta_{12}^2}{12} = 2^{2\alpha} \frac{\delta_1^2}{12T^4}. \quad (5.331)$$

Эта ошибка может не учитываться, если выполняется неравенство $\sigma_d < \sigma_k$. Последнее сводится к неравенствам

$$\left. \begin{aligned} 2^\alpha &< \sqrt{q_2(m)}, \\ \alpha &< 3,3 \lg \sqrt{q_2(m)} = 1,65 \lg q_2(m). \end{aligned} \right\} \quad (5.332)$$

Выражение (5.332) позволяет выбрать допустимое закругление выходного преобразователя, что снижает его требуемое общее число разрядов.

Как и в случае вычисления первой производной входного сигнала, поставим задачу минимизации среднего квадрата суммарной ошибки

$$\sigma^2 = \frac{A^2 \beta^{2m+2} T^{2m-2}}{2} q_1^2(m) + \frac{\delta_1^2}{12T^4} q_2(m) \quad (5.333)$$

и минимизации амплитуды ошибки

$$\sigma_{\max} = A \beta^{m+1} T^{m-1} q_1(m) + \frac{3\delta_1}{T^2 \sqrt{12}} \sqrt{q_2(m)} \quad (5.334)$$

при дифференцировании гармонического сигнала $g = A \sin(\beta t + \psi)$ со случайной начальной фазой. Дифференцирование (5.333) и (5.334) по периоду дискретности дает условие получения минимальной среднеквадратичной ошибки

$$T_{\text{опт}} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\delta_1^2}{A^2 3} \frac{1}{(m-1)} \frac{q_2(m)}{q_1^2(m)} \right]^{\frac{1}{2m+2}} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\delta_1}{A} \right)^{\frac{1}{m+1}} G_1(m) \quad (5.335)$$

и условие получения минимума амплитуды ошибки

$$T''_{\text{опт}} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\delta_1}{A} \frac{\sqrt{3}}{m-1} \frac{\sqrt{q_2(m)}}{q_1(m)} \right]^{\frac{1}{m+1}} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\delta_1}{A} \right)^{\frac{1}{m+1}} G_2(m). \quad (5.336)$$

Подстановка $T'_{\text{опт}}$ в формулу (5.333) дает после деления на средний квадрат второй производной $0,5A^2\beta^4$ и извлечения квадратного корня минимальное значение относительной среднеквадратичной ошибки

$$\Delta_{\min} = \left(\frac{\delta_1}{A} \right)^{\frac{m-1}{m+1}} q_1^{\frac{2}{m+1}} \left[\frac{q_2}{3(m-1)} \right]^{\frac{m-1}{2(m+1)}} = \left(\frac{\delta_1}{A} \right)^{\frac{m-1}{m+1}} G_3(m). \quad (5.337)$$

Подстановка $T''_{\text{опт}}$ в формулу (5.334) дает после деления на максимальное значение искомой второй производной $A\beta^2$ минимальное значение относительной амплитуды ошибки

$$\Delta_{\max}^{\min} = \left(\frac{\delta_1}{A} \right)^{\frac{m-1}{m+1}} (3q_2)^{\frac{m-1}{2(m+1)}} \frac{m+1}{2(m-1)^{\frac{m-1}{m+1}}} = \left(\frac{\delta_1}{A} \right)^{\frac{m-1}{m+1}} G_5(m). \quad (5.338)$$

Для решения обратных задач — определения требований к входному преобразователю при заданных значениях Δ или $\Delta_{\max}$ — формулы (5.337) и (5.338) могут быть решены относительно δ_1 . В результате имеем условия получения для оптимального случая требуемой точности дифференцирования по относительной среднеквадратичной ошибке

$$\delta_1 \leq \frac{A\Delta^{\frac{m+1}{m-1}}}{[G_3(m)]^{\frac{m+1}{m-1}}} = \frac{A\Delta^{\frac{m+1}{m-1}}}{G_4(m)}. \quad (5.339)$$

и по относительной максимальной ошибке

$$\delta_1 \leq \frac{A\Delta_{\max}^{\frac{m+1}{m-1}}}{[G_5(m)]^{\frac{m+1}{m-1}}} = \frac{A\Delta_{\max}^{\frac{m+1}{m-1}}}{G_6(m)}. \quad (5.340)$$

Введенные выше функции от числа m приведены в таблице 5.15.

Пример 5.5. Определим потенциальную точность, оцениваемую по максимальной ошибке вычисления второй производной угла качки при $A=15^\circ$, $\beta=1$ рад/с и цене младшего разряда входного преобразователя $\delta_1 = 1$ угл. мин.

В соответствии с формулой (5.338) и таблицей 5.15 вычисляем минимальную относительную амплитуду ошибки для различных значений m . Результаты вычислений представлены в таблице 5.18.

Таблица 5.18

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta_{\max}^{\min}, \%$	18,1	16,6	14,4	15,1	20,3	24,2	34,1	53,4	72,6

Минимальное значение относительной амплитуды ошибки составляет 14,4% при $m=4$. Требуемый оптимальный период дискретности ЦВМ, вычисленный по формуле (5.336), составляет $T_{\text{опт}}=0,407$ с. Напомним, что при расчете потенциальной точности определения первой производной этого же сигнала было получено значение относительной амплитуды ошибки 1,74% при более простом алгоритме ($m=3$). Цена единицы младшего разряда выходного преобразователя составляет здесь при $\alpha=0$, т. е. при отсутствии округления, $\delta_{12}=\delta_1 T^{-2}=1 \cdot 0,407^{-2}=6,05$ угл. мин/с², а потребное число разрядов

$$\alpha_2 \geq 3,3 \lg \left(1 + \frac{\beta^2 A}{\delta_{12}} \right) = 3,3 \lg \left(1 + \frac{1 \cdot 900}{6,05} \right) = 7,2.$$

Пример 5.6. Определим требования к входному преобразователю ЦВМ при необходимости обеспечить вычисление второй производной рассмотренного в примере 5.5 сигнала с ошибкой $\Delta_{\max} \leq 0,01 = 1\%$.

В соответствии с формулой (5.340) и таблицей 5.17 рассчитываем требуемое значение δ_1 при различных числах m . Результаты расчета сведены в таблицу 5.19.

Таблица 5.19

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
δ_1 , угл. сек	0,01	0,22	0,79	1,05	0,94	0,88	0,78	0,43	0,32

Из таблицы следует, что оптимальное значение $m=5$. В этом случае требуемая цена единицы младшего разряда достигает максимального значения $\delta_1=1,05$ угл. с. В оптимальном случае период дискретности в соответствии с формулой (5.336) составит $T''_{\text{опт}}=0,24$ с.

Из рассмотренного видно, что получение на ЦВМ второй производной приводит к более сложным алгоритмам и утяжеляет требования к входным преобразователям по сравнению со случаем получения первой производной.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ В ЦАС, ВЫЗВАННЫЕ КВАНТОВАНИЕМ ПО УРОВНЮ

§ 6.1. Приближенный расчет симметричных периодических режимов при учете одного квантующего элемента

В цифровых автоматических системах входные и выходные преобразователи имеют нелинейную характеристику вида, изображенного на рис. 2.3. Поэтому в общем случае расчет периодических режимов должен предусматривать учет двух нелинейностей, разделенных фильтрами. Структурная схема системы изображена на рис. 6.1. Она

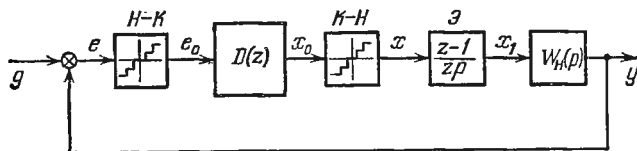


Рис. 6.1. Схема замкнутой ЦАС.

содержит объединенный входной преобразователь $H-K$ и выходной преобразователь $K-H$. Непрерывная часть системы определяется передаточной функцией $W_n(p)$, а экстраполятор $\mathcal{E}$ имеет нулевой порядок. Передаточные функции фильтров, разделяющих нелинейные звенья, равны $D(z)$ и $W_0(z)$.

Однако возможны случаи, когда при расчете должен учитываться один нелинейный элемент, например входной преобразователь. Первый случай возникает при равенстве передаточной функции ЦВМ единице, т. е. при $D(z) = 1$. Тогда нелинейные характеристики входного и выходного преобразователей могут быть объединены в одну нелинейную характеристику. Это показано на рис. 2.3, е.

Второй случай соответствует реализации в ЦВМ корректирующих программ

$$D(z) = \frac{X_0(z)}{E_0(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}, \quad (6.1)$$

которые характеризуются использованием коэффициентов $b_0, \dots, b_m$ и $a_1, \dots, a_m$, представляющих собой целые числа. Тогда никакого округления в выходном преобразователе происходить не будет и квантующий эффект по уровню будет иметь только входной преобразователь.

Ограничиваясь пока наличием в ЦАС одного нелинейного элемента (например, входного преобразователя), рассмотрим условия существования в них периодических режимов при $g = \text{const}$ на основе метода гармонической

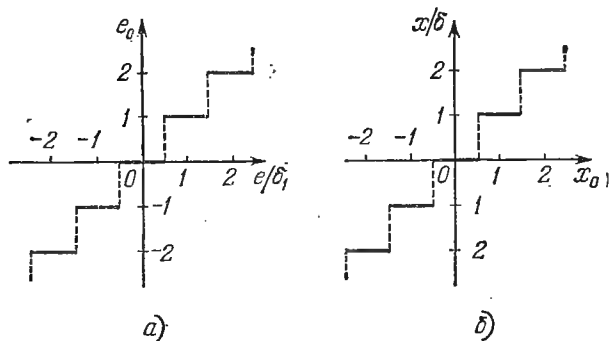


Рис. 6.2. Нормированная характеристика квантующего элемента при согласованном положении.

линеаризации. Согласно методу гармонической линеаризации приближенное уравнение периодического режима можно представить в виде

$$1 + q^* W = 0. \quad (6.2)$$

Здесь $W = DW_0$, а q^* — коэффициент гармонической линеаризации входного или выходного преобразователя цифровой вычислительной машины (рис. 6.2) по первой гармонике при учете квантования по времени. Коэффициент q^* зависит не только от амплитуды на входе нелинейного элемента a_1 , но и от фазы входного воздействия φ_1 и частоты воздействия $\bar{\omega}_1 = \omega T = \pi N^{-1}$, где N — относительный полупериод. Следовательно, $q^* = q^*(a_1, \varphi_1, N)$. Величина W является функцией частоты воздействия. Эту величину можно также представить как функцию относительного полупериода входного воздействия, т. е. $W = W(j\pi N^{-1})$.

Уравнение периодического режима (6.2) может быть записано в следующем виде:

$$1 + q^*(a_1, \varphi_1, N) W(j\pi N^{-1}) = 0 \quad (6.3)$$

или

$$W(j\pi N^{-1}) = -\frac{1}{q^*(a_1, \varphi_1, N)} = -Z^*(a_1, \varphi_1, N). \quad (6.4)$$

Частота периодического режима $\Omega = \pi N^{-1}$ находится в целочисленном соотношении с частотой выдачи данных ЦВМ, равной $2\pi T^{-1}$. Это позволяет заранее знать все возможные частоты периодических режимов.

Обычный способ расчета периодических режимов заключается в совместном рассмотрении годографов комплексных величин W и $-Z^*$. Точка пересечения для заданного значения N определяет амплитуду и фазу периодического решения. Это показано на рис. 6.3. Возможно использование и других методов расчета периодических режимов, например по кривой Михайлова.

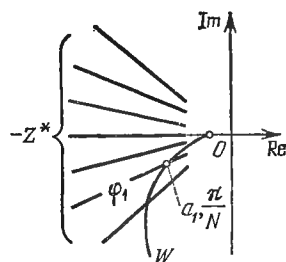


Рис. 6.3. К определению периодических режимов.

Вместо частотной передаточной функции $W(j\omega)$ при расчете периодических режимов может использоваться передаточная функция по псевдо частоте $W^*(j\lambda)$. Во многих случаях это оказывается более удобным. Тогда вместо (6.3) и (6.4) будем иметь

$$1 + q^*(a_1, \varphi_1, N) W^*(j\lambda) = 0 \quad (6.5)$$

или

$$W^*(j\lambda) = -\frac{1}{q^*(a_1, \varphi_1, N)} = -Z^*(a_1, \varphi_1, N). \quad (6.6)$$

Псевдо частота λ связана с круговой частотой ω_1 соотношением

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2N}. \quad (6.7)$$

При $N=1$ псевдо частота $\lambda \rightarrow \infty$, при $N=2$, соответственно, $\lambda = 2T^{-1}$, при $N \geq 3$ приближенно можно положить, что $\lambda \approx \omega$.

В соответствии с известной методикой определения периодических режимов [142] необходимо найти коэффициент гармонической линеаризации для нелинейной зависимости $e_0[n] = f(e[n])$, изображенной на рис. 6.2, а. В этом случае входной и выходной сигналы представляются в виде

$$e[n] = \frac{1}{2} \sum_{k=-l}^l \dot{a}_k \exp\left(j \frac{k\pi}{N} n\right), \quad (6.8)$$

$$e_0[n] = \frac{1}{2} \sum_{k=-l}^l \dot{b}_k \exp\left(j \frac{k\pi}{N} n\right), \quad (6.9)$$

где $\dot{a}_k$ и $\dot{b}_k$ — комплексные амплитуды, $l = N$, если N нечетно, и $l = N - 1$, если N четно. Комплексные амплитуды для входного сигнала определяются выражением

$$\dot{a}_k = a_k e^{j\varphi_k} = \frac{2}{N} \sum_{v=0}^{N-1} e[n] \exp\left(-j \frac{k\pi}{N} v\right). \quad (6.10)$$

Комплексные амплитуды для выходного сигнала в случае симметричной нелинейной характеристики определяются выражением

$$\dot{b}_k = b_k e^{j\psi_k} = \frac{2}{N} \sum_{v=0}^{N-1} f(e[n]) \exp\left(-j \frac{k\pi}{N} v\right). \quad (6.11)$$

Если N нечетно, то при $k = N$

$$\dot{b}_k = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} f(e[n]) \exp(-j\pi v). \quad (6.12)$$

Как следует из метода гармонической линеаризации, можно ограничиться в (6.9) учетом лишь первой гармоники, т. е. использовать гипотезу фильтра. Коэффициент гармонической линеаризации для первой гармоники

$$q^*(a_1, \varphi_1, N) = \frac{b_1}{a_1} e^{j(\psi_1 - \varphi_1)}. \quad (6.13)$$

Обратная величина, взятая с обратным знаком,

$$-Z^*(a_1, \varphi_1, N) = -\frac{a_1}{b_1} e^{j(\varphi_1 - \psi_1)}. \quad (6.14)$$

Для системы управления с ЦВМ определение периодических режимов при $N=1$ и $N=2$ может быть произведено точно. Рассмотрим действующее на входе нелинейного преобразователя гармоническое воздействие

$$e[n] = a_1 \cos\left(\frac{\pi}{N} n + \varphi_1\right) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}\right). \quad (6.15)$$

Здесь комплексная амплитуда $\hat{a}_1 = a_1 \exp(j\varphi_1)$. Для случая $N=1$ из формул (6.12) и (6.9) можно получить

$$e_0[n] = b_1 \cos \pi n, \quad (6.16)$$

где $b_1 = f(a_1 \cos \varphi_1)$, а $\hat{b}_1 = b_1$. Коэффициент гармонической линеаризации

$$q^* = \frac{b_1}{\hat{a}_1} = \frac{f(a_1 \cos \varphi_1)}{a_1} \exp(-j\varphi_1). \quad (6.17)$$

Для случая $N=2$ аналогичным образом из формул (6.11) и (6.9) можно получить

$$e_0[n] = b_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} n + \psi_1\right). \quad (6.18)$$

Комплексная амплитуда

$$\hat{b}_1 = b_1 e^{j\psi_1} = f(a_1 \cos \varphi_1) + f\left[a_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right)\right] e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (6.19)$$

Коэффициент гармонической линеаризации

$$q^* = \frac{\hat{b}_1}{\hat{a}_1} = \frac{f(a_1 \cos \varphi_1) + f\left[a_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right)\right] e^{-j\frac{\pi}{2}}}{a_1}. \quad (6.20)$$

При $N \geq 3$ можно определить приближенное значение $e_0[n]$, учитывая только первую гармонику:

$$e_0[n] \approx b_1 \cos\left(\frac{\pi}{N} n + \psi_1\right). \quad (6.21)$$

Комплексная амплитуда

$$\hat{b}_1 = b_1 e^{j\psi_1} = \frac{2}{N} \sum_{v=0}^{N-1} f(e[n]) \exp\left(-j\frac{\pi}{N} v\right). \quad (6.22)$$

Коэффициент гармонической линеаризации

$$q^* = \frac{2}{a_1 N} \sum_{v=0}^{N-1} f \left[a_1 \cos \left(\frac{\pi}{N} v + \varphi_1 \right) \right] \exp \left[-j \left(\frac{\pi}{N} v + \varphi_1 \right) \right]. \quad (6.23)$$

Сложность выражений для коэффициентов гармонической линеаризации приводит к значительной трудоемкости определения периодических режимов в системе управления с ЦВМ.

Однако при постановке задачи синтеза обычно не ставится вопрос об отыскании периодических режимов.

Наоборот, может быть поставлена задача так синтезировать систему регулирования с ЦВМ, чтобы исключить возможность возникновения периодических режимов в согласованном положении.

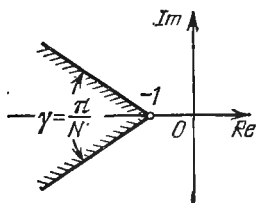


Рис. 6.4. Зона расположения годографов нелинейного элемента.

Рассмотрим возможность возникновения периодических режимов при использовании типовых л. а. х. симметричного или несимметричного вида (см. § 5.3). Так как мы рассматриваем нормированную нелинейную характеристику преобразователя (рис. 6.2), то коэффициент передачи ЦВМ совместно с входным и выходным преобразователями $k_{\text{ц}} = \delta_1^{-1} \delta$ будем считать присоединенным к линейной части системы. В работе [128] показано, что для выходных преобразователей с числом разрядов $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ и $\alpha \rightarrow \infty$ (в последнем случае статическая характеристика, изображенная на рис. 6.2, соответствует линейной характеристике с насыщением) все возможные годографы величины $-Z^*(a_1, \varphi_1, N)$ заключены в секторе (рис. 6.4), угол раствора которого $\gamma = \pi N^{-1}$.

Периодические режимы в системе будут невозможны, если амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы, построенная по функции $W(j\omega)$ или по функции $W^*(j\lambda)$, на фиксированных частотах $\bar{\omega} = \pi N^{-1}$ (абсолютная частота $\omega = \pi N^{-1} T^{-1}$), которым соответствуют фиксированные псевдочастоты (6.7), не будет заходить

в сектор, изображенный на рис. 6.4.

в запретную область. Последняя с запасом может быть представлена в виде сектора с углом $\gamma = \pi N^{-1}$.

При достаточно больших значениях относительного полупериода N , т. е. при малых частотах, $q^*(a_1, \varphi_1, N) \rightarrow q^*(a_1)$ и годограф нелинейной части стремится к годографу соответствующей нелинейности в непрерывной системе управления.

Рассмотрим типовые л. а. х. симметричного вида, приведенные на рис. 5.33 и соответствующие использованию непрерывных корректирующих средств. Эти л. а. х. построены на рис. 6.5 совместно с запретными областями для фазовых характеристик, которые определяются сектором, изображенным на рис. 6.4.

Запретные зоны построены относительно фазового сдвига $\psi = -180^\circ$. Высота запретных зон в угловой мере связана с частотой искомых периодических решений: $\Omega = \pi N^{-1} T^{-1}$. При $N=1$ высота запретной зоны равна 180° , при $N=2$ равна 90° , при $N=3$ равна 60° и т. д.

Для исключения периодических режимов фазовая характеристика $\psi(\lambda)$ на фиксированных частотах (6.7)

$$\lambda_N = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2N} \quad (6.24)$$

не должна заходить в запретные зоны, построенные для

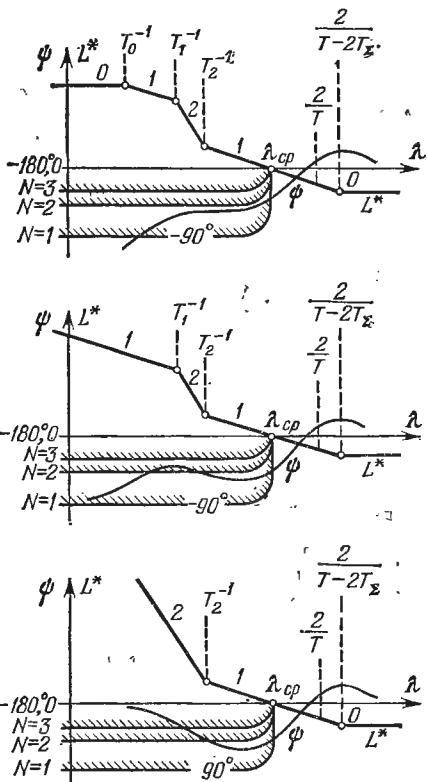


Рис. 6.5. Типовые л. а. х. симметричного вида.

этого же значения $N = \text{const}$. Если фазовая характеристика на фиксированной частоте (6.24) будет находиться в запретной зоне, соответствующей тому же значению N , то возможно существование периодического режима с частотой $\pi N^{-1} T^{-1}$.

Рассмотрим наиболее тяжелый случай астатизма второго порядка (рис. 6.5, в). Условие, при котором фазовая характеристика не будет заходить в соответствующие запретные зоны на фиксированных частотах, имеет вид

$$-\pi + \frac{\pi}{2N} \leq \psi(\lambda), \quad (6.25)$$

где $\lambda = \lambda_N$. Формулу (6.25) можно представить в следующем виде:

$$-\pi + \frac{\pi}{2N} \leq -\pi + \arctg \lambda_N T_2 - 2 \arctg \lambda_N \frac{T}{2} + \arctg \lambda_N \left(\frac{T}{2} - T_\Sigma \right). \quad (6.26)$$

Для частот меньших, чем частота среза ($N = 3, 4, 5, \dots$), формулу (6.26) с достаточной точностью можно привести к виду

$$\frac{\pi}{2N} \leq \arctg \frac{2T_2}{T} \tg \frac{\pi}{2N} - \frac{\pi}{N}, \quad (6.27)$$

или

$$\frac{3\pi}{2N} \leq \frac{2T_2}{T} \tg \frac{\pi}{2N}. \quad (6.28)$$

Учитывая, что $N \geq 3$, последнее неравенство можно записать в виде

$$\frac{2T_2}{T} \geq 3. \quad (6.29)$$

Для обеспечения запаса устойчивости в типовой передаточной функции требуется выполнение неравенства

$$\frac{T_2}{T_\Sigma + \frac{T}{2}} = h \geq \frac{M+1}{M-1}, \quad (6.30)$$

поэтому неравенство (6.29) с запасом выполняется уже при $M \leq 2$. Это же условие получается для типовых передаточных функций с дискретной коррекцией (таблица 5.5).

Фазовые характеристики для типовых л. а. х. (рис. 5.33, а и б) в области низких частот отстоят от запретной области дальше, чем у рассмотренной выше л. а. х., соответствующей астатизму второго порядка. Поэтому полученное выше условие невозможности появления периодических режимов будет справедливым и для л. а. х. этих типов.

Обратимся теперь л. а. х. несимметричного вида. Наиболее неблагоприятный случай, соответствующий астатизму первого порядка, изображен на рис. 6.6. Этой л. а. х. соответствует дискретная частотная передаточная функция разомкнутой системы при непрерывной коррекции

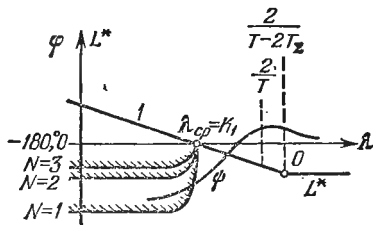


Рис. 6.6. Типовые л. а. х. несимметричного вида.

$$W^*(j\lambda) = \frac{K_1 \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left[1 + j\lambda \left(\frac{T}{2} - T_\Sigma\right)\right]}{j\lambda \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)} \quad (6.31)$$

и при дискретной коррекции

$$W^*(j\lambda) = \frac{K_1 \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left[1 + j\lambda \left(\frac{T}{2} - T_\Sigma\right)\right]}{j\lambda \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)^2}. \quad (6.32)$$

Условие, при котором фазовая характеристика не заходит в запретные области, изображенные на рис. 6.6, можно записать в виде

$$-\pi + \frac{\pi}{2N} \leq \psi(\lambda) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \lambda_N T_\Sigma, \quad (6.33)$$

где эквивалентная сумма постоянных времени $T_\Sigma = \frac{T}{2} + T_\Sigma$ для формулы (6.31) и $T_\Sigma = T + T_\Sigma$ для формулы (6.32). Неравенство (6.33) с запасом можно записать следующим образом:

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2N} \leq -\arctg \lambda_{cp} T_\Sigma = -\arctg K_1 T_\Sigma. \quad (6.34)$$

Отсюда следует условие отсутствия периодических режимов:

$$K_1 T_3 \leq \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2N} \right) \approx \frac{2N}{\pi}. \quad (6.35)$$

При $N=1$ и $N=2$ проверка не должна производиться, так как эти значения N соответствуют частотам, превышающим частоту среза, где нет запретных областей для фазовой характеристики. При $N=3$ имеем

$$K_1 T_3 \leq \frac{6}{\pi} = \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2}. \quad (6.36)$$

Последнее неравенство выполняется при $M \leq 1,48$. Для статических систем с л. а. х. несимметричного типа полученное условие (6.36) будет выполняться с запасом.

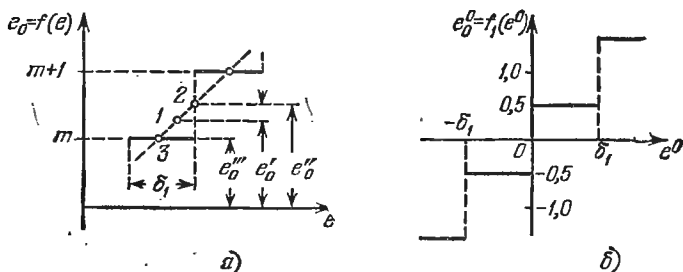


Рис. 6.7. Нормированные статические характеристики входного и выходного преобразователей.

Однако несмотря на то, что в согласованном положении можно добиться отсутствия периодических режимов, в системах с ЦВМ периодические режимы, вызванные квантованием по уровню, будут существовать практически всегда. Это объясняется тем, что при наличии ненулевой установившейся ошибки начальная точка статической характеристики входного преобразователя смещается из начала координат в другую точку (рис. 6.7, а).

Если начало отсчета сместилось в точку 3, то это не дает отличия в получаемой характеристике от исходного случая равенства нулю входного и выходного сигналов. Если начало отсчета сместится в точку 2, то результирующая статическая характеристика будет иметь вид, изображенный на рис. 6.7, б.

Требуемое дробное значение выходной величины преобразователя e_0'' может быть получено только в результате периодического переключения от уровня $m+1$ к уровню m и обратно. Это будет симметричный периодический режим, относительный полупериод которого может быть различным: $N=1, 2, 3, \dots$. Системы с ЦВМ стараются делать так, чтобы амплитуда симметричного периодического режима не превышала единицы младшего разряда [64, 85]. Тогда в подобном режиме входная величина ЦВМ (сигнал ошибки) будет представлять собой периодическую решетчатую функцию, изображенную на рис. 6.8. Для этого случая нелинейная зависимость для входного преобразователя может быть записана в виде (см. рис. 6.7, б)

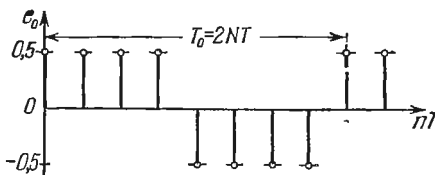


Рис. 6.8. Пример симметричного периодического режима.

$$e_0'' = \frac{1}{2} \text{sign } e^0, \quad (6.37)$$

где e^0 — переменная составляющая ошибки, вызванная периодическим режимом, а e_0'' — ее цифровое представление.

Для определения коэффициента гармонической линеаризации необходимо положить

$$e^0[n] = a_1 \cos\left(\frac{\pi n}{N} + \varphi_1\right),$$

где $-0,5\pi < \varphi_1 < 0,5\pi$. Далее, используя формулу (6.12) и вводя нормирующий множитель, равный δ_1^{-1} , получим для случая $N=1$ из (6.20)

$$-Z^* = -\frac{1}{q^*} = -\frac{2a_1}{\delta_1} e^{i\varphi_1}. \quad (6.38)$$

Амплитудно-фазовые характеристики величины $-Z^*$ изображены на рис. 6.9, а. Они представляют собой прямые, расположенные во втором и третьем квадрантах.

Для случая $N=2$ аналогичным образом можно получить

$$-Z^* = \begin{cases} -\frac{a_1 \sqrt{2}}{\delta_1} e^{j(\varphi_1 - \frac{\pi}{2})} & (0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}), \\ -\frac{a_1 \sqrt{2}}{\delta_1} e^{j(\varphi_1 + \frac{\pi}{2})} & (0 > \varphi_1 > -\frac{\pi}{2}). \end{cases} \quad (6.39)$$

Амплитудно-фазовые характеристики представляют собой прямые линии, расположенные в секторе $-180^\circ \pm 45^\circ$ (рис. 6.9, б).

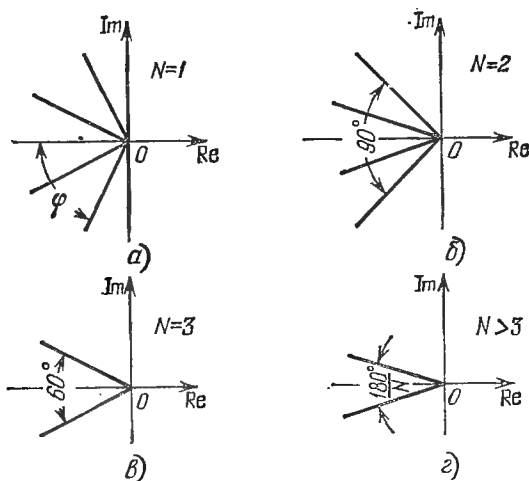


Рис. 6.9. Амплитудно-фазовые характеристики нелинейного элемента.

При $N=3$ модуль $|Z^*| = 1,5a_1\delta_1^{-1}$. Характеристики расположены в секторе $-180^\circ \pm 30^\circ$ (рис. 6.9, в).

Для $N > 3$

$$|Z^*| \approx \frac{\pi}{2} \frac{a_1}{\delta_1}, \quad (6.40)$$

причем характеристики расположены в секторе $-180^\circ \pm \pm N^{-1} \cdot 90^\circ$ (рис. 6.9, г). При $N \rightarrow \infty$, что соответствует непрерывному случаю, сектор расположения а.-ф. х. стягивается в линию, совпадающую с отрицательной вещественной полуосью.

Уравнение периодического режима имеет вид (6.4). Его можно решить графически (рис. 6.3) или аналитически. В результате, как это показано на рис. 6.10, а, для $N=1$ амплитуда ошибки или, что все равно, амплитуда управляемой величины объекта

$$a_1 = \frac{\delta_1}{2} |W(e^{j\pi})| = \frac{\delta_1}{2} |W(-1)| = \frac{\delta_1}{2} |W^*(j\infty)|. \quad (6.41)$$

Под знаком модуля в (6.41) находится значение частотной передаточной функции при $\omega = \pi/T$ или при $\lambda \rightarrow \infty$.

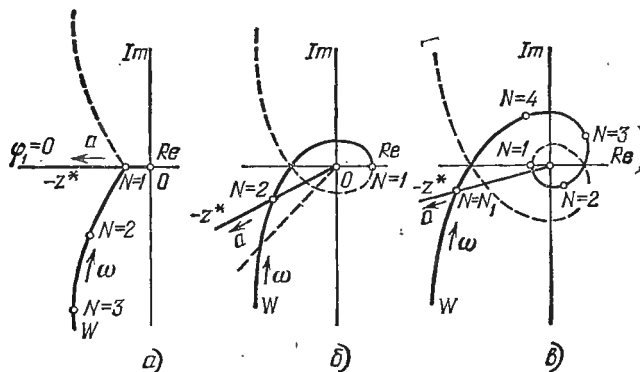


Рис. 6.10. Графический расчет периодических режимов.

При колебаниях с относительным полупериодом $N=2$, если имеется точка пересечения двух годографов, как, например, показано на рис. 6.10, б,

$$a_1 = \frac{\delta_1}{\sqrt{2}} \left| W\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right) \right| = \frac{\delta_1}{\sqrt{2}} \left| W^*\left(j\frac{2}{T}\right) \right|. \quad (6.42)$$

Аналогичным образом для колебаний при $N \geq 1$ (рис. 6.10, в)

$$a_1 \approx \frac{2\delta_1}{\pi} \left| W\left(e^{j\frac{\pi}{N}}\right) \right| = \frac{2\delta_1}{\pi} |W^*(j\lambda_N)|, \quad (6.43)$$

где

$$\lambda_N = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2N}. \quad (6.44)$$

Следует заметить, что в системе обычно могут существовать симметричные периодические режимы с различными значениями полупериода N . При этом для каждого конкретного значения N периодический режим в случае управляемого объекта без самовыравнивания (астатического) оказывается нейтрально-устойчивым относительно среднего значения управляемой величины. В результате этого ни один из симметричных периодических режимов с фиксированным значением N не может существовать длительное время. Медленные движения объекта, вызванные наличием возмущений, приводят к непрерывным переходам периодических режимов от одного значения $N = N_1$ к другому $N = N_2 \neq N_1$.

Из всех возможных периодических режимов обычно наиболее тяжелым для системы с точки зрения влияния ограниченной линейности канала является режим при $N = N_{\min}$. Это связано с тем, что при использовании дискретных корректирующих программ ЦВМ, т. е. при $D(z) \neq 1$, более вероятно применение алгоритмов, эквивалентных дифференцирующим контурам, которые вызывают подъем высоких частот.

Выходная величина ЦВМ в режиме симметричных периодических колебаний может быть получена, если входную решетчатую функцию (рис. 6.8) пропустить через фильтр с передаточной функцией $D(z)$. Это делается на основании формул § 2.7, которые позволяют вычислить параметры периодического режима на выходе дискретного фильтра при известных параметрах периодического режима на входе.

Покажем, как это делается для случая $N = 1$, когда число гармоник оказывается равным единице. В соответствии с (2.204) амплитуда сигнала на выходе ЦВМ (рис. 6.1)

$$x_0 \max = e_0 \max |D(e^{j\pi})| = e_0 \max |D(-1)|, \quad (6.45)$$

где e_0 и x_0 — цифровые представления входного и выходного сигналов ЦВМ. Пусть, например, в ЦВМ используется алгоритм (таблица 5.9)

$$D(z) = \frac{1}{1-a} \frac{z-a}{z} = 10 - 9z^{-1},$$

Тогда для режима, изображенного на рис. 6.8, при $e_{0\max} = 0,5$ имеем для $N = 1$

$$x_{0\max} = 0,5 |D(-1)| = 0,5 (10 + 9) = 9,5,$$

т. е. амплитуда колебаний на выходе ЦВМ превышает амплитуду колебаний на входе в 19 раз. При $N > 1$ расчет может быть произведен для каждой гармоники и найдена их сумма.

Покажем теперь, что в системах с типовыми л. а. х. (рис. 5.33) для симметричных периодических режимов амплитуда ошибки при $N = 1$ не превосходит половины цены младшего разряда входного преобразователя. Пусть на входе нелинейного элемента (рис. 6,7, б) действует сигнал $e_0^0[n] = a_1 \cos(\pi n + \varphi_1)$. Запишем амплитуду входного сигнала в виде $a_1 = (m + \Delta_1) \delta_1$, где m — целое, а $\Delta_1 > 0$ — дробное число. Начальная фаза должна находиться в пределах

$$-\arccos \frac{m}{m + \Delta_1} < \varphi_1 < \arccos \frac{m}{m + \Delta_1}. \quad (6.46)$$

Если начальная фаза удовлетворяет последнему неравенству, то на выходе нелинейного элемента будет последовательность (6.16):

$$e_0^0[n] = b_1 \cos \pi n = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cos \pi n. \quad (6.47)$$

Нормированный коэффициент гармонической линеаризации

$$q^* = \frac{\delta_1 b_1}{a_1} e^{-j\varphi_1} = \frac{m + \frac{1}{2}}{m + \Delta_1} e^{-j\varphi_1}. \quad (6.48)$$

В точке пересечения двух годографов (рис. 6.10, а) имеем $-Z^* = W(e^{j\pi}) = W^*(j\infty)$. Так как $|W^*(j\infty)| \leq M(M+1)^{-1}$, то получим

$$\frac{m + \Delta_1}{m + \frac{1}{2}} \leq \frac{M}{M+1}, \quad (6.49)$$

откуда

$$\Delta_1 \leq \frac{\frac{M}{2} - m}{M+1}. \quad (6.50)$$

Так как $\Delta_1 > 0$, то при $M < 2$ из последнего равенства следует, что $m=0$, а дробная часть относительной амплитуды колебаний

$$\Delta_1 \leq \frac{M}{2(M+1)} < \frac{1}{2}. \quad (6.51)$$

§ 6.2. Квазипериодические режимы

Если установившееся значение сигнала на выходе входного преобразователя должно соответствовать точке 2 на рис. 6.7, а, то в системе будет существовать несимметричный периодический режим. Установившееся значение на выходе преобразователя можно представить в виде

$$e_0 = e_{0c} + e_0^0 = m + \left(\frac{1}{2} - \Delta\right), \quad (6.52)$$

где m — целое число, а e_0^0 — дробная часть, причем $|e_0^0| < 1$ и $|\Delta| \leq 0,5$. Так как на самом деле на выходе может существовать сигнал $m+1$ или m , то требуемое значение e_0 получается как среднее значение в периодическом режиме. Как среднее в колебательном режиме получается и значение дробной части

$$e_0^0 = \frac{1}{2} - \Delta = \frac{1}{2} + \frac{(N_1 - N_2)}{2N} \frac{1}{2}, \quad (6.53)$$

где N_1 — число тактов, когда на выходе существует величина $m+1$, N_2 — число тактов, когда на выходе существует величина m , а $2N$ — число тактов полного периода колебаний.

Из (6.53), учитывая, что $N_1 + N_2 = 2N$, можно найти следующую зависимость:

$$N_c = \frac{N_1}{1 - 2|\Delta|}. \quad (6.54)$$

Знак модуля введен в (6.54) для обобщения на случай произвольного знака Δ . Вместо N в формуле (6.54) записан средний полупериод N_c по следующим соображениям. Числа N_1 , N_2 и N могут быть в каждом реальном цикле колебаний только целыми, а Δ — произвольное число. Поэтому зависимость (6.53) может, как правило, кроме специально подобранных значений Δ , выполняться только в среднем. Так, например, для случая, когда $N_1 = 1$, некоторые подобные режимы изображены на рис. 6.11.

В формулах (6.53) и (6.54) числа N_1 , N_2 и N могут быть целыми, вообще говоря, для любых значений Δ , если под N_1 и N_2 понимать число тактов не в одном цикле колебаний, а в течение многих циклов. Однако при этом все эти числа могут стремиться к бесконечности или во всяком случае быть очень большими. Период колебаний $T_0 = 2NT$ в этом случае не соответствует реально наблюдаемым колебаниям в системе, у которых будет существовать некоторая преобладающая гармоника. Целью введения усредненного периода и является выявление частоты преобладающей гармоники.

Средний полупериод N_c может быть как целым, так и дробным числом. Средние значения чисел N_1 и N_2 могут быть также целыми и дробными. Такой режим движения будем называть *квазипериодическим*.

Проблема расчета квазипериодических режимов является весьма сложной. Поэтому ограничимся пока простейшим случаем, когда $N_1 = 1$ не в среднем, а в течение всего режима. Тогда формулы (6.53) и (6.54) приобретают вид

$$e_0^0 = \frac{1}{2} - \Delta = \frac{1}{2} + \frac{1 - N_2}{2N} \frac{1}{2}, \quad (6.55)$$

$$N_c = \frac{1}{1 - 2|\Delta|}. \quad (6.56)$$

Рассмотрим вначале случай, когда $N_c = N$ — целое число. Для дробных частей e^0 и e_0^0 по-прежнему имеют место зависимости вида (6.8) и (6.9), а также рис. 6.7, б. Однако комплексное значение амплитуды первой гармоники b_1 на выходе входного преобразователя определяется при $N > 1$

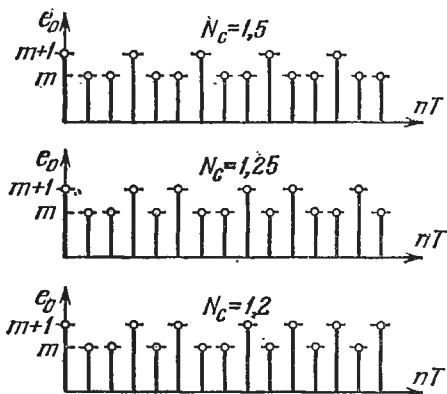


Рис. 6.11. Периодический и квазипериодический режимы.

более общим выражением:

$$\dot{b}_1 = b_1 e^{i\psi_1} = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{2N-1} f_1(e_0^n[n]) \exp\left(-j \frac{\pi}{N} v\right). \quad (6.57)$$

Это выражение можно упростить, если учесть, что $f_1 = \frac{1}{2} + \Delta$ при $v=0$ и $f_1 = -\left(\frac{1}{2} - \Delta\right)$ при всех остальных значениях v . Тогда

$$\begin{aligned} \dot{b}_1 &= \frac{1}{N} \left[\frac{1}{2} + \Delta - \left(\frac{1}{2} - \Delta\right) \sum_{v=1}^{2N-1} \exp\left(-j \frac{\pi}{N} v\right) \right] = \\ &= \frac{1}{N} \left[1 - \left(\frac{1}{2} - \Delta\right) \sum_{v=0}^{2N-1} \exp\left(-j \frac{\pi}{N} v\right) \right] = \frac{1}{N}, \end{aligned} \quad (6.58)$$

так как сумма членов вида $\exp\left(-j \frac{\pi}{N} v\right)$ при $v=0, 1, \dots, 2N-1$ равна нулю. Из (6.58) получается нормированный коэффициент гармонической линеаризации

$$q^* = \frac{\dot{b}_1 \delta_1}{\dot{a}_1} = \frac{\delta_1}{N a_1} e^{-i\psi_1}. \quad (6.59)$$

Расчет параметров периодического режима, когда $N_c = N$ — целое число, не представляет труда. По значению ошибки в установившемся режиме определяется относительный полупериод колебаний N_c (6.56). Затем из (6.4) находится амплитуда колебаний на выходе системы:

$$a_1 = \frac{\delta_1}{N} \left| W\left(j \frac{\pi}{N}\right) \right| = \frac{\delta_1}{N} \left| W^*(j\lambda_N) \right|, \quad (6.60)$$

где λ_N определяется формулой (6.44). На рис. 6.12 показано графическое построение для $N=2$.

Если N_c представляет собой дробное число, то колебания носят квазипериодический характер. Их приближенный расчет может быть сделан следующими методами.

1) Введем предположение, что при переходе от одного периодического режима с целым значением $N=N_0$ к другому с новым целым значением $N=N_0+1$ амплитуда первой гармоники и частота усредненного периодического режима изменяются непрерывно и плавно. Для частоты колебаний это полностью подтверждается формулой (6.54). Тогда для расчета амплитуды первой гармоники колеба-

ний можно воспользоваться тем же графическим построением (рис. 6.12) и формулами (6.54) и (6.60) при замене в последней N на N_c и $\bar{\omega}$ на $\bar{\omega}_0 = \pi N^{-1}$.

2) Второй метод заключается в том, что для усредненного периода колебаний, изображенного на рис. 6.13, а с учетом действия экстраполятора (пунктирная линия), находится обычными приемами разложения в ряд Фурье амплитуда первой гармоники:

$$c_1 = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2N_c}. \quad (6.61)$$

Далее может быть определена амплитуда колебаний на выходе системы пересчетом c_1 на вход (умножением на δ_1) и умножением на модуль частотной передаточной функции разомкнутой системы:

$$\begin{aligned} a_1 &= \delta_1 c_1 |W(e^{j\omega_0 T})| = \\ &= \frac{2\delta_1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2N_c} |W(e^{j\omega_0 T})| = \\ &= \frac{2\delta_1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2N_c} |W^*(j\lambda_0)|. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{\pi}{N_c T}, \quad \lambda_0 = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_0 T}{2} = \\ &= \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2N_c} \end{aligned} \quad (6.63)$$

— круговая частота и псевдопериодический режим (частота преобладающей гармоники).

3) Возможно использование способа расчета, когда рассматривается некоторый дополнительный усредненный режим движения $y^0(t)$ на выходе непрерывной части (6.13, б), полученный припасовыванием на интервалах времени $0 \div T$ и $T \div T_0 = 2N_c T$. Далее в случае необходимости можно выделить в этом режиме первую гармонику. В отличие от предыдущих двух методов, здесь расчет может производиться и в тех случаях, когда время существования на выходе экстраполятора сигнала $(m+1)\delta$ не подчиняется условию $N=1$, а может содержать произвольное число тактов.

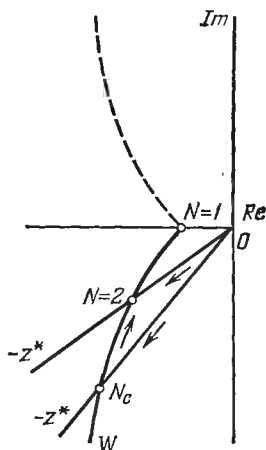


Рис. 6.12. К расчету периодических и квазипериодических режимов.

Пример 6.1. Пусть передаточная функция непрерывной части

$$W_n(p) = \frac{k_n}{p}. \quad (6.64)$$

Дискретная частотная передаточная функция разомкнутой системы

$$W^*(j\lambda) = D^*(j\lambda) W_0^*(j\lambda) = 1 \cdot W_0^*(j\lambda) = \frac{K_1 \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)}{j\lambda}, \quad (6.65)$$

где $K_1 = k_n k_d$ — общий коэффициент усиления разомкнутой цепи с присоединенным коэффициентом передачи ЦВМ.

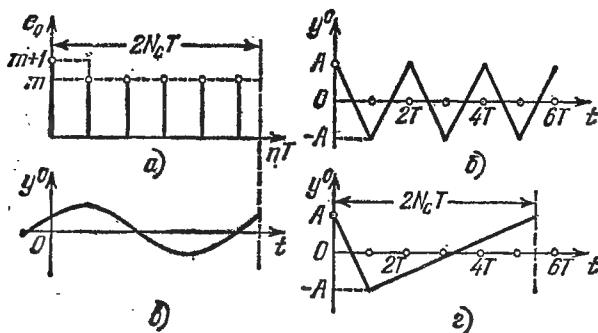


Рис. 6.13. Зависимость среднего полупериода от установившейся ошибки.

Режим симметричных колебаний при $e^0 = 0,5\delta_1$ построен на рис. 6.13, б. Амплитуда может быть найдена методом припасовывания:

$$A = \frac{\delta}{2} \frac{k_n T}{2} = \frac{\delta_1}{2} \frac{K_1 T}{2}. \quad (6.66)$$

Так как из условий устойчивости $K_1 T < 2$, то $A < 0,5\delta_1$. Относительный полупериод $N = 1$. Первая гармоника этого колебательного режима имеет амплитуду

$$a_1 = \frac{8}{\pi^2} \frac{\delta_1}{2} \frac{K_1 T}{2} = \frac{2\delta_1 K_1 T}{\pi^2}. \quad (6.67)$$

Первая гармоника может быть также найдена из (6.41) для $\omega_0 T = \pi$ и $\lambda_0 \rightarrow \infty$:

$$a_1 = \frac{\delta_1}{2} |W^*(j\infty)| = \frac{\delta_1 K_1 T}{4}. \quad (6.68)$$

Рассмотрим теперь несимметричные колебания. Зависимость N_c от установившегося значения ошибки e_0 представлена на рис. 6.14. Точками отмечены целочисленные значения N_c . Воспользуемся первым изложенным методом. В соответствии с (6.60)

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\delta_1}{N_c} \frac{K_1 \sqrt{1 + 0,25\lambda_0^2 T^2}}{\lambda_0} = \\ &= \frac{\delta_1 K_1 T}{\pi} \frac{\frac{\pi}{2N_c}}{\sin \frac{\pi}{2N_c}}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

При $N_c > 2$ формула (6.69) дает

$$a_1 \approx \frac{\delta_1 K_1 T}{\pi}. \quad (6.70)$$

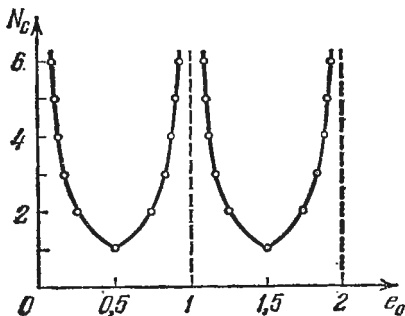


Рис. 6.14. Режимы колебаний.

При использовании второго метода в соответствии с (6.62)

$$a_1 = \frac{2\delta_1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2N_c} |W^*(j\lambda_0)| = \frac{\delta_1 K_1 T}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{2N_c}}{\frac{\pi}{2N_c}}. \quad (6.71)$$

При $N_c > 2$ формула (6.71) переходит в (6.70).

Для того чтобы воспользоваться третьим методом, рассмотрим «средний» цикл колебаний. Он построен методом припасовывания для выходной величины на рис. 6.13, г. Амплитуда колебаний

$$A = \frac{\delta_1}{2} \frac{K_1 T (2N_c - 1)}{2N_c}. \quad (6.72)$$

Амплитуда первой гармоники при разложении в ряд Фурье

$$a_1 = \frac{8AN_c^2}{\pi^2 (2N_c - 1)} \sin \frac{\pi}{2N_c} = \frac{\delta_1 K_1 T}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{2N_c}}{\frac{\pi}{2N_c}} \quad (6.73)$$

полностью совпадает со значением (6.69). Все полученные выражения для амплитуды первой гармоники показывают сравнительное постоянство ее для различных значений N_c .

§ 6.3. Точные методы расчета периодических режимов в ЦАС

Периодические режимы в ЦАС имеют сложный характер. В системах с неустойчивым или нейтрально-устойчивым объектом ни один из возможных периодических режимов не оказывается устойчивым. В результате будет наблюдаться непрерывный переход от режима одного типа к режиму другого типа. Это делает всю картину периодических, а точнее, квазипериодических режимов в ЦАС весьма сложной и запутанной. Моделирование всей системы на универсальной ЦВМ или на аналого-цифровом комплексе обычно не может дать полного ответа о характере возможных режимов, так как они во многом определяются медленными движениями системы с нейтрально-устойчивыми или неустойчивыми объектами, вызываемыми различными возмущениями, действующими в реальной системе, приводящими к срыву одного вида колебаний и переходу к другому виду.

Теоретическое рассмотрение вопроса периодических режимов в ЦАС имеет целью установить возможные простейшие режимы, которые могут под действием различных причин переходить друг в друга, давая общую сложную картину движения.

Рассмотрим использование точных методов расчета возможных простейших периодических режимов применительно к схеме на рис. 6.1, ограничиваясь пока случаем учета одного квантующего элемента. Излагаемая методика расчета периодических режимов в ЦАС базируется на следующих особенностях.

1) Исследуемые периодические режимы в ЦАС определены не на континууме частот $0 < \omega < \infty$, как это имеет место в непрерывных системах, а на счетном множестве частот $\omega = \pi N^{-1} T^{-1}$, где $N \geq 1$ — целое число.

2) Квантование по уровню обуславливает представление симметричных периодических режимов на входе ЦВМ (на выходе входного преобразователя) конечным числом

сигналов различной конфигурации. Это условие оказывается особенно сильным в хорошо спроектированных ЦАС в смысле наличия в них достаточно больших запасов устойчивости, где амплитуда входного сигнала в периодическом режиме обычно не превосходит 1—2 единиц младшего разряда входного преобразователя, что делает число возможных конфигураций сигнала весьма малым.

3) Наличие континуумов амплитуд и начальных фаз входного гармонического сигнала преобразователя $H-K$, в пределах которых конфигурация сигнала на его выходе остается неизменной.

Используем материалы § 2. 7. Периодическая решетчатая функция на входе системы имеет изображение

$$E(z) = \frac{z^M}{z^M - 1} E_M(z) = \frac{zA(z)}{z^M - 1}, \quad (6.74)$$

где $E_M(z)$ — изображение решетчатой функции $e[n]$ на интервале $0-M$. Можно рассматривать только центрированную входную функцию, т. е. собственно периодический режим с нулевой постоянной составляющей. Если (6.74) содержит постоянную составляющую, то ее можно выделить. При наличии постоянной составляющей уравнение $A(z) = 0$ не должно содержать корня $z_1 = 1$. Действительно, если такой корень имеется, то

$$\begin{aligned} \frac{zA(z)}{z^M - 1} &= \frac{z(z-1)A_1(z)}{(z-1)(1+z+z^2+\dots+z^{M-1})} = \\ &= \frac{zA_1(z)}{1+z+z^2+\dots+z^{M-1}}, \end{aligned} \quad (6.75)$$

где $A(z) = (z-1)A_1(z)$. Это выражение не содержит в знаменателе множителя $(z-1)$ и, следовательно, не содержит постоянной составляющей.

Если $A(z)$ не содержит корня $z_1 = 1$, то в $E(z)$ имеется постоянная составляющая, которую можно выделить:

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{zA(z)}{z^M - 1} = \frac{zA(z)}{(z-1)(1+z+z^2+\dots+z^{M-1})} = \\ &= z \left[\frac{a}{z-1} + \frac{A_1(z)}{1+z+z^2+\dots+z^{M-1}} \right] = E_y(z) + E^0(z). \end{aligned} \quad (6.76)$$

Второе слагаемое (6.76) уже не содержит постоянной составляющей, а полином $A_1(z)$ имеет степень $M-2$.

Если периодическая решетчатая функция на входе системы симметрична, то вместо (6.74) можно записать

$$E^0(z) = \frac{z^N}{z^N + 1} E_N(z), \quad (6.77)$$

где N — относительный полупериод функции, а $E_N(z)$ — изображение функции на интервале $0 - N$. Условие симметрии входной функции имеет вид $e[n + N] = -e[n]$. Будем рассматривать прохождение периодической составляющей $E(z)$ или $E^0(z)$ через разомкнутый канал управления (рис. 6.1). Изображение выходной величины при использовании (6.74)

$$Y(z) = W(z) E(z) = \frac{z^P(z)}{(z-1)^r Q_1(z) Q_2(z)}; \quad (6.78)$$

здесь r — степень астатизма, $Q_1(z)$ определяется полюсами $W(z)$, лежащими внутри круга единичного радиуса, а $Q_2(z) = z^M - 1$ — знаменатель в формуле (6.74). Для нахождения периодической составляющей на выходе канала $Y(z)$ следует разложить на сумму составляющих:

$$Y(z) = z \left[\frac{P_0(z)}{(z-1)^r} + \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} + \frac{P_2(z)}{Q_2(z)} \right]. \quad (6.79)$$

Последнее слагаемое и есть искомая периодическая составляющая на выходе канала управления.

При использовании входной функции вида (6.77) формулы (6.78) и (6.79) сохраняют свой вид, но $Q_2(z) = z^N + 1$.

При рассмотрении задачи нахождения центрированного периодического режима на выходе при действии сигнала $E(z)$ он может быть получен, если из последнего слагаемого (6.79) выделить постоянную составляющую. Тогда вместо (6.79) имеем

$$Y(z) = z \left[\frac{P'_0(z)}{(z-1)^{r+1}} + \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} + \frac{P_2(z)}{Q'_2(z)} \right], \quad (6.80)$$

где

$$Q'_2(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{M-1}.$$

При использовании сигнала $E^0(z)$, определяемого формулой (6.77), последнее слагаемое (6.79) соответствует центрированному значению периодического режима на выходе.

Второе слагаемое (6.79) и (6.80) соответствует затухающему процессу, если объект управления устойчив или нейтрально-устойчив. Если объект неустойчив, то второе слагаемое будет иметь внутри отрезков периодического режима определенного вида растущую во времени составляющую. Последняя будет вызывать срыв одного вида режима и переход к другому. Однако, так как замкнутая система в целом предполагается устойчивой, эта составляющая не может вызвать нарастающего ухода от установившегося режима «в среднем», относительно которого рассматривается периодическое движение системы.

Первое слагаемое (6.79) и (6.80) может дать только постоянное смещение, так как в установившемся режиме «в среднем» не может быть нарастающего во времени слагаемого.

При рассмотрении одного квантующего элемента на входе это постоянное смещение не вызывает никаких дополнительных трудностей. При рассмотрении двух квантующих элементов постоянная составляющая может привести к относительному сдвигу разрядных сеток входного и выходного преобразователей, если интеграл реализуется в ЦВМ.

Как уже отмечалось, в ЦАС, имеющих достаточно большой запас устойчивости, периодические режимы ограничиваются единицей младшего разряда входного преобразователя. Рассмотрим такой режим более подробно. Соответствующая этому режиму решетчатая функция на входе изображена на рис. 6.15. Изображение этой функции при выборе начала отсчета на оси абсцисс

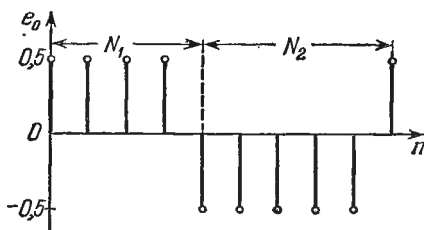


Рис. 6.15. Несимметричный периодический режим.

$$E(z) =$$

$$= \frac{z^M [1 + z^{-1} + \dots + z^{-N_1+1} - (z^{-N_1} + z^{-N_1-1} + \dots + z^{-M+1})]}{2(z^M - 1)}$$

(6.81)

Изображение этой же функции при выборе начала отсчета на прямой $e_0[n] = -0,5$

$$E(z) + \frac{1}{2} = \frac{z^M (1 + z^{-1} + \dots + z^{-N_1+1})}{z^M - 1}. \quad (6.82)$$

Изображение центрированной функции при выборе начала отсчета на прямой $e_0[n] = e_c$, где e_c — среднее значение функции,

$$E^0(z) = \frac{z}{M} \frac{N_2 (z^{M-2} + 2z^{M-3} + \dots + N_1 z^{M-N_1-1}) + N_1 [(N_2 - 1) z^{M-N_1-2} + \dots + 1]}{1 + z + z^2 + \dots + z^{M-1}}. \quad (6.83)$$

Так, например, если на входе действует сигнал, изображенный на рис. 6.16, то для него имеем

$$E^0(z) = \frac{z(z+2)}{3(z^2+z+1)}.$$

Любое из приведенных изображений (6.81) — (6.83) может быть использовано для нахождения изображения выходной величины $Y(z)$ с последующим выделением из него переменной составляющей $Y^0(z)$.



Рис. 6.16. Пример периодического режима.

Рассмотрим теперь общую методику нахождения периодического режима на выходе канала управления при действии на его входе периодической решетчатой функции произвольного вида. Для этого введем

единичную решетчатую периодическую функцию $\delta_M[n]$ несимметричного вида (рис. 6.17, а), изображение которой

$$\mathbb{Z} \{ \delta_M[n] \} = \frac{z^M}{z^M - 1}, \quad (6.84)$$

где M — произвольное целое число. Изображение центрированного значения этой функции

$$\mathbb{Z} \{ \delta_M^0[n] \} = \frac{z}{M} \frac{1 + 2z + 3z^2 + \dots + (M-1)z^{M-2}}{1 + z + z^2 + \dots + z^{M-1}}. \quad (6.85)$$

Введем также единичную периодическую функцию $\delta_N[n]$ симметричного вида (рис. 6.17, б), изображение которой

$$\mathcal{Z}\{\delta_N[n]\} = \frac{z^N}{z^N + 1}, \quad (6.86)$$

где N — произвольное целое число. Установившуюся периодическую составляющую реакции дискретной системы на функцию $\delta_M[n]$ назовем *периодической весовой функцией* $w_M[n]$ *несимметричного вида*. Она изображена на рис. 6.17, в. Центрированное значение этой функции (после исключения постоянной составляющей) обозначим $w_M^0[n]$.

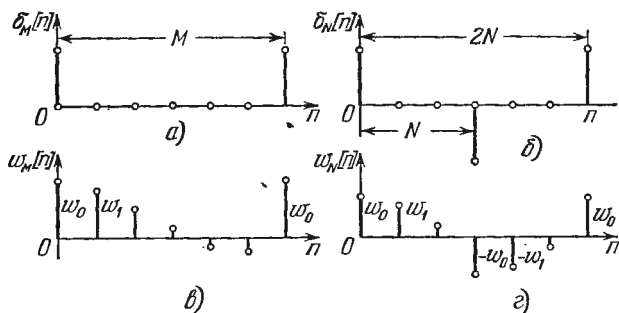


Рис. 6.17. К определению периодической весовой функции.

Установившуюся периодическую составляющую реакции дискретной системы на функцию $\delta_N[n]$ назовем *периодической весовой функцией* $w_N[n]$ *симметричного вида*. Она показана на рис. 6.17, г. Центрированное значение этой функции обозначим $w_N^0[n]$.

Изображение весовой функции $w_M[n]$ назовем *периодической передаточной функцией* $W_M(z)$ *несимметричного вида*. Центрированному значению $w_M^0[n]$ будет соответствовать центрированное значение $W_M^0(z)$. Можно ввести другое определение передаточной функции — как изображения периодической весовой функции на интервале $0-M$. Однако это не повлияет на конечные расчетные формулы.

В соответствии с изложенным выше и на основании формулы (6.79) для системы с передаточной функцией $W(z)$

$$\begin{aligned} W_M(z) &= W(z) \frac{z^M}{z^M - 1} - \frac{zP_0(z)}{(z-1)^r} - \frac{zP_1(z)}{Q_1(z)} = \\ &= \frac{z^M}{z^M - 1} (w_0 + w_1 z^{-1} + \dots + w_{M-1} z^{-M+1}), \end{aligned} \quad (6.87)$$

где $w_0, \dots, w_{M-1}$ — значения дискрет периодической передаточной функции $W_M(z)$ на интервале $0-M$, $Q_1(z)$ — полином, определяемый полюсами передаточной функции $W(z)$, лежащими внутри круга единичного радиуса, r — число интегрирующих элементов. Аналогичным образом можно из формулы (6.87) получить центрированное значение передаточной функции

$$\begin{aligned} W_M^0(z) &= W(z) \frac{z^M}{z^M - 1} - \frac{zP_0(z)}{(z-1)^{r+1}} - \frac{zP_1(z)}{Q_1(z)} = \\ &= \frac{z^M}{z^M - 1} (w_0^0 + w_1^0 z^{-1} + \dots + w_{M-1}^0 z^{-M+1}). \end{aligned} \quad (6.88)$$

В соответствии с изложенным выше

$$\sum_{l=0}^{M-1} w_l^0 = 0, \quad (6.89)$$

т. е. второй сомножитель (6.88) имеет корень $z_1 = 1$.

Пример 6.2. Найдём периодическую передаточную функцию $W_M(z)$ для фильтра с передаточной функцией

$$W(z) = \frac{k}{z-d} \quad (0 < d < 1). \quad (6.90)$$

Изображение сигнала на выходе этого фильтра при использовании (6.84) будет

$$\begin{aligned} Y_M(z) &= \frac{kz^M}{(z-d)(z^M-1)} = \\ &= kz \left[\frac{a}{z-d} + \frac{a_0 z^{M-1} + a_1 z^{M-2} + \dots + a_{M-1}}{z^M-1} \right]. \end{aligned} \quad (6.91)$$

Далее находим

$$a = \frac{d^{M-1}}{d^M-1} = -\frac{d^{M-1}}{1-d^M}. \quad (6.92)$$

$$\left. \begin{aligned} a + a_0 &= 0, \\ -a_0 d + a_1 &= 1, \\ -a_1 d + a_2 &= 0, \\ -a_2 d + a_3 &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ -a_{M-2}d + a_{M-1} &= 0, \\ -a_{M-1}d - a &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.93)$$
$$\left. \begin{aligned} a_0 &= -a, \\ a_1 &= 1 + a_0 d = 1 - ad, \\ a_2 &= a_1 d = d(1 - ad), \\ a_3 &= a_2 d = d^2(1 - ad), \\ &\dots\dots\dots \\ a_{M-2} &= a_{M-3}d = d^{M-3}(1 - ad), \\ a_{M-1} &= a_{M-2}d = d^{M-2}(1 - ad). \end{aligned} \right\} \quad (6.94)$$
$$\begin{aligned} W_M(z) &= \frac{kz^M}{z^M - 1} (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{M-1} z^{M-1}) = \\ &= \frac{z^M}{z^M - 1} (w_0 + w_1 z^{-1} + \dots + w_{M-1} z^{-M+1}), \quad (6.95) \end{aligned}$$
$$w_i = k\alpha_i \quad (i = 0, 1, \dots, M-1).$$
$$y_c = \sigma_c W(1) = \frac{1}{M} \frac{k}{1-d}. \quad (6.96)$$
$$W_M^0(z) = \frac{z^M}{z^M - 1} [(w_0 - y_c) + (w_1 - y_c)z^{-1} + \dots + (w_{M-1} - y_c)z^{-M+1}] =$$

$$= \frac{z^M}{z^M - 1} (w_0^0 + w_1^0 z^{-1} + \dots + w_{M-1}^0 z^{-M+1}), \quad (6.97)$$

где $w_i^0 = w_i - y_c$ ($i = 0, 1, \dots, M-1$). Пусть, например, $M=3$, $k=1$ и $d=0,5$. Тогда в соответствии с формулами (6.92) — (6.95) получим: $a = -2/7$, $a_0 = 2/7$, $a_1 = 8/7$, $a_2 = -4/7$, $w_0 = 2/7$, $w_1 = 8/7$ и $w_2 = 4/7$. Это дает выражение для периодической передаточной функции несимметричного вида при $M=3$:

$$W_3(z) = \frac{z^3}{z^3-1} \left(\frac{2}{7} + \frac{8}{7} z^{-1} + \frac{4}{7} z^{-2} \right).$$

Постоянное смещение на входе для формулы (6.96) $y_c = 2/3$. Поэтому $w_0^0 = w_0 - y_c = -8/21$, $w_1^0 = w_1 - y_c = 10/21$ и $w_2^0 = w_2 - y_c = -2/21$. Центрированное значение периодической передаточной функции несимметричного вида при $M=3$

$$W_3^0(z) = \frac{z^3}{z^3-1} \left(-\frac{8}{21} + \frac{10}{21} z^{-1} - \frac{2}{21} z^{-2} \right).$$

Знание периодических передаточных функций несимметричного вида $W_M(z)$ и $W_M^0(z)$ позволяет просто рассчитать периодический режим на выходе линейного фильтра, пользуясь принципом суперпозиции. Пусть задан произвольный входной периодический сигнал, изображение которого

$$E(z) = \frac{z^M}{z^M-1} E_M(z) = \frac{z^M}{z^M-1} [e_0 + e_1 z^{-1} + \dots + e_{M-1} z^{-M+1}], \quad (6.98)$$

где e_i ($i = 0, 1, \dots, M$) представляют собой дискреты входного сигнала на интервале $0-M$. Рассматривая периодически повторяющуюся одиночную дискрету e_0 , можно найти изображение периодической реакции на выходе как произведение

$$Y_{0M}(z) = e_0 W_M(z). \quad (6.99)$$

Аналогичным образом для дискреты e_1 имеем

$$Y_{1M}(z) = e_1 z^{-1} W_M(z). \quad (6.100)$$

Полная периодическая реакция от всех дискрет входного процесса

$$Y_M(z) = (e_0 + e_1 z^{-1} + \dots + e_{M-1} z^{-M+1}) W_M(z) = E_M(z) W_M(z). \quad (6.101)$$

При этом следует иметь в виду периодичность входного процесса, т. е. $y[n+M] = y[n]$. Поэтому, представив

выходной периодический процесс в виде

$$Y(z) = \frac{z^M}{z^M - 1} Y_M(z),$$

можно найти его изображение $Y_M(z)$ на интервале $0 - M$ в результате операции умножения

$$Y_M(z) = \sum_{j=0}^{M-1} e_j z^{-j} \sum_{q=0}^{M-1} w_q z^{-q} = \sum_{i=0}^{M-1} y_i z^{-i}, \quad (6.102)$$

где

$$\left. \begin{aligned} y_i &= \prod_{i, q=0}^{M-1} e_j w_q; \quad i+j=q, \quad q+M; \\ z^{-i-M} &= z^{-j}; \quad z^{-q-M} = z^{-q}. \end{aligned} \right\} \quad (6.103)$$

Так, например, в рассмотренном примере 6.2 были найдены дискреты w_0 , w_1 и w_2 . Если на входе действует периодический сигнал, изображение которого на интервале $0 - M$

$$E_M(z) = e_0 + e_1 z^{-1} + e_2 z^{-2},$$

то на выходе будет существовать периодический сигнал

$$Y_0(z) = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} = (e_0 w_0 + e_1 w_2 + e_2 w_1) + \\ + (e_0 w_1 + e_1 w_0 + e_2 w_2) z^{-1} + (e_0 w_2 + e_1 w_1 + e_2 w_0) z^{-2}.$$

Формулу умножения (6.103) можно записать в матричном виде:

$$y = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{M-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_0 & w_{M-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & w_1 \\ w_1 & w_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & w_2 \\ w_2 & w_1 & w_0 & \cdot & \cdot & \cdot & w_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{M-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & w_0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{M-1} \end{Bmatrix}. \quad (6.104)$$

Введя матрицы-столбцы $y = \|y_i\|$ и $e = \|e_j\|$, а также квадратную матрицу $w = \|w_{ij}\|$ размером $M \times M$, вид которых ясен из формулы (6.104), можно определить совокупность ординат периодического режима на выходе как результат матричного произведения $y = we$. Квадратная матрица w может быть составлена на основании периодической передаточной функции $W_M(z)$. Формула (6.104) представляет, по существу, формулу свертки. Для

рассмотренного примера (6.2) имеем

$$w = \begin{bmatrix} w_0 & w_2 & w_1 \\ w_1 & w_0 & w_2 \\ w_2 & w_1 & w_0 \end{bmatrix}.$$

Поэтому решение может быть записано в виде

$$y = we = \begin{bmatrix} w_0 e_0 + w_2 e_1 + w_1 e_2 \\ w_1 e_0 + w_0 e_1 + w_2 e_2 \\ w_2 e_0 + w_1 e_1 + w_0 e_2 \end{bmatrix}.$$

Аналогичные зависимости могут быть получены и для централизованного процесса на выходе $Y_M^0(z)$ через передаточную функцию $W_M^0(z)$ и матричное произведение $y^0 = w^0 e$, где $w^0 = \|w_{ij}^0\|$ — квадратная матрица, образованная из коэффициентов передаточной функции по типу формулы (6.104), $y^0 = \|y_i^0\|$ — матрица-столбец дискрет централизованного периодического режима на выходе.

В случае симметричного периодического входного режима, когда $e[n+N] = -e[n]$ и $M=2N$, его изображение

$$\begin{aligned} E^0(z) &= \frac{z^N}{z^N + 1} (e_0 + e_1 z^{-1} + \dots + e_{N-1} z^{-N+1}) = \\ &= \frac{z^{2N}}{z^{2N} - 1} (e_0 + e_1 z^{-1} + \dots + e_{N-1} z^{-N+1} - \\ &\quad - e_0 z^{-N} - \dots - e_{N-1} z^{-2N+1}). \end{aligned} \quad (6.105)$$

Для нахождения реакции линейного фильтра на подобный сигнал в принципе возможно использование передаточных функций $W_M(z)$ и $W_M^0(z)$. Однако эта задача проще решается посредством использования периодической передаточной функции симметричного вида, представляющей собой изображение установившейся периодической реакции дискретной системы на единичную функцию $\delta_N[n]$, изображенную на рис. 6.17, б.

В соответствии с формулой (6.79) для фильтра с передаточной функцией $W(z)$

$$\begin{aligned} W_N(z) &= W(z) \frac{z^N}{z^N + 1} - \frac{z P_0(z)}{(z-1)^r} - \frac{z P_1(z)}{Q_1(z)} = \\ &= \frac{z^N}{z^N + 1} (w_0 + w_1 z^{-1} + \dots + w_{N-1} z^{-N+1}). \end{aligned} \quad (6.106)$$

Центрированное значение этой передаточной функции совпадает с тем, что дает формула (6.106), т. е. $W_N^0(z) = W_N(z)$. Это определяется исключением всех полюсов $z=1$ из изображения выходного сигнала.

Установившуюся периодическую реакцию линейного дискретного фильтра на произвольный симметричный периодический сигнал можно найти по матричному равенству $y = we$, где $y = \|y_i\|$ и $e = \|e_j\|$ — матрицы-столбцы входных и выходных величин размером $N \times 1$, а прямоугольная матрица коэффициентов размером $N \times N$

$$w = \begin{vmatrix} w_0 & -w_{N-1} & -w_{N-2} & \dots & -w_1 \\ w_1 & w_0 & -w_{N-1} & \dots & -w_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{N-1} & w_{N-2} & w_{N-3} & \dots & w_0 \end{vmatrix}. \quad (6.107)$$

В частном случае симметричной прямоугольной волны на входе, когда $e = \|e_0, e_0, \dots, e_0\|$, дискреты периодического режима на выходе будут равны сумме коэффициентов соответствующей строчки (6.107), умноженной на величину e_0 .

Условия замыкания. Для того чтобы периодический режим рассматриваемого вида мог бы существовать, необходимо выполнение условия замыкания. Оно сводится здесь к тому, чтобы движение на выходе системы, т. е. $y(t)$, вызывало бы появление на входе канала закона изменения сигнала ошибки $e[n]$ рассматриваемого вида.

Это поясняет рис. 6.18.

Он соответствует рассмотрению двух видов периодических режимов относительно точки 2 (рис. 6.7, а).

Рис. 6.18, а соответствует случаю существования на входе простейшего симметричного периодического режима в пределах единицы младшего разряда (рис. 6.8). Пусть

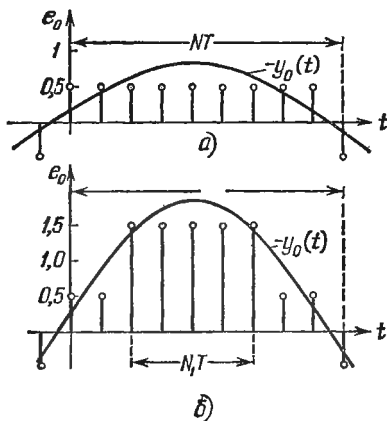


Рис. 6.18. Примеры конфигураций периодических режимов.

амплитуда непрерывного гармонического входного сигнала $y_0(t) = \delta_1^{-1} y(t)$ лежит в пределах $0 < A\delta_1^{-1} < 1$, где δ_1 — цена единицы младшего разряда входного преобразователя. Тогда последовательность дискрет на его выходе $e_0[n]$ будет иметь вид прямоугольной волны (рис. 6.18, а), высота которой равна 0,5. При этом фазовый сдвиг для непрерывного входного сигнала должен лежать в пределах $0 < \varphi < \pi N^{-1}$. Эти условия являются достаточными для того, чтобы на выходе преобразователя существовал бы сигнал принятой конфигурации.

Указанное условие для фазового сдвига входного сигнала эквивалентно наложению условия на фазовый сдвиг выходного сигнала канала в виде $0 < \pi + \psi < \pi N^{-1}$, которое сводится к условию для запаса по фазе $\mu = \pi + \psi$ в виде $0 < \mu < \pi N^{-1}$.

Более строго, сигнал указанной конфигурации будет существовать при выполнении достаточного и необходимого условия

$$1 > e_0[r] = -y_0[r] = \frac{A}{\delta_1} \sin\left(\frac{\pi}{N} r + \varphi\right) > 0, \quad (6.108)$$

где $r = 0, 1, \dots, N-1$, и, соответственно,

$$-1 < e_0[l] = \frac{A}{\delta_1} \sin\left(\frac{\pi}{N} l + \varphi\right) < 0, \quad (6.109)$$

где $l = N, N+1, \dots, 2N-1$. Заметим, что случаи $\varphi = 0$ (или $\mu = 0$) и $\varphi = \pi N^{-1}$ (или $\mu = \pi N^{-1}$) относятся к неопределенным и требуют дальнейшего исследования с учетом дополнительных факторов: малых параметров, гистерезисной петли в характеристике преобразователя H - K и др.

Если в результате прохождения этого сигнала через канал управления на выходе будет существовать изменение управляемой величины $y_0(t)$, показанное на рис. 6.18, а сплошной линией, то условие замыкания выполняется и подобный режим существовать может.

Непрерывный сигнал на выходе системы может и не быть гармоническим. Однако необходимо сохранение главного условия, чтобы этот сигнал после прохождения через нелинейный элемент (входной преобразователь) генерировал сигнал той же формы, которая была принята во входном сигнале канала управления. В этом и заключается условие замыкания и условие возможности длительного существования периодического режима данной формы.

Однако следует обратить внимание на то обстоятельство, что в пределах некоторой возможной зоны отклонения $y_0(t)$ от кривой, изображенной на рис. 6.18, а, режим на выходе преобразователя, в соответствии с рис. 6.7, б, изменяться не будет. Это означает, что система оказывается фактически разомкнутой в пределах возможной зоны изменения процесса $y_0(t)$, не нарушающего характера изменения выходного сигнала преобразователя.

Поэтому вопрос устойчивости возможного периодического режима должен рассматриваться применительно к разомкнутому каналу управления. Если этот канал устойчив, что требует устойчивости объекта управления, то возможный периодический режим будет также устойчив. Если объект управления нейтрально-устойчив или неустойчив, то рассматриваемый возможный режим не может существовать длительно вследствие наличия медленных уводящих движений. Поэтому возможные периодические режимы оказываются неустойчивыми и в системе будет существовать сложный квазипериодический режим с непрерывным переходом от одного возможного вида простейшего режима к другому.

Изображенный на рис. 6.18, б симметричный периодический режим соответствует более сложному случаю, когда для амплитуды гармонических колебаний должно выполняться условие $\delta_1 < A < 2\delta_1$. Кроме условия $0 < \varphi < \pi N^{-1}$ здесь должны выполняться еще два неравенства:

$$\left. \begin{aligned} 2 &> \frac{A}{\delta_1} \cos\left(\frac{\pi N_1}{2N} + \varphi\right) > 1, \\ 1 &> \frac{A}{\delta_1} \cos\left(\frac{\pi N_1}{2N} + \frac{\pi}{N} + \varphi\right) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.110)$$

Для каждого конкретных значений A и φ могут быть определены возможные значения N и N_1 , и, наоборот, по заданным значениям N и N_1 можно определить пределы возможных значений A и φ . Для этой конфигурации сигнала также могут быть сформулированы достаточные и необходимые условия применительно к дискретным значениям $e_0[n]$, аналогичные (6.108) и (6.109).

При исследовании возможных несимметричных режимов следует учесть, что начало отсчета в нелинейной характеристике входного преобразователя (рис. 6.7, а),

соответствующее установившемуся состоянию, может сдвигаться в любую точку наклонной линеаризованной характеристики, например в точку 1. Это показано на рис. 6.19. Тогда возможные несимметричные режимы должны быть такими, чтобы среднее значение выходной величины было нулевым. Это правило и определяет требуемую точку сдвига начала отсчета на нелинейной характеристике при задании некоторого несимметричного режима. Дальнейший расчет, по сути дела, не отличается от случая

расчета симметричных режимов. Здесь также следует проверить условие замыкания, как необходимое условие возможности существования подобного режима.

Во всех случаях расчета возможных симметричных и несимметричных режимов нет необходимости построения всей кривой $y_0(t)$, как это показано на рис. 6.18 и 6.19. Достаточно, если будет найден периодический режим для дискретных точек $t = nT$, т. е. решетчатая функция $y_0[n]$. В соответствии с изложенным выше это может быть сделано точно по формуле (6.104). Возможное

упрощение методики расчета заключается в том, что точным методом можно ограничиться при расчете прохождения периодического сигнала через дискретную часть канала (рис. 6.1). При нахождении периодического режима для выходного сигнала ЦВМ $x_0[n]$ нужно исходить из передаточной функции $D(z)$. Тогда периодическая передаточная функция несимметричного вида (6.87) будет здесь равна

$$W_M(z) = D(z) \frac{z^M}{z^M - 1} - \frac{zP_0(z)}{(z-1)^r} - \frac{zP_1(z)}{Q_1(z)}. \quad (6.111)$$

В отличие от формулы (6.87), здесь r — число интеграторов в дискретной части системы, $Q_1(z)$ — полином, определяемый полюсами $D(z)$, лежащими внутри круга единичного радиуса. Так как степень знаменателя $D(z)$ может быть значительно ниже степени знаменателя $W(z)$, то расчеты здесь могут быть значительно более простыми.

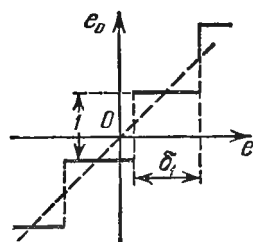


Рис. 6.19. Статическая характеристика входного преобразователя при наличии сдвига,

Аналогичным образом может быть записана формула для $W_M^0(z)$ и $W_N(z)$.

После нахождения периодического режима на выходе ЦВМ может быть найден периодический режим на выходе экстраполятора $x_1(t)$ без учета пока наличия второго квантующего элемента (рис. 6.1).

В случае экстраполятора нулевого порядка это достигается фиксацией входной его величины на период дискретности и умножением на цену единицы младшего разряда выходного преобразователя. На рис. 6.20, а показан пример периодического режима $x_0[n]$ на входе экстраполятора нулевого порядка, а на рис. 6.20, б — получающийся при этом периодический режим на его выходе. Для получения выходного сигнала экстраполятора первого порядка следует учесть, что его дискретная передаточная функция для фиксированных точек $t = nT$

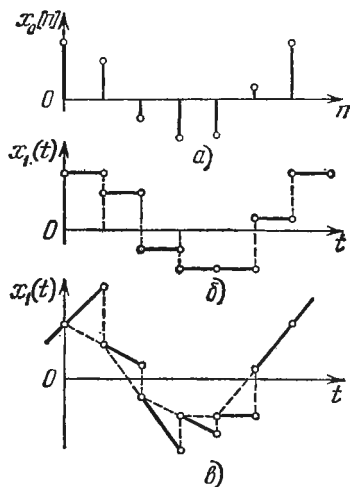


Рис. 6.20. Получение выходного сигнала экстраполятора.

$$W_0(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)^2 \approx \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2 T} \right\} = 1. \quad (6.112)$$

Поэтому значение выходной функции $x_1(t)$ может быть найдено, если умножить дискреты сигнала на выходе ЦВМ на цену единицы младшего разряда выходного преобразователя, а затем провести прямые линии, соответствующие уравнению первого порядка, под углом, который определяется первой обратной разностью $\nabla x_1[n]$. Это показано на рис. 6.20, в.

Найденная непрерывная периодическая функция $x_1(t)$ действует на входе непрерывной части системы с передаточной функцией $W_n(p)$. Расчет периодического режима на выходе, т. е. нахождение непрерывной величины $y(t)$, может быть сделан известными методами исследования

линейных непрерывных систем. В частности, можно разложить входную функцию $x_1(t)$ на гармоники и найти выходной сигнал, удерживая в решении одну, две или более гармоник.

Учет влияния второго квантующего элемента. Выходной преобразователь $K-H$ (рис. 6.1) может быть учтен в излагаемом методе расчета. Для этого необходимо пропустить через нелинейную характеристику преобразователя выходной сигнал ЦВМ.

Периодическая составляющая выходной величины преобразователя по аналогии с рис. 6.7, а может быть записана в виде

$$x^0[n] = \left(\frac{1}{2} - \Delta + E\{x^0[n]\} \right) \delta \operatorname{sign} x^0[n]. \quad (6.113)$$

Здесь $x^0[n]$ — периодическая составляющая выходной величины ЦВМ, Δ — смещение начала отсчета относительно точки 2 (рис. 6.7, а), E соответствует операции выделения целой части. В частном случае, тогда начало отсчета перемещается в точку 2, смещение $\Delta = 0$. Это соответствует симметричному периодическому режиму. Найденное значение $x^0[n]$ с учетом округления, вносимого вторым квантующим элементом, должно использоваться для нахождения сигнала на выходе экстраполятора (рис. 6.20).

Пример 6.3. Пусть в системе угловой стабилизации передаточная функция непрерывной части $W_n(p) = k_n p^{-2}$, где $k_n = 40^\circ/\text{В} \cdot \text{с}^2$, цена единицы младшего разряда входного преобразователя $\delta_1 = 12$ угл.мин, цена единицы младшего разряда выходного преобразователя $\delta = 0,1$ В, программа ЦВМ определяется передаточной функции

$$D(z) = \frac{D_1(z)}{D_2(z)} = \frac{z-a}{(1-a)z},$$

где $a = 0,92$, период дискретности $T = 0,04$ с. Определим возможные симметричные режимы, соответствующие случаю, изображенному на рис. 6.7, б. Рассмотрим периодический режим в виде прямоугольной волны (рис. 6.18, а), соответствующий условию для амплитуды колебаний $0 < A < \delta_1$. Изображение решетчатой функции на входе ЦВМ

$$E_0(z) = \frac{1}{2} \frac{z^N}{z^N + 1} (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-N+1}).$$

Изображение решетчатой функции на выходе ЦВМ

$$X_0(z) = D(z) E(z) = \frac{1}{2} \frac{z-a}{(1-a)z} \frac{z^N}{z^N+1} (1+z^{-1}+\dots+z^{-N+1}).$$

Учитывая единственный полюс $z_1=0$ передаточной функции $D(z)$, имеем в соответствии с (6.78)

$$\frac{zP_1(z)}{Q_1(z)} = -\frac{a}{2(1-a)}.$$

Периодическая составляющая

$$\begin{aligned} X_0^u(z) &= X_0(z) - \frac{zP_1(z)}{Q_1(z)} = \frac{1}{2} \frac{z^N}{z^N+1} \times \\ &\times \left(\frac{1+a}{1-a} + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-N+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{z^N}{z^N+1} (24 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-N+1}). \end{aligned}$$

На выходе преобразователя $K-H$ (рис. 6.1) в соответствии с формулой (6.113) при $\Delta=0$ будет

$$X^0(z) = \frac{\delta}{2} \frac{z^N}{z^N+1} (25 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-N+1}).$$

Введя фиксацию на период и раскладывая непрерывный сигнал $x_1(t)$ в ряд, имеем для первой гармоники амплитуду

$$A_1 = \frac{2\delta}{\pi} \sqrt{1 + 4c(1+c) \sin^2 \frac{\pi}{2N}}$$

и начальную фазу

$$\psi_1 = \operatorname{arctg} \frac{c \sin \frac{\pi}{N}}{1 + 2c \sin^2 \frac{\pi}{2N}} \quad \left(c = \frac{a}{1-a} = 11,5 \right).$$

Для непрерывной части системы частотная передаточная функция для фиксированных частот $\omega = \pi N^{-1} T^{-1}$ может быть записана в виде

$$W_H \left(j \frac{\pi}{NT} \right) = - \frac{k_H N^2 T^2}{n^2}.$$

В результате для первой гармоники входного сигнала амплитуда изменения управляемой величины

$$A = \frac{2\delta k_H N^2 T^2}{\pi^3} \sqrt{1 + 4c(1+c) \sin^2 \frac{\pi}{2N}},$$

а начальная фаза $\varphi = -\psi_1$.

В таблице 6.1 показаны результаты расчета для некоторых значений относительного полупериода N . Из таблицы видно, что сформулированное выше условие замыкания (6.109) выполняется для $N=2$ и 3. При $N>3$ амплитуда колебаний удовлетворяет необходимому требованию, но фазовые сдвиги оказываются больше допустимых значений, равных πN^{-1} . Так как объект нейтрально-устойчив, то возможные периодические режимы будут неустойчивыми.

Таблица 6.1

N	1	2	3	4	5
A , угл. мин	0,6	1,6	2,7	3,6	4,4
φ	0°	43°	56°	59°	64°

Проверим точным методом справедливость использования гармонической линеаризации при расчете прохождения сигнала через непрерывную часть, например, для случая $N=2$. Изображение периодического режима на входе непрерывной части (совместно с экстраполятором)

$$X^0(z) = \frac{\delta}{2} \frac{z^2}{z^2+1} (25 + z^{-1}) = \frac{z^2}{z^2+1} (1,25 + 0,05z^{-1}) [B].$$

Дискретная передаточная функция непрерывной части

$$W_0(z) = \frac{z-1}{z} \approx \left\{ \frac{k_H}{p^3} \right\} = \frac{k_H T^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2}.$$

Изображение выходной величины при действии на входе единичной периодической функции симметричного вида (6.86) в случае $N=2$

$$Y_N(z) = \frac{k_H T^2}{2} \frac{z^2}{z^2+1} \frac{z+1}{(z-1)^2} = \frac{k_H T^2}{4} \left[-\frac{z^2+z}{z^2+1} + \frac{z^2+z}{(z^2-1)^2} \right].$$

Отсюда периодическая передаточная функция симметричного вида при $N=2$

$$W_2^*(z) = \frac{k_H T^2}{4} \frac{z^2}{z^2 + 1} (-1 - z^{-1}).$$

Матрица коэффициентов (6.107)

$$\begin{aligned} w &= \begin{vmatrix} w_0 & -w_1 \\ w_1 & w_0 \end{vmatrix} = \frac{k_H T^2}{4} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -0,96 & +0,96 \\ -0,96 & -0,96 \end{vmatrix} [\text{угл. мин./В}]. \end{aligned}$$

Значения дискрет на выходе:

$$\begin{aligned} y_0 &= w_0 e_0 - w_1 e_1 = -0,96 \cdot 1,25 + 0,96 \cdot 0,05 = \\ &= -1,15 \text{ угл. мин,} \\ y_1 &= w_1 e_0 + w_0 e_1 = -0,96 \cdot 1,25 - 0,96 \cdot 0,05 = \\ &= -1,25 \text{ угл. мин.} \end{aligned}$$

Эти данные близки к тем, которые были получены приближенным методом.

Проверка более сложных конфигураций сигнала на входе преобразователя $H-K$ показывает в данном примере невозможность их существования.

§ 6.4. Определение требований к входным и выходным преобразователям

Влияние входных и выходных преобразователей на динамику и точность цифровой автоматической системы будет сказываться тем меньше, чем большее число разрядов они содержат, т. е. чем меньше будут цены единиц младшего разряда. Если в проектируемой системе удерживать общий коэффициент усиления разомкнутой системы, определяемый по линеаризованным характеристикам преобразователей (рис. 2.3), на неизменном уровне, например, по результатам динамического синтеза, то изменение цен единиц младшего разряда на входе и выходе ЦВМ не вызывает изменения характера возможных периодических режимов и получающихся отклонений в цифровой (относительной) форме. Лишь при переходе к действительным отклонениям при умножении относительных величин на соответствующие цены единиц младшего разряда

для абсолютных отклонений будут получаться отличающиеся результаты. Это положение объясняется тем, что всякое изменение цены единицы младшего разряда входного преобразователя должно сопровождаться пропорциональным изменением цены единицы младшего разряда выходного преобразователя, что необходимо для сохранения результирующего коэффициента передачи цифровой части системы $k_{ц} = \delta\delta_1^{-1}$, где δ_1 и δ — цены единиц младшего разряда на входе и выходе ЦВМ.

Типичная структура разомкнутого канала цифровой системы управления изображена на рис. 6.21. Коэффициент передачи вспомогательной непрерывной части обозначен $k_{в}$. Она включает в себя такие элементы, как

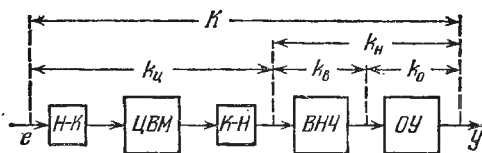


Рис. 6.21. Типичная структура разомкнутого канала управления.

усилители, исполнительные устройства, корректирующие устройства и т. п. Коэффициент передачи собственно объекта управления обозначен k_0 .

В рассматриваемой схеме в принципе возможно нарушить требуемое условие $\delta\delta_1^{-1} = \text{const}$ за счет изменения коэффициента передачи непрерывной части так, чтобы сохранить при этом неизменным общий коэффициент усиления канала управления $K = \text{const}$. Однако это вызовет лишь перераспределение коэффициентов передачи в канале до объекта управления. Так как коэффициент передачи самого объекта обычно изменить нельзя, то условие $K = \text{const}$ приводит к условию $k_{ц}k_{в} = \text{const}$. Это означает, что при изменении цен единиц младшего разряда останется неизменным отношение цены единицы младшего разряда выходного преобразователя, пересчитанной на вход объекта управления $\delta_0 = \delta k_{в}$, к цене единицы младшего разряда входного преобразователя δ_1 , т. е. будет иметь место условие $\delta_0\delta_1^{-1} = \text{const}$. С точки зрения расчета возможных пе-

риодических режимов последнее условие не отличается от принятого выше условия $\delta\delta_1^{-1} = \text{const}$.

Сформулированное положение оказывается весьма важным, так как позволяет производить расчет периодических режимов, отвлекаясь от действительных значений цен единиц младшего разряда в цифровой системе и рассматривая нелинейную характеристику преобразователей в относительной (цифровой) форме (рис. 6.2). Переход к действительным значениям амплитуд колебаний может быть затем сделан умножением на соответствующие цены единиц младших разрядов. Это позволяет учесть влияние дополнительной ошибки от периодических режимов при определении требований к преобразователям.

Выполнение условий согласования. В процессе расчета линеаризованной системы управления (главы 4 и 5) определяется общий коэффициент усиления разомкнутой системы K_r , где r — степень астатизма. Рассмотрим вначале случай, когда ЦВМ не вводит интегралов в закон управления. Тогда для общего коэффициента усиления разомкнутой системы должно выполняться равенство

$$K_r = k_{\text{ц}} k_{\text{н}} = \frac{\delta}{\delta_1} k_{\text{н}}, \quad (6.114)$$

где $k_{\text{н}}$ — коэффициент передачи непрерывной части от выхода преобразователя $K-H$ до выхода объекта управления (рис. 6.21).

С другой стороны, можно записать условие того, чтобы на выходе объекта обеспечивалось движение с максимальной по абсолютному значению r -й производной от управляемой величины:

$$\delta(2^{\alpha_0} - 1) k_{\text{н}} \geq y_{\text{max}}^{(r)}. \quad (6.115)$$

Символом α_0 обозначено число разрядов, при котором обеспечивается получение требуемых максимальных значений r -й производной управляемой величины в статике, т. е. в установившемся режиме. Это число разрядов преобразователя назовем *основным*.

В статических системах $y_{\text{max}}^{(r)} = y_{\text{max}}$ соответствует максимальному отклонению на выходе, которое должно обеспечиваться. При астатизме первого порядка $y_{\text{max}}^{(r)} = \dot{y}_{\text{max}}$ соответствует максимальной скорости, при астатизме вто-

рого порядка — максимальному ускорению и т. д. Следует заметить, что определение $y_{\max}^{(r)}$ надо делать с учетом необходимости парирования действующих в системе регулирования возмущений. Это было рассмотрено в § 5.2.

Из формул (6.114) и (6.115) можно найти условие, определяющее минимальное основное число разрядов выходного преобразователя, необходимое по условию сопряжения:

$$\left. \begin{aligned} 2^{\alpha_0} - 1 &\geq \frac{y_{\max}^{(r)}}{\delta_1 K_r}, \\ \alpha_0 &\geq 3,3 \lg \left(1 + \frac{y_{\max}^{(r)}}{\delta_1 K_r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.116)$$

Так, например, если в цифровой следящей системе с астатизмом первого порядка общий коэффициент усиления (добротность по скорости) $K_1 = 100 \text{ с}^{-1}$, величина младшего разряда входного преобразователя $\delta_1 = 1$ угл. мин и требуемая эквивалентная скорость отработки с учетом парирования нагрузочного момента составляет $\Omega_{\max} = 10$ град/с, то основное число разрядов выходного преобразователя должно удовлетворять неравенству

$$\alpha_0 > 3,3 \lg \left(1 + \frac{10 \cdot 60}{1 \cdot 100} \right) = 2,7.$$

Снижение числа разрядов может быть достигнуто увеличением значения единицы младшего разряда входного преобразователя δ_1 .

Формула (6.116) была получена из условий согласования в статике. Однако для улучшения переходных процессов в системе целесообразно несколько расширить зону линейности для линеаризованной характеристики преобразователя и принять полное число разрядов $\alpha > \alpha_0$, т. е. увеличить максимальный сигнал, который может обеспечиваться на выходе преобразователя $H - K$, за счет добавления одного или двух разрядов сверх того, что дает формула (6.116).

Если на ЦВМ возлагается задача введения интеграла в закон регулирования, то в формуле (6.116) должны быть использованы значения K_{r-1} и $y_{\max}^{(r-1)}$. Здесь K_{r-1} — требуемый общий коэффициент усиления разомкнутой системы без учета введения интеграла (определяется не

по первой, а по второй низкочастотной асимптоте желаемой л. а. х.), а $y_{\max}^{(r-1)}$ — максимальное требуемое значение $(r-1)$ -й производной управляемой величины с учетом требований по парированию возмущений.

Ограничение зоны нечувствительности. Для характеристики, изображенной на рис. 2.3, в, зона нечувствительности составляет $\delta_1/2$. Однако с учетом сказанного при построении этой характеристики (см. также рис. 2.3, г) зону нечувствительности следует принять равной $e_n = \delta_1$. Подставляя последнее выражение в (6.116), можно получить условие для выбора основного числа разрядов выходного преобразователя при заданной его зоне нечувствительности:

$$\alpha_0 \geq 3,3 \lg \left(1 + \frac{y_{\max}^{(r)}}{e_n K_r} \right). \quad (6.117)$$

Необходимо отметить, что действительная зона нечувствительности в системе регулирования может отличаться от величины e_n за счет действия возмущений (например, нагрузочного момента от сил сухого трения в следящей системе воспроизведения угла).

Ограничение амплитуды периодических режимов. Если считать, что периодические режимы ограничены единицей младшего разряда входного преобразователя, то возможный симметричный периодический режим на входе ЦВМ будет иметь форму меандра (рис. 6.8). Тогда для амплитуды колебаний управляемой величины можно записать условие $a < 0,5 \delta_1$. Это же условие будет иметь место и при несимметричном режиме. Однако действительная амплитуда колебаний может быть значительно меньше ее предельного значения $0,5\delta_1$.

Для оценки ее величины можно воспользоваться следующим приближенным способом. При произвольном значении полупериода симметричных колебаний N амплитуда первой гармоники входного сигнала

$$a_1 \approx \frac{2\delta_1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2N}. \quad (6.118)$$

Амплитуда колебаний на выходе канала управления

$$a_2 \approx a_1 |W^*(j\lambda_N)| = \frac{2\delta_1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2N} |W^*(j\lambda_N)|. \quad (6.119)$$

Здесь

$$\lambda_N \approx \omega_N = \frac{\pi}{NT} \quad (N = 1, 2, \dots, q) \quad (6.120)$$

соответствует частотам возможных периодических режимов. Так, для рассмотренного примера 6.3 передаточная функция разомкнутой системы имела вид

$$W(z) = \frac{\delta}{\delta_1} \frac{z-a}{(1-a)z} \frac{k_{\text{н}} T^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2}.$$

Частотная передаточная функция

$$W^*(j\lambda) = \frac{\delta}{\delta_1} \frac{1+j\lambda\tau}{1+j\lambda\frac{T}{2}} \frac{k_{\text{н}} \left(1-j\lambda\frac{T}{2}\right)}{(j\lambda)^2} = \frac{20(1+j\lambda\tau) \left(1-j\lambda\frac{T}{2}\right)}{(j\lambda)^2 \left(1+j\lambda\frac{T}{2}\right)},$$

где постоянная времени

$$\tau = \frac{1+a}{1-a} \frac{T}{2} = \frac{1+0,92}{1-0,92} \frac{0,04}{2} = 0,48 \text{ с.}$$

Рассмотрим возможный периодический режим при $N=2$. Тогда псевдочастота

$$\lambda_N \approx \frac{\pi}{2T} = \frac{3,14}{2 \cdot 0,04} = 39,2 \text{ с}^{-1}.$$

В соответствии с (6.119) амплитуда колебаний на выходе

$$a_2 \approx \frac{2 \cdot 12}{3,14} \sin 45^\circ \cdot \frac{20 \sqrt{1+39,2^2 \cdot 0,48^2}}{39,2^2} = 1,33 \text{ угл. мин.}$$

Полученный результат близок к тому, который был получен в § 6.3 точным расчетом. Однако для расчета по формуле (6.119) требуется знание относительного полупериода N . Рассмотрим поэтому задачу определения амплитуды возможного периодического режима в несколько более общей постановке. Ограничимся случаем учета одного квантующего элемента и использованием типовых л. а. х. симметричного вида, которые были рассмотрены в § 5.4.

На рис. 6.22 построены типовые асимптотические л. а. х. симметричного вида. Кривая 1 соответствует статической системе, кривая 2 — системе с астатизмом первого порядка и кривая 3 — системе с астатизмом вто-

рого порядка. На том же рисунке изображена асимптотическая л. а. х., соответствующая множителю

$$\sin \frac{\pi}{2N} \approx \sin \frac{\lambda_N T}{2}, \quad (6.121)$$

при обобщении на случай, когда полупериод N может быть дробным числом. Эта л. а. х. состоит из двух асимптот, одна из которых имеет наклон $+20$ дБ/дек и соответствует частотам $0 < \lambda < 2T^{-1}$, когда синус может быть заменен углом, а вторая совпадает с осью нуля

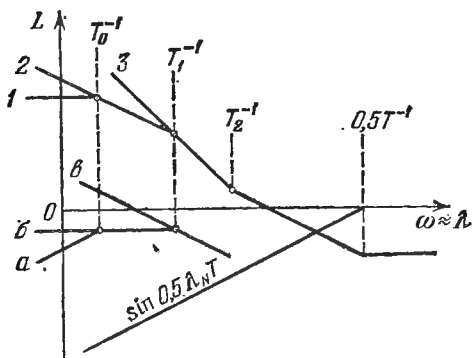


Рис. 6.22. К расчету амплитуд возможных периодических режимов.

децибел и соответствует частотам $2T^{-1} < \lambda < \pi T^{-1}$. Амплитуда первой гармоники колебаний пропорциональна сумме ординат двух л. а. х., соответствующих некоторой частоте $\omega_N \approx \lambda_N$. Последнее равенство справедливо для частот $\omega_N < 2T^{-1}$. Однако именно на этих частотах наблюдается наибольшая амплитуда колебаний.

На рис. 6.22 построены асимптотические л. а. х., соответствующие сумме ординат двух л. а. х. Кривая a соответствует статической системе, кривая b — астатизму первого порядка и кривая β — астатизму второго порядка. Из кривой a следует, что в статических системах наибольшие амплитуды автоколебаний будут наблюдаться в некотором интервале частот периодических или квазипериодических режимов. Этот интервал совпадает с интервалом частот, в котором проходит вторая асимптота

типовой л. а. х. В этом интервале формула (6.119) дает

$$a_2 \approx \frac{2\delta_1}{\pi} \frac{\pi}{2N} \frac{K_0}{\omega_N T_0} = \frac{2\delta_1}{\pi} \frac{\omega_N T}{2} \frac{K_0}{\omega_N T_0} = \frac{\delta_1 K_0 T}{\pi T_0}. \quad (6.122)$$

Здесь K_0 — общий коэффициент усиления канала управления, T_0 — первая большая постоянная времени, формирующая типовую л. а. х. Используя формулу (6.115), превращенную в равенство, имеем из (6.122)

$$a_2 \approx \frac{y_{\max} T}{\pi T_0 (2^{\alpha_0} - 1)}, \quad (6.123)$$

где $y_{\max}$ — максимальное значение управляемой величины, которое должно обеспечиваться на выходе системы управления. Из формулы (6.122) можно получить условие того, чтобы амплитуда колебаний не превосходила бы половины единицы младшего разряда:

$$K_0 T < \frac{\pi}{2} T_0. \quad (6.124)$$

Условие баланса фаз, сформулированное в § 6.3, можно записать в виде

$$\mu(\lambda_N) < \frac{\pi}{N}, \quad (6.125)$$

где $\mu(\lambda_N) = \pi + \psi(\lambda_N)$ — запас по фазе в разомкнутой системе на частоте λ_N . Фазовый сдвиг $\psi(\lambda_N)$ может быть найден для каждой конкретной передаточной функции (см. § 5.3 и § 5.4). Формула (6.120) определяет возможные полупериоды симметричных колебаний $N = \pi(\lambda_N T)^{-1}$.

Из кривой *б* (рис. 6.22) следует, что в системе с астатизмом первого порядка максимальные амплитуды колебаний достигаются при частотах, соответствующих нахождению на первой асимптоте типовой л. а. х. Аналогично изложенному выше, здесь также можно найти максимальное возможное значение амплитуды колебаний

$$a_2 \approx \frac{2\delta_1}{\pi} \frac{\pi}{2N} \frac{K_1}{\lambda_N} = \frac{\delta_1 K_1 T}{\pi}, \quad (6.126)$$

где K_1 — общий коэффициент усиления канала управления. Аналогично изложенному выше, формула (6.126) может быть приведена к виду

$$a_2 \approx \frac{\dot{y}_{\max} T}{\pi (2^{\alpha_0} - 1)}, \quad (6.127)$$

где $\dot{y}_{\max}$ — максимальное значение производной управляемой величины (скорости), которое должно обеспечиваться на выходе системы. Условие того, чтобы амплитуда колебаний не превосходила бы половины единицы младшего разряда:

$$K_1 T < \frac{\pi}{2}. \quad (6.128)$$

Из кривой *в* (рис. 6.22) следует, что в системе с астатизмом второго порядка амплитуда колебаний оказывается тем больше, чем больше значение N . Максимальное значение амплитуды из (6.119)

$$a_{2\max} \approx \frac{2\delta_1}{\pi} \frac{\pi}{2N_{\max}} \frac{K_2}{\omega_N^2} = \frac{\delta_1 K_2 T^2 N_{\max}}{\pi^2}, \quad (6.129)$$

где K_2 — общий коэффициент усиления разомкнутой системы с астатизмом второго порядка. Максимальное значение относительного полупериода $N_{\max}$ должно быть определено из условия баланса фаз (6.125). Формула (6.129) может быть также представлена в виде

$$a_{2\max} \approx \frac{\ddot{y}_{\max} T^2}{\pi^2 (2^{\alpha_0} - 1)}, \quad (6.130)$$

где $\ddot{y}_{\max}$ — максимальное значение второй производной управляемой величины (ускорения), которое должно обеспечиваться на выходе. При необходимости можно воспользоваться точными методами расчета периодических режимов, изложенными в § 6.3.

Определение числа дополнительных разрядов арифметического устройства. В цифровых вычислительных машинах практически всегда необходимо иметь в арифметическом устройстве дополнительные разряды, чем обеспечивается требуемая точность вычислительных операций. Реализация в цифровой части корректирующих алгоритмов также требует, как правило, наличия в ней дополнительных разрядов. Это объясняется тем, что коэффициенты передаточной функции $D(z)$ могут не быть целыми числами и их реализация требует использования более мелких единиц по сравнению с единицей младшего разряда входного преобразователя.

Количество дополнительных разрядов определяется также требованиями по точности воспроизведения

дробных коэффициентов $D(z)$. Точность воспроизведения коэффициентов $D(z)$ может быть установлена по допустимым отклонениям от оптимальных алгоритмов при решении задачи синтеза в соответствии с главой 4 или по допустимым отклонениям постоянных времени, формирующих типовые передаточные функции или типовые л. а. х., в соответствии с главой 5. Подробнее об этом — см. работу [7].

Если известны величины всех коэффициентов передаточной функции $D(z)$, а также требования по точности их воспроизведения, то установить необходимое число разрядов арифметического устройства не представляет труда.

Определение полного числа разрядов выходного преобразователя. Полное число разрядов выходного преобразователя α должно обычно превышать основное число разрядов α_0 , определяемое формулой (6.116). Это иллюстрируем рис. 6.23, где изображена характеристика выходного преобразователя для случая $\alpha_0 = 2$ и $\alpha = 3$. Сигнал x_{10} соответствует получению в системе максимального управления в установившемся режиме. Сигнал $x_{1\max}$ является максимальным сигналом, который может появиться на выходе преобразователя. Разность $x_{1\max} - x_{10}$ определяет наличие запаса линейности в выходном преобразователе, который необходим для улучшения динамических характеристик системы.

Один из возможных способов определения необходимого запаса линейности в выходном преобразователе заключается в оценке влияния шумов квантования.

Следует заметить, что дополнительный запас линейности в этом случае требуется и в последующем тракте канала управления, если он безынерционен. Только в том случае, когда сигнал проходит звено с ограниченной полосой пропускания, например апериодическое, уровень шума будет снижаться и зона линейности может быть уменьшена. Расчет требуемой зоны линейности в этом случае не будет отличаться от излагаемого ниже.

Если на входе ЦВМ имеется один преобразователь (рис. 6.1), то дисперсия шумов квантования на входе ЦВМ равна $1/12$ при равномерном законе распределения. При действии двух преобразователей (рис. 1.3) суммарная дисперсия равна $1/6$ при законе распределения Симп-

сона (треугольный закон распределения). При действии i преобразователей суммарная дисперсия равна $i/12$. При этом закон распределения будет тем ближе к нормальному, чем больше число i .

Приближенное значение дисперсии шумов квантования на выходе ЦВМ может быть определено из выражения

$$\sigma_k^2 = D_k \approx \frac{i}{12} \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|D^*(j\lambda)|^2 d\lambda}{\left|1 + j\lambda \frac{T}{2}\right|^2}. \quad (6.131)$$

Вместо приближенной формулы (6.131) можно воспользоваться точными формулами, приведенными в § 3.7, что вызывает, однако,

усложнение расчетов.

При числе $i > 1$ и сравнительно большом числе членов передаточной функции $D(z)$ для процесса на выходе ЦВМ можно принять нормальное распределение. Тогда влияние шумов квантования можно учесть следующим образом.

Пусть система находится в режиме, когда требуется обеспечивать максимальное управление x_{10} (рис. 6.23). На этот режим накладываются шумы с дисперсией D_k . При этом результирующий сигнал на выходе ЦВМ может попадать как на наклонный участок линеаризованной характеристики, так и на участки насыщения.

Считая, что для сигналов в цифровой (относительной) форме коэффициент передачи на наклонном участке равен единице, а на участках насыщения равен нулю, можем представить результирующий коэффициент передачи в виде

$$k_p = P(-x_n - x_{10} < x_k < x_n - x_{10}), \quad (6.132)$$

где вероятность нахождения шумового сигнала x_k на наклонном участке характеристики (рис. 6.23), равная

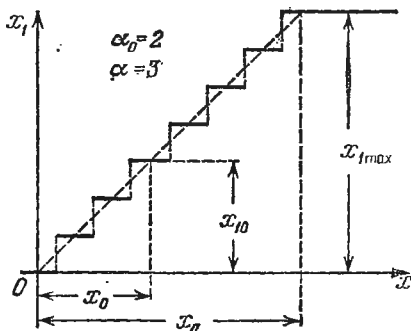


Рис. 6.32. Пример статической характеристики выходного преобразователя.

результатирующему коэффициенту передачи, определяется интегралом вероятностей

$$k_p = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \int_{-(x_n + x_{10})}^{x_n - x_{10}} \exp \left[-\frac{x_k^2}{2\sigma_k^2} \right] dx_k = \\ = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{x_n + x_{10}}{\sigma_k} \right) + \Phi \left(\frac{x_n - x_{10}}{\sigma_k} \right) \right]. \quad (6.133)$$

При известных значениях σ_k и x_{10} можно подобрать такое значение x_n , пользуясь формулой (6.135), при котором снижение общего коэффициента усиления оказывается допустимым. Заметим, что при выборе $\alpha = \alpha_0$, т. е. при $x_n = x_{10}$, формула (6.133) дает

$$k_p = \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{2x_{10}}{\sigma_k} \right) < \frac{1}{2}, \quad (6.134)$$

что соответствует возможному снижению общего коэффициента усиления более чем в два раза.

Определим, например, снижение общего коэффициента усиления при выборе выходного преобразователя в соответствии с рис. 6.23 для рассмотренного выше примера 6.3 в случае наличия двух входных преобразователей. В соответствии с формулой (6.131)

$$D_k = \frac{i}{12} \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|1 + j\lambda\tau|^2 d\lambda}{\left| 1 + j\lambda \frac{T}{2} \right|^4} = \\ = \frac{i}{24} \left(1 + \frac{4\tau^2}{T^2} \right) = \frac{i}{12} \frac{1 + a^2}{(1 - a)^2} = \frac{2}{12} \frac{1 + 0,92^2}{(1 - 0,92)^2} = 48,2.$$

Среднеквадратичное значение $\sigma_k \approx 7$. Далее по формуле (6.133) находим при $x_{10} = 3$ и $x_n = 7$

$$k_p = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{10}{7} \right) + \Phi \left(\frac{4}{7} \right) \right] = \frac{1}{2} (0,847 + 0,431) = 0,639.$$

Относительное снижение общего коэффициента усиления составляет здесь 36,1%, что в некоторых случаях может быть недопустимым и требует увеличения зоны линейности, т. е. значения α .

Снижение требований к расширению зоны линейности, т. е. снижение требуемого количества дополнительных разрядов в выходном преобразователе, может быть достигнуто уменьшением цены единицы младшего разряда вход-

ного и, соответственно, выходного преобразователей, что увеличивает число ступенек в нелинейной характеристике преобразователя (рис. 6.23) и снижает эффект действия шумового процесса на выходе, поскольку величина σ_k остается неизменной при неизменной передаточной функции. Так, для рассмотренного примера, если уменьшить

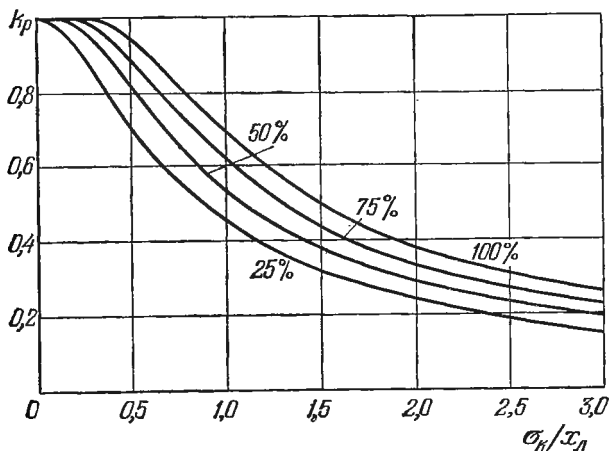


Рис. 6.24. Нормированные кривые подавления коэффициента усиления шумами квантования.

вдвое цены единиц младшего разряда на входе и выходе, то $\alpha_0 = 3$ и $\alpha = 4$. Тогда при $x_{10} = 7$ и $x_n = 15$

$$k_p = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{22}{7}\right) + \Phi\left(\frac{8}{7}\right) \right] = \frac{1}{2} (0,998 + 0,746) = 0,872.$$

В этом случае снижение коэффициента усиления составляет только 12,8% при относительно меньшем расширении зоны линейности преобразователя.

На рис. 6.24 построены нормированные кривые для определения результирующего коэффициента передачи ЦВМ при различных уровнях шума квантования и различных запасах линейности выходного преобразователя. Запас линейности дан в относительных единицах $(x_n - x_{10})/x_n$ для значений 25%, 50%, 75% и 100%. Значение 100% соответствует случаю отсутствия установившегося значения управления, т. е. при $x_{10} = 0$.

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(j\omega) d\omega}{A(j\omega) A(-j\omega)},$$

где

$$A(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n,$$

$$G(j\omega) = b_0 (j\omega)^{2n-2} + b_1 (j\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}$$

и все корни $A(j\omega)$ расположены в верхней полуплоскости;

$$I_1 = \frac{b_0}{2a_0a_1},$$

$$I_2 = \frac{-b_0 + \frac{a_0b_1}{a_2}}{2a_0a_1},$$

$$I_3 = \frac{-a_2b_0 + a_0b_1 - \frac{a_0a_1b_2}{a_3}}{2a_0(a_0a_3 - a_1a_2)},$$

$$I_4 = \frac{b_0(-a_1a_4 + a_2a_3) - a_0a_3b_1 + a_0a_1b_2 + \frac{a_0b_3}{a_4}(a_0a_3 - a_1a_2)}{2a_0(a_0a_3^2 + a_1^2a_4 - a_1a_2a_3)},$$

$$I_5 = \frac{M_5}{2a_0\Delta_5},$$

$$\begin{aligned} M_5 = & b_0(-a_0a_4a_5 + a_1a_4^2 + a_2^2a_5 - a_2a_3a_4) + \\ & + a_0b_1(-a_2a_5 + a_3a_4) + a_0b_2(a_0a_5 - a_1a_4) + a_0b_3(-a_0a_3 + a_1a_2) + \\ & + \frac{a_0b_4}{a_5}(-a_0a_1a_5 + a_0a_3^2 + a_1^2a_4 - a_1a_2a_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_5 = & a_0^2a_3^2 - 2a_0a_1a_4a_5 - a_0a_2a_3a_5 + a_0a_3^2a_4 + \\ & + a_1^2a_4^2 + a_1a_2^2a_5 - a_1a_2a_3a_4, \end{aligned}$$

$$I_6 = \frac{M_6}{2a_0\Delta_6},$$

$$\begin{aligned}
M_6 = & b_0 (-a_0 a_3 a_5 a_6 + a_0 a_4 a_3^2 - a_1^2 a_6^2 + 2a_1 a_2 a_5 a_6 + a_1 a_3 a_4 a_6 - \\
& - a_1 a_4^2 a_5 - a_2^2 a_3^2 - a_2 a_3^2 a_6 + a_2 a_3 a_4 a_5) + \\
& + a_0 b_1 (-a_1 a_5 a_6 + a_2 a_3^2 + a_3^2 a_6 - a_3 a_4 a_5) + \\
& + a_0 b_2 (-a_0 a_5^2 - a_1 a_3 a_6 + a_1 a_4 a_5) + \\
& + a_0 b_3 (a_0 a_3 a_5 + a_1^2 a_6 - a_1 a_2 a_5) + \\
& + a_0 b_4 (a_0 a_1 a_5 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_2 a_3) + \frac{a_0 b_5}{a_6} (a_0^2 a_5^2 + a_0 a_1 a_3 a_6 - \\
& - 2a_0 a_1 a_4 a_5 - a_0 a_2 a_3 a_5 + a_0 a_3^2 a_4 - a_1^2 a_2 a_6 + \\
& + a_1^2 a_4^2 + a_1 a_2^2 a_5 - a_1 a_2 a_3 a_4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_6 = & a_0^2 a_5^2 + 3a_0 a_1 a_3 a_5 a_6 - 2a_0 a_1 a_4 a_5^2 - a_0 a_2 a_3 a_5^2 - \\
& - a_0 a_3^2 a_6 + a_0 a_3^2 a_4 a_5 + a_1^3 a_6^2 - 2a_1^2 a_2 a_5 a_6 - a_1^2 a_3 a_4 a_6 + \\
& + a_1^2 a_4^2 a_5 + a_1 a_2^2 a_3^2 + a_1 a_2 a_3^2 a_6 - a_1 a_2 a_3 a_4 a_5.
\end{aligned}$$

1. Астапов Ю. М., Медведев В. С., Статистические характеристики шумов при квантовании по уровню. Автоматика и телемеханика, № 2, 1963.
2. Бабич Г. Х., Шлюгер Б. Н., О методической погрешности реализации дробно-рациональной передаточной функции в специализированных цифровых управляющих машинах. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 3, 1968.
3. Баркин А. И., Определение параметров почти периодических колебаний в нелинейных импульсных системах. Автоматика и телемеханика, № 1, 1968.
4. Барковский В. В., Захаров В. Н., Шаталов А. С., Методы синтеза систем управления. Изд-во «Машиностроение», 1969.
5. Берген А. Р., О статистическом расчете линейных импульсных систем со случайными интервалами повторения импульсов. Труды I Конгресса ИФАК. Изд-во АН СССР, 1961.
6. Бесекерский В. А., Квазипериодические режимы, вызванные квантованием по уровню, в цифровых системах автоматического управления. Техническая кибернетика, № 5, 1969.
7. Бесекерский В. А., Динамический синтез систем автоматического регулирования. Изд-во «Наука», 1970.
8. Бесекерский В. А., Попов Е. П., Теория систем автоматического регулирования. Изд-во «Наука», 1975.
9. Бесекерский В. А., Попов В. С., Расчет периодических режимов, вызванных квантованием по уровню в ЦАС. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 1973.
10. Бесекерский В. А., Фабрикант Е. А., Динамический синтез систем гироскопической стабилизации. Изд-во «Судостроение» 1968.
11. Бесекерский В. А., Федоров С. М., Синтез следящих систем с цифровыми вычислительными машинами методом л. а. х. Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, № 3, 1961.
12. Боднер В. А., Системы управления летательными аппаратами. Изд-во «Машиностроение», 1974.
13. Бортовые цифровые вычислительные машины современных ракет-носителей и космических аппаратов (обзор). Вопросы ракетной техники, № 7, 1970.
14. Бруси В. А., Некоторые результаты исследования нелинейных дискретных стохастических систем управления. Автоматика и телемеханика, № 6, 1970.
15. Вавилов А. А., Частотные методы расчета нелинейных систем. Изд-во «Энергия», 1970.

16. В а н Т р и с Г., Теория обнаружения, оценок и модуляции, т. I. Изд-во «Советское радио», 1972.
17. В а с и л ь е в Д. В., М и т р о ф а н о в Б. А., Р а б к и н Г. Л. и др., Проектирование и расчет следящих систем. Изд-во «Судостроение», 1964.
18. В е й с П., Дискретная фильтрация Калмана — Бьюси при неизвестных ковариациях шумов. Вопросы ракетной техники, № 1, 1971.
19. В е р е ш к и н А. Е., Д и в ь е т и Л. Д., Р о с с и К. М., Ш м и д Р. М., Вероятностный анализ ошибок квантования в линейном цифровом фильтре при учете различных структур его реализации. Автоматика и телемеханика, № 8, 1968.
20. В е р е ш к и н А. Е., Д и в ь е т и Л. Д., Р о с с и К. М., Ш м и д Р. М., О двух новых структурах реализации дискретной передаточной функции с комплексными полюсами. Автоматика и телемеханика, № 9, 1968.
21. В и д а л ь П., Нелинейные импульсные системы. Изд-во «Энергия», 1974.
22. В о л г и н Л. Н., Метод синтеза линейных импульсных систем автоматического регулирования по динамическим критериям. Автоматика и телемеханика, № 10, 1959.
23. В о л г и н Л. Н., С м о л ь я р Л. И., Коррекция следящих систем при помощи дискретных вычислительных устройств. Автоматика и телемеханика, № 8, 1960.
24. В о р о н о в А. А., Основы теории автоматического управления, ч. 1, Линейные системы регулирования одной величины. Изд-во «Энергия», 1965.
25. В о р о н о в А. А., Основы теории автоматического управления, ч. 2, Специальные линейные и нелинейные системы регулирования одной величины. Изд-во «Энергия», 1966.
26. В о р о н о в А. А., Основы теории автоматического управления, ч. 3, Оптимальные, многосвязанные и адаптивные системы. Изд-во «Энергия», 1970.
27. Г а б а с о в Р., К и р и л л о в а Ф. М., К теории необходимых условий оптимальности для дискретных систем. Автоматика и телемеханика, № 12, 1969.
28. Г и т и с Э. И., Преобразователи информации для электронных цифровых вычислительных устройств. Изд-во «Энергия», 1970.
29. Г у с е в В. Г., Методы исследования точности цифровых автоматических систем. Изд-во «Наука», 1973.
30. Г у т е р Р. С., О в ч и н с к и й Б. В., Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. Изд-во «Наука», 1970.
31. Д е н и с о в Р. Н., Анализ периодических режимов релейно-импульсной системы методом модифицированного z-преобразования. Автоматика и телемеханика, № 6, 1968.
32. Д е н и с о в Р. Н., Анализ периодических режимов в импульсных системах с квантованием сигнала по уровню методами z-преобразования. Автоматика и телемеханика, № 1, 1970.
33. Д ж у р и Э., Импульсные системы автоматического регулирования. Физматгиз, 1963.
34. Д ж у р и Э., Ц ы п к и н Я. З., Теория дискретных автоматических систем (обзор). Автоматика и телемеханика, № 6, 1970.

35. Д м и т р и е в Ю. А., Абсолютная устойчивость импульсных автоматических систем с одной нелинейностью. Автоматика и телемеханика, № 8, 1968.
36. Д м и т р и е в Я. В., О вычислении логарифмических частотных характеристик дискретных звеньев. Автоматика и телемеханика, № 7, 1970.
37. Ду л е п о в Е. Г., Е с и п о в А. С., Гибридные цифровые преобразователи. Автоматика и телемеханика, № 5, 1968.
38. Е м е л ь я н о в С. В., Системы автоматического управления с переменной структурой. Изд-во «Наука», 1967.
39. Е м е л ь я н о в С. В. (ред.), Системы автоматического управления с переменной структурой. Изд-во «Наука», 1970.
40. З в о н о в С. Г., Применение двумерного z -преобразования для определения дискретных формирующих фильтров. Техническая кибернетика, № 4, 1970.
41. З е л ь к и н Э. Г., Построение экстраполяторов. Автоматика и телемеханика, № 9, 1962.
42. З е и к о в В. В., Сравнение дискретных и непрерывных фильтров. Автоматика и телемеханика, № 8, 1968.
43. З у б о в В. Н., Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Судпромгиз, 1959.
44. З у б о в В. И., Теория оптимального управления. Изд-во «Судостроение», 1966.
45. И ш л и н с к и й А. Ю., Механика гироскопических систем. Изд-во АН СССР, 1963.
46. К а з а к о в И. Е., Д о с т у п о в В. Г., Статистическая динамика нелинейных систем. Физматгиз, 1962.
47. К а л м а н Р. Е., Об общей теории систем управления. Труды I Конгресса ИФАК. Изд-во АН СССР, 1961.
48. К а т к о в н и к В. Я., П о л у э к т о в Р. А., Многомерные дискретные системы управления. Изд-во «Наука», 1966.
49. К а т к о в н и к В. Я., П о л у э к т о в Р. А., Ч е л п а н о в И. Б., Синтез многоканальных дискретных систем при наличии случайных помех. Техническая кибернетика, № 1, 1966.
50. К о р о б о в Н. Н., Синтез оптимальных характеристик импульсных следящих систем. Автоматика и телемеханика, № 9, 1962.
51. К о р ш у н о в Ю. М., Анализ периодических режимов, вызванных квантованием по уровню в цифровых автоматических системах. Автоматика и телемеханика, № 7, 1961.
52. К о р ш у н о в Ю. М., О построении эквивалентного комплексного коэффициента усиления нелинейного импульсного элемента. Автоматика и телемеханика, № 5, 1962.
53. К о р ш у н о в Ю. М., Периодические режимы в импульсных системах с насыщением и зоной нечувствительности. Техническая кибернетика, № 4, 1964.
54. К о р ш у н о в Ю. М., Оптимальные нелинейные фильтры для сглаживания прогнозирования и дифференцирования по конечному числу дискретных значений. Автоматика и телемеханика, № 3, 1969.
55. К о р ш у н о в Ю. М., Б о б и к о в А. И., Цифровые сглаживающие и преобразующие системы. Изд-во «Энергия», 1969.

56. К о с я к и н А. А., К вопросу об определении параметров автоколебаний в цифровых САР. Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, № 3, 1961.
57. К о с я к и н А. А., Статистическая теория квантования по уровню. Автоматика и телемеханика, № 6, 1961.
58. К о с я к и н А. А., Устойчивость и колебания цифровых автоматических систем. Автоматика и телемеханика, № 3 и № 4, 1970.
59. К о ч е т к о в В. Т., П о ц е л у е в А. В., Статистический синтез дискретных нелинейных систем управления. Техническая кибернетика, № 4, 1968.
60. К р а с о в с к и й А. А., О синтезе импульсных корректирующих устройств следящих систем. Автоматика и телемеханика, № 6, 1959.
61. К р а с о в с к и й А. А., Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами. Изд-во «Машиностроение», 1969.
62. К р а с о в с к и й А. А. и П о с п е л о в Г. С., Основы автоматика и технической кибернетики. Госэнергоиздат, 1962.
63. К р а с о в с к и й Н. Н., М о и с е е в Н. Н., Теория оптимальных управляемых систем. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 1967.
64. К р у г Е. К., Динамические свойства и настройка систем с дискретными регуляторами. Автоматика и телемеханика, № 4, 1962.
65. К р у г Е. К., Некоторые вопросы применения цифровых методов коррекции. Автоматика и телемеханика, № 8, 1967.
66. К р у г Е. К., А л е к с а н д р и д и Т. М., Д и л и г е н с к и й С. Н., Цифровые регуляторы. Госэнергоиздат, 1966.
67. К р у т ь к о П. Д., Задача определения дискретного формирующего фильтра. Автоматика и телемеханика, № 11, 1961.
68. К р у т ь к о П. Д., Дискретный аналог δ -функции Дирака. Автоматика и телемеханика, № 7, 1962.
69. К р у т ь к о П. Д., Вариационные методы синтеза систем с цифровыми регуляторами. Изд-во «Советское радио», 1967.
70. К у з и н Л. Т., Расчет и проектирование дискретных систем управления. Машгиз, 1962.
71. К у з о в к о в Н. Т., Динамика систем автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», 1968.
72. К у з ь м и н Э. А., С и т к о Н. Я., Об одном методе синтеза автоматических систем с цифровыми корректирующими устройствами. Техническая кибернетика, № 3, 1966.
73. К у л е с с к и й Р. А., Т и м о ф е е в В. Л., Исследование качества работы цифровых позиционных автоматических систем. Автоматика и телемеханика, № 10, 1973.
74. К у н ц е в и ч В. М., Анализ нелинейных и экстремальных импульсных систем на разностной фазовой плоскости. Автоматика и телемеханика, № 5, 1961.
75. Л е в и н Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, 1. Изд-во «Советское радио», 1974.
76. Л е о и д е с К. Т. (ред.), Современная теория систем управления. Изд-во «Наука», 1970.
77. Л и х а р е в В. А., Цифровые методы и устройства в радиолокации. Изд-во «Советское радио», 1973.

78. Лондер М. И., Об определении периодических режимов в цифровых автоматических системах. Техническая кибернетика, № 4, 1964.
79. Лучко С. В., Федоров С. М., О синтезе псевдолинейных корректирующих устройств. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 1974.
80. Мерриэм К., Теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью. Изд-во «Мир», 1967.
81. Мехра Р., Идентификация и адаптивная фильтрация Калмана. Сб. «Механика», № 3, 1971.
82. Михаль В., Новый подход к идентификации систем и оценке состояний. ЭИ «Техническая кибернетика», № 43, 1972.
83. Морозов А. А., Исследование установившихся движений релейно-импульсной системы. Автоматика и телемеханика, № 7, 1967.
84. Муттер В. М., Аналого-цифровые следящие системы. Изд-во «Энергия», 1974.
85. Николаев Ю. А., Петухов В. П., Феклисов Г. И., Чемоданов Б. К., Динамика цифровых следящих систем. Изд-во «Энергия», 1970.
86. Новосельцева Ж. А., Априорная информация в задачах оптимальной фильтрации. Автоматика и телемеханика, № 6, 1968.
87. Озерной В. М., Розенберг Г. С., Цифровая следящая система для автоматического программного управления механизмом нажимного устройства реверсивного прокатного стана. Автоматика и телемеханика, № 11, 1959.
88. Пареев Ю. И., О вероятностных характеристиках оценок Калмана. Автоматика и телемеханика, № 9, 1969.
89. Первозванский А. А., Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. Физматгиз, 1962.
90. Перов В. П., К вопросу о реализации оптимальных весовых функций следящих импульсных систем. Автоматика и телемеханика, № 3, 1959.
91. Петров Б. Н. (ред.), Автоматическая оптимизация управляемых систем. ИЛ, 1960.
92. Петров Б. Н. (ред.), Солодовников В. В. (ред.), Топчиев Ю. И., Современные методы проектирования систем автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», 1967.
93. Покровский А. Н., К вопросу об использовании ЦВМ для дифференцирования и сглаживания последовательностей, содержащих случайные помехи. Автоматика и телемеханика, т. XXII, № 6, 1961.
94. Попов Е. П., Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. Изд-во «Наука», 1973.
95. Попов Е. П. и Пальтов И. П., Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1960.
96. Попов Е. П. (ред.) и Топчиев Ю. П. (ред.), Метод гармонической линеаризации в проектировании нелинейных систем. Изд-во «Машиностроение», 1970.
97. Попов Е. П. (ред.) и Топчиев Ю. П. (ред.), Нелинейные корректирующие устройства в системах автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», 1970.

98. П о п о в Е. П. (ред.) и Ф е д о р о в С. М. (ред.), Методы синтеза нелинейных систем автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», 1970.
99. П о п о в Е. П. (ред.) и Н е л е п и н Р. А. (ред.), Точные методы исследования нелинейных систем автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», 1970.
100. П о п о в Е. П. (ред.) и П о н о м а р е в В. М. (ред.), Нелинейная оптимизация систем автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», 1970.
101. П о п о в Е. П. (ред.) и Д о с т у п о в Б. Г. (ред.), Статистические методы в проектировании нелинейных систем автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», 1970.
102. П о с п е л о в Г. С., Импульсные системы автоматического регулирования. Автоматическое управление и вычислительная техника, вып. 3. Изд-во «Машиностроение», 1960.
103. П о т а п о в М. Д., Синтез дискретных корректирующих устройств на основе конечного времени регулирования. Автоматика и телемеханика, № 4, 1962.
104. П у г а ч е в В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Физматгиз, 1963.
105. П у г а ч е в В. С. (ред.), Основы автоматического управления. Изд-во «Наука», 1974.
106. Р и в к и н С. С., Метод оптимальной фильтрации Калмана и его применение в инерциальных навигационных системах. Изд-во «Судостроение», ч. 1 (1973) и ч. 2 (1974).
107. Р о з е н в а с с е р Е. Н. (ред.) и Ю с у п о в Р. М. (ред.), Методы теории чувствительности в автоматическом управлении. Изд-во «Энергия», 1971.
108. Р я б о в а - О р е ш к о в а А. П., К вопросу о линейной фильтрации на ЦВМ. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 3, 1969.
109. С а н к о в с к и й Е. А. (ред.), Справочное пособие по теории систем автоматического регулирования и управления. Изд-во «Высшая школа», Минск, 1973.
110. С е р е б р е н н и к о в М. Г., Гармонический анализ. Гостехиздат, 1948.
111. С и г а л о в Г. Г., М а д о р с к и й Л. С., Основы теории дискретных систем управления. Изд-во «Высшая школа», 1973.
112. С и м к и н М. М., Периодические режимы в системах с нелинейными импульсными элементами. ДАН СССР, т. 131, № 6, 1960.
113. С и м к и н М. М., Метод гармонического баланса в нелинейных импульсных системах. Автоматика и телемеханика, № 11, 1961.
114. С и м к и н М. М., Распространение метода Гольдфарба на нелинейные импульсные системы. Сб. «Метод Гольдфарба в теории регулирования». Госэнергоиздат, 1962.
115. С и м к и н М. М., Сложные установившиеся движения в нелинейных импульсных системах. ДАН СССР, т. 149, № 3, 1963.
116. С и м к и н М. М., О физической природе установившихся движений в нелинейной импульсной системе. ДАН СССР, т. 159, № 6, 1964.
117. С и м к и н М. М., Сложные установившиеся движения в нелинейных импульсных системах. ДАН СССР, т. 145, № 3, 1965.

118. Смирнов И. Н., Итеративный метод построения линейного дискретного фильтра. Изв. АН СССР, Автоматика и телемеханика, № 8, 1967.
119. Смит Г., Последовательная оценка дисперсий ошибок измерений в задаче определения траекторий. Ракетная техника и космонавтика, № 11, 1967.
120. Солодовников В. В. (ред.), Теория автоматического регулирования, 1, 2 и 3. Изд-во «Машиностроение», 1967.
121. Стаббс Г. С., Пинчук А., Шлундт Р. В., Цифровая система стабилизации космического корабля «Аполлон». Вопросы ракетной техники, № 7, 1970.
122. Страхов В. П., Отображение движения цифровой следящей системы на многолистной фазовой плоскости. Автоматика и телемеханика, № 4, 1962.
123. Траксел Дж., Синтез систем автоматического регулирования. Машгиз, 1959.
124. Траксел Дж. (ред.), Справочная книга по технике автоматического регулирования. Госэнергоиздат, 1962.
125. Ту Ю. Т., Цифровые и импульсные системы автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», 1964.
126. Тунник А. А., Галь М. М., Об ограничении дисперсии ошибки пропорциональных импульсных систем экстремального управления при воздействии случайных возмущений. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 3, 1968.
127. Улаиов Г. М., Регулирование по возмущению. ГЭИ, 1960.
128. Федоров С. М., Литвиниов А. П., Автоматические системы с цифровыми управляющими машинами. Изд-во «Энергия», 1965.
129. Фримен Н. Г., Тинтс П. Б., Цифровая система стабилизации ракеты-носителя «Титан-3С». Вопросы ракетной техники, № 7, 1970.
130. Хитрик М. С. (ред.) и Федоров С. М. (ред.), Динамика систем управления ракет с бортовыми цифровыми вычислительными машинами. Изд-во «Машиностроение», 1972.
131. Хлыпало Е. Н., Нелинейные системы автоматического регулирования. Изд-во «Энергия», 1967.
132. Хлыпало Е. Н., Нелинейные корректирующие устройства в автоматических системах. Изд-во «Энергия», 1973.
133. Цифровые модели и интегрирующие структуры. Труды межвузовской научной конференции, Таганрог, 1970.
134. Цыпкин Я. З., К расчету нелинейных систем прерывистого (импульсного) регулирования. Труды II Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. Изд-во АН СССР, 1955.
135. Цыпкин Я. З., Расчет процессов в нелинейных системах прерывистого регулирования. Автоматика и телемеханика, № 17, № 6, 1956.
136. Цыпкин Я. З., Оценка влияния квантования по уровню на процессы в цифровых автоматических системах. Автоматика и телемеханика, № 3, 1960.
137. Цыпкин Я. З., Об исследовании устойчивости периодических режимов в нелинейных импульсных автоматических системах. Автоматика и телемеханика, № 6, 1961.

138. Цыпкин Я. З., Метод Гольдфарба и его применение для анализа периодических режимов в НИАС. Сб. «Метод Гольдфарба в теории регулирования». Госэнергоиздат, 1962.
139. Цыпкин Я. З., Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, 1963.
140. Цыпкин Я. З., Релейные автоматические системы. Изд-во «Наука», 1974.
141. Цыпкин Я. З. (ред.), Проблемы теории импульсных систем управления. Изд-во «Наука», 1966.
142. Цыпкин Я. З., Попков Ю. С., Теория нелинейных импульсных систем. Изд-во «Наука», 1973.
143. Чемоданов Б. К., Феклисов Г. И., Исследование цифровых автоматических систем методом логарифмических характеристик. Электричество, № 6, 1964.
144. Шамриков Б. М., Качественное исследование нелинейных импульсных систем методом точечных отображений. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 3, 1972.
145. Эйзелтайн Дж. А., Исследование нелинейных импульсных систем при помощи фазовой плоскости. Труды I Конгресса ИФАК, т. 2, Изд-во АН СССР, 1961.
146. Юревич Е. И., Теория автоматического управления. Изд-во «Энергия», 1969.
147. Kalman R., A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. Trans. ASME J. Basic Engineering, 82, 1960.
148. Kalman R., Bucy R., New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. Trans. ASME, J. Basic Engineering, 83, 1961.
149. Wiener N., Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. J. Wiley. N.Y., 1949.

Абсолютная псевдочастота 109
 Автокорреляционная функция 147
 Алгоритм фильтра Калмана для дискретных систем 318
 — — — для непрерывных систем 313
 Амплитудно-импульсная модуляция 37
 Базовая частота 379
 Взаимосвязь шума квантования и полезного сигнала 211
 Винера фильтры 261
 Винера — Хопфа уравнение 272
 — —, дискретизация 293
 Возможность периодических режимов 514
 — — —, несимметричные режимы 543
 — — —, симметричные режимы 543
 — — —, условие замыкания 541
 — — —, устойчивость периодических режимов 543
 Гармонический сигнал 170
 — —, спектральная плотность 170
 Двумерная плотность вероятности 143
 Динамический синтез систем управления 256
 Дискретная передаточная функция 64
 Дискретное преобразование Лапласа 43
 Дискретные корректирующие средства 458
 — — —, канонические схемы фильтра 462
 — формирующие фильтры 331
 Дискретный белый шум 160
 — — —, корреляционная функция 161
 — — —, спектральная плотность 161
 Дискреты непрерывных функций 38
 Дисперсия 143
 Дифференциальное уравнение звена в отклонениях 27

Единичная импульсная решетчатая функция 44
 — периодическая решетчатая функция 534
 Закон распределения случайной величины 142
 Запретные области по точности 359, 376
 Звено квазиколебательное 407
 — — с отрицательным затуханием 409
 — квазиконсервативное 406
 — колебательное 132
 — — с отрицательным затуханием 410
 Идеальная линейная характеристика 221
 Импульсный фильтр 37
 — элемент идеальный второго рода 72
 — — — первого рода 73
 Калмана фильтры 263, 306, 341
 — —, алгоритм для дискретных систем 318
 — — — для непрерывных систем 313
 Каноническая схема дискретного фильтра 462, 466
 — — оптимального фильтра 279
 — — формирующего дискретного фильтра 333
 — — — непрерывного фильтра 326
 Качка нерегулярная 165
 — —, корреляционная функция 166
 — —, спектральная плотность 167
 Квазиколебательное звено 407
 — — с отрицательным затуханием 409
 Квазиконсервативное звено 406
 Квантование по уровню 8
 Колебательное звено 132
 — — с отрицательным затуханием 410
 Консервативное звено 132
 Корректирующие обратные связи 469
 — средства дискретные 458
 — — —, точность задания коэффициентов 466
 — — — непрерывные 438
 — — —, антивибраторы 448
 — — —, звенья параллельного типа 440

Корректирующие средства непрерывные, звенья пассивные дифференцирующие 448
 — — —, — последовательного типа 439, 441
 — — —, — с бесконечной полосой пропускания 448
 — — —, — фазосдвигающие 448
 — — —, изотропные устройства 448
 — — —, обратные связи 440
 — — —, расчет 453
 — устройства псевдолинейные 472
 Корреляционная функция 147
 — —, основные свойства 148
 Кратковременные отказы 20
 Кубическая характеристика 226
 Кусочно-линейные характеристики 218

 Лапласа дискретное преобразование 43
 Линеаризация нелинейных уравнений 25
 — — —, второй способ 29
 — — —, геометрическая трактовка 28
 — — —, третий способ 30
 — преобразователей 32
 Линейная система импульсного регулирования 36
 Линейный дискретный корректирующий алгоритм ЦВМ 181
 — — — —, схема реализации 182

 Математическое ожидание случайных величин 143
 Момент второго порядка центральный 143
 — первого порядка 143

 Непрерывные корректирующие средства 438
 — — —, антивибраторы 448
 — — —, звенья параллельного типа 440
 — — —, — пассивные дифференцирующие 448
 — — —, — последовательного типа 439, 441
 — — —, — с бесконечной полосой пропускания 448
 — — —, — фазосдвигающие 448
 — — —, изотропные устройства 448
 — — —, обратные связи 440
 — экстраполаторы 91
 Ньютона интерполяционная формула 90

 Обратные связи корректирующие 469
 Обслуживание по гибкой программе 11

Обслуживание по жесткой программе 11
 Оптимальная фильтрация 7
 Оптимальный синтез по заданным качественным показателям 258
 Отказы кратковременные 20
 Относительная псевдочастота 109
 Ошибки в оптимальных системах 280, 296
 — прогнозирования 287, 303

 Передаточная функция дискретная 64, 77
 — — для возмущений 104
 — — импульсной системы 72
 — — — при наличии запаздывания 78
 — — многомерных ЦАС 136
 — — непрерывной части приведенная 80
 — — частотная 105
 Переменность периода дискретности 244
 Перенос действия двух помех в одну точку 187
 Переходные процессы для типовых л. а. х. 411
 Периодические весовые функции 535
 — — — несимметричного вида 535
 — — — симметричного вида 535
 — передаточные функции 535
 Плотность вероятности случайной величины 142
 — — — — условная 144
 — спектральная 155
 — нормированная 157
 — —, формула обращения 157
 Поиск неисправностей 21
 Помехи на выходе ЦВМ 189
 — хаотические чисто случайные 144
 Предельный фильтр 8. 378
 z-преобразование 43
 —, значение решетчатой функции конечное 54
 —, — — начальное 54
 —, изображение разностей 50
 —, — решетчатых функций с переменным периодом следования 53
 —, — сумм 51
 —, периодические решетчатые функции 65
 —, — — симметричные 67
 —, площадь огибающей смещенной решетчатой функции 69
 —, разложение в ряд Лорана 61
 —, решение разностных уравнений 62
 —, свертка решетчатых функций 55
 —, свойство линейности 48
 —, сумма квадратов дискрет решетчатой функции 69
 —, — ординат решетчатой функции 53
 —, теорема запаздывания и упреждения 49
 —, — об умножении оригинала на степенную функцию 50
 —, — — на экспоненту 50

- а-преобразование, теорема смещения в области изображений 50
- , формула обращения 55
- , формулы разложения 58
- Преобразователь координат 17
- Прогнозирование 286
- Простота построения системы 257
- —, критерий простоты 258
- Процесс случайный 142
- — решетчатый 147
- —, корреляционная функция 148
- —, математическое ожидание 147
- — — нестационарный 147
- — — стационарный 147
- — —, спектральная плотность 157
- — стационарный 145
- — — в узком смысле 145
- — — в широком смысле 145
- —, корреляционная функция 150
- — — типовой 337
- — — эргодический 145
- стохастический 142
- чисто случайный 144
- Процессы коррелированные 155
- некоррелированные 155
- с корреляционной функцией экспоненциального вида 162
- с равномерным спектром 164
- Прямое программирование 182
- Псевдолнейные корректирующие устройства 472
- Псевдочастота 109
- абсолютная 109
- относительная 109

- Разностные уравнения 41
- Реальные фильтры 266
- Режим узкополосный 19
- широкополосный 18
- Решетчатая функция 38
- —, огибающая 39
- — случайная 147
- —, формирование 39

- Сглаживающие системы 432
- Сигнал гармонический 170
- —, спектральная плотность 170
- Симметричные типовые л. а. х. 391
- Синтез систем управления 251
- —, детерминистский подход 251
- —, динамический синтез 256
- —, запас устойчивости 255
- —, —, оценка 255
- —, оптимальные методы проектирования 252
- —, оптимальный синтез по заданным качественным показателям 258, 355
- — при неизвестных статистических характеристиках входных воздействий 255
- —, простота построения системы 257

- Синтез систем управления, простота построения системы, критерий простоты 258
- —, статистический подход 251
- —, —, критерии качества 251
- —, требования 251
- Система импульсного регулирования
- линейная 36
- нелинейная замкнутая 230
- с астатизмом первого порядка 394
- с белым шумом на входе 277
- сглаживающая 432
- содержащая колебательные звенья 401
- — неустойчивые звенья 404
- со случайным периодом дискретности 244
- статическая 398
- условно устойчивая 388
- Случайная величина 142
- —, дисперсия 143
- —, закон распределения 142
- —, математическое ожидание 143
- —, момент второго порядка 143
- —, — первого порядка 143
- —, плотность вероятности 142
- —, — — двумерная 143
- —, — — n -мерная 143
- —, — — условная 144
- —, среднее по времени 143
- —, — по множеству 143
- — решетчатая функция 147
- —, среднее по времени 147
- Случайный процесс 142
- — решетчатый 147
- —, корреляционная функция 148
- — — нестационарный 147
- — — стационарный 145, 147
- — — в узком смысле 145
- — — в широком смысле 145
- — — эргодический 145
- — —, среднее по времени 146
- — —, — по множеству 146
- Сообразность вычислений 22
- Спектральная плотность 155
- — нормирования 157
- —, формула обращения 158
- Стабилизация оси визирующего устройства 15
- Статические характеристики преобразователей 30
- Существенно нелинейные зависимости 29

- Типовые л. а. х., астатизм второго порядка 384
- —, — пулевого порядка 348
- —, — первого порядка 394
- передаточные функции 421, 428

- Узкополосный режим 18
- Уравнения в варiances 27
- в конечных разностях 41
- разностные 41
- Условно устойчивая система 388

Учет возмущений 378

- малых постоянных времени 392
- случайности периода дискретности 429

Фильтрация оптимальная 7

- Фильтры Винера 261
- импульсные 37
- Калмана 263, 306, 341
- Калмана — Бьюси 263
- отбеляющие 274, 294
- предельные 8, 378
- реальные 266
- формирующие 324
- — дискретные 331

Функции коррелированные 149

- некоррелированные 149
- Функция автокорреляционная 147
- корреляционная 147
- решетчатая 38
- — случайная 147

Характеристика кубическая 226

- кусочно-линейная 218
- линейная с насыщением 225
- релейная идеальная 221
- — петлевого типа 224
- — с зоной нечувствительности 219
- с разрывом непрерывности 219

Центральный момент второго порядка 143**Цифровое дифференцирование непрерывных сигналов 485****Цифровые автоматические системы (ЦАС) 9, 14**

- — —, коэффициент передачи 35
- — —, критерий устойчивости 113
- — — многомерные несвязанные 11
- — — — связанные 11
- — —, построение логарифмических частотных характеристик 119
- — —, устойчивость 112

Частота базовая 389**Частотные передаточные функции 105****Чисто случайный процесс 144****Широкополосный режим 119****Шумы квантования 161****Экстраполяторы высоких порядков 89**

- непрерывные 91
- нулевого порядка 82
- первого порядка 85
- — —, реализация 86
- со сложной формой выходного импульса 92

Эргодическая гипотеза 146**— теорема 146****Эргодический стационарный случайный процесс 145, 146**

- — — —, математическое ожидание 146